



FIGURE 2.3.6 The brachistochrone.

Έστω $P(0,0)$ και σημείο $Q(x_0,y_0)$ όπως στο σχήμα. Θεωρήστε ότι η καμπύλη της $y=y(x)$ είναι αυτή πάνω στην οποία η κύλιση ενός σημείου από το P στο Q γίνεται στον ελάχιστο χρόνο.

(Το σχήμα από το [B-D], παρατηρήστε τον προσανατολισμό του άξονα των y)

Ισχύει ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την ΔΕ:

$$(1 + y'^2)y = k^2, \quad (k \text{ κατάλληλη σταθερά}) \quad (*)$$

1. Λύστε την εξίσωση ως προς y' .
2. Θέτοντας : $y = k^2 \sin^2 t$, δείξτε ότι η λύση με την θετική ρίζα παίρνει την μορφή : $2k^2 \sin^2 t dt = dx$.
3. Αν $\theta = 2t$ δείξτε η ότι παραπάνω εξίσωση έχει τις (παραμετρικές) λύσεις : $x = k^2 \frac{\theta - \sin \theta}{2}$ και : $y = k^2 \frac{1 - \cos \theta}{2}$
(δεδομένου ότι $x = 0$ όταν $y = 0$).
4. Βρείτε το k αν $x_0 = 1$ και $y_0 = 2$.