

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΘΕΜΑ 1°

A. Να δοθούν οι ορισμοί:

- i. η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω η είναι κυρτή
ii. οριζόντια ασύμπτωτη της c_f στο $+\infty$ (5μ)

B. ν.δ.ο

i. $(x^v)' = v \cdot x^{v-1} \quad v \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

- ii. αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ η f γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . (10μ)

Γ. Να απαντήσετε με Σ, Λ

- i. οι πολυωνυμικές συναρτήσεις δεν έχουν ασύμπτωτες
ii. τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων.
iii. αν $f'(x_0) = 0$ τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής πάντοτε.
iv. αν η f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$
v. αν η c_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. (10μ)

ΘΕΜΑ 2°

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

- i. ν.δ.ο η f συνεχής στο $x_0 = 0$
ii. ν.δ.ο. η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$
iii. να βρεθεί η $f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
iv. να βρεθεί το πρόσημο της $g(x) = xe^x - e^x + 1$
v. να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f (25μ)

ΘΕΜΑ 3^ο

A) $P(x)$ πολυώνυμο και $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $P(\alpha) \neq 0$

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{P(\alpha)}{12}x^4 + \frac{P(\beta)}{2}x^2 + P(\gamma)x + \delta$$

Αν η $f(x)=0$ έχει τρεις τουλάχιστον πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους τότε η $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[a, \beta]$ (7μ)

B) Έστω $f: (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 3x + 3] = 3 \text{ να βρεθεί η ασύμπτωτη στο } +\infty \text{ της } g(x) = f(x) - 2x \text{ (8μ)}$$

Γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1)=2$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \leq 2 \ln x + x^2 + 1$

i) ν.δ.ο. $f'(1) = 4$

ii) να βρεθούν τα α, β ώστε η εφαπτόμενη της c_f στο $x_0=1$ να εφάπτεται της $g(x) = f(x+1) + x^2 + \alpha x + \beta$ στο $x_0=0$ (10μ)

ΘΕΜΑ 4^ο

A) Έστω f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει

$$1 + f(x) + f^3(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

i) να βρεθεί το $f(0)$

ii) να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x - \eta \mu x}$ (8μ)

B) $f(x) = x \ln x, \quad x > 0$

i) ν.δ.ο. η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

ii) να βρεθεί η εφαπτομένη της c_f στο $A(1, 0)$

iii) ν.δ.ο. $\frac{\ln x}{x} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$ (12μ)

Γ) Αν f, g παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} για τις οποίες ισχύει

$$g'(x) = f'(x) + \eta \mu^2 x + e^x + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ν.δ.ο.

$$g(1821) + f(1453) > f(1821) + g(1453) \quad (5\mu)$$