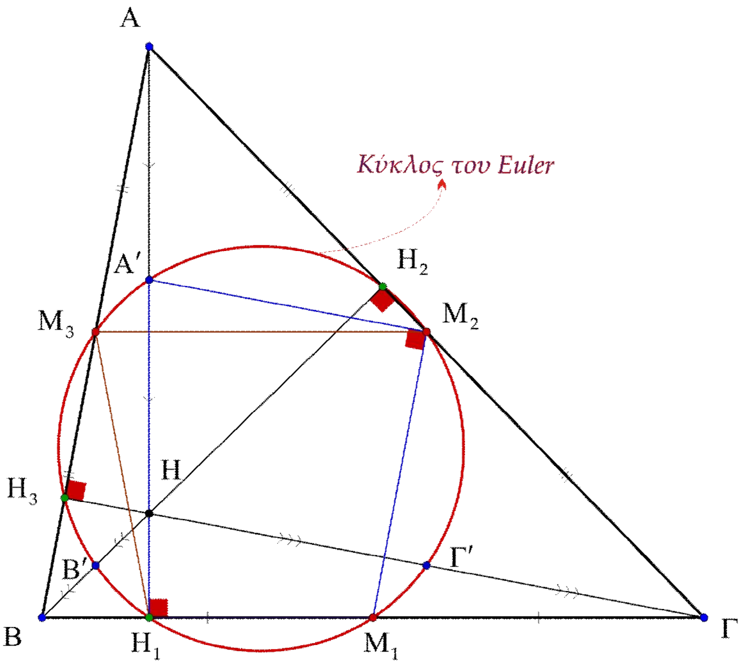
Για το mathematica, τον καλό συνάδελφο ΚΕΦΑΛΟΝΙΤΗ και τους μικρούς μαθητές του mathematica που μαζί με πολλά άλλα στερούνται και αυτών των γνώσεων

Ο κύκλος του Euler (ή κύκλος των εννέα σημείων)

Σε κάθε τρίγωνο τα ίχνη των υψών του , τα μέσα των πλευρών του και τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου από τις κορυφές του («9» σημεία) είναι σημεία ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Παρατήρηση: Τα σημεία δεν είναι σίγουρα 9 διαφορετικά αν το τρίγωνο δεν είναι σκαληνό (π.χ αν είναι ορθογώνιο τότε οι πόδες των δύο υψών του ταυτίζονται και μάλιστα με την κορυφή της ορθής γωνίας). Θα δείξουμε το θέμα σε οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο.



Απόδειξη

Έστω σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρό του. Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα, H_1, H_2, H_3 είναι τα ίχνη των υψών του από τις κορυφές Α, Β, Γ αντίστοιχα και A', B', Γ' τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου Η από τις κορυφές Α, Β, Γ αντίστοιχα, τότε:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AH_1B}$ η H_1M_3 είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε ισχύει: $\boxed{H_1M_3 = \frac{AB}{2}}:(1)$. Επίσης στο τρίγωνο ΑΒΓ το τμήμα M_1M_2 συνδέει τα μέσα των πλευρών του ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα οπότε ισχύει: $\boxed{M_1M_2 = \frac{AB}{2}}:(2)$ (και παράλληλο δεν με ενδιαφέρει). Από (1) και (2) προκύπτει ότι: $\boxed{H_1M_3 = M_1M_2}:(3)$. Ομοίως στο τρίγωνο ΑΒΓ το τμήμα M_2M_3 συνδέει τα μέσα των πλευρών του ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα οπότε ισχύει: $M_2M_3 // B\Gamma \Rightarrow M_2M_3 // H_1M_1$ οπότε το τετράπλευρο $M_3H_1M_1M_2$ είναι ισοσκελές τραπέζιο άρα εγγράψιμο σε κύκλο (έστω c το όνομα αυτού), δηλαδή ο κύκλος ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών βρίσκονται (ομοίως και τα άλλα δύο ίχνη των υψών) τα ίχνη των υψών. Επίσης :

$$\overset{\Delta}{AH\Gamma}:\begin{cases} A' \text{ το μέσο της } AH \\ M_2 \text{το μέσο της } AH \end{cases} \Rightarrow \boxed{A'M_2 // \Gamma H_3}:(4) \text{ και } \overset{\Delta}{AB\Gamma}:\begin{cases} M_1 \text{ το μέσο της } B\Gamma \\ M_2 \text{ το μέσο της } A\Gamma \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_1M_2 // AB}:(5).$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) οι γωνίες $\widehat{M_1M_2M_3} \overset{\text{παράλληλες πλευρές}}{=} \widehat{\Gamma H_3 A} \overset{\widehat{\Gamma H_3 A}=90^0}{\Rightarrow} \boxed{\widehat{M_1M_2M_3} = 90^0}$. Επομένως το τετράπλευρο $M_2H_1A'M_1$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο (στον ίδιο φυσικά κύκλο c αφού έχει τρία κοινά σημεία με αυτόν τα H_1, M_1, M_2) αφού $\widehat{M_1M_2M_3} + \widehat{\Gamma H_1 A'} = 90^0 + 90^0 = 180^0$. Άρα και τα μέσα των αποστάσεων των κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ από το ορθόκεντρο βρίσκονται στον ίδιο κύκλο c.

Τελικά ο κύκλος c περιέχει και τα 9 αυτά σημεία και ονομάζεται κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler.

13 Ιουνίου 2011

Στάθης Κούτρας