Δευτέρα, 19. Ιουλίου 2021

Πρόβλημα 1. ’Εστω $n \geqslant 100$ ένας ακέραιος. Ο Ιβάν γράφει τους αριθμούς $n, n+1, \ldots, 2n$ καθέναν σε διαφορετική κάρτα. Μετά ανακατεύει αυτές τις $n+1$ κάρτες και τις χωρίζει σε δύο στοίβες. Να αποδείξετε ότι μία τουλάχιστον από τις στοίβες περιέχει δύο κάρτες τέτοιες ώστε το άθροισμα των αριθμών τους να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 2. Να αποδείξετε ότι η ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x_1, \ldots, x_n$.

Πρόβλημα 3. Έστω D ένα εσωτερικό σημείο του οξυγώνιου τριγώνου ABC με $AB > AC$ έτσι ώστε $\angle DAB = \angle CAD$. Το σημείο E του τμήματος AC ικανοποιεί την ισότητα $\angle ADE = \angle BCD$, το σημείο F του τμήματος AB ικανοποιεί την ισότητα $\angle FDA = \angle DBC$ και το σημείο X της ευθείας AC ικανοποιεί την ισότητα $CX = BX$. Έστω O_1 και O_2 τα περίκεντρα των τριγώνων ADC και EXD, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες BC, EF, και O_1O_2 περνούν από το ίδιο σημείο.

Τρίτη, 20. Ιουλίου 2021

Πρόβλημα 4. Έστω Γ ένας κύκλος με κέντρο I και $ABCD$ ένα κυρτό τετράπλευρο τέτοιο ώστε καθένα από τα τμήματα AB, BC, CD και DA εφάπτεται του κύκλου Γ. Έστω Ω ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AIC. Η προέκταση του τμήματος BA προς το μέρος του A τέμνει τον κύκλο Ω στο σημείο X και η προέκταση του τμήματος BC προς το μέρος του C τέμνει τον κύκλο Ω στο σημείο Z. Οι προεκτάσεις των τμημάτων AD και CD προς το μέρος του D τέμνουν τον κύκλο Ω στα σημεία Y και T, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Πρόβλημα 5. Δύο σκίουροι, ο Μπάσυ και ο Τζάμπυ, έχουν συλλέξει 2021 καρύδια για τον χειμώνα. Ο Τζάμπυ αριθμεί τα καρύδια από το 1 μέχρι το 2021 και σκάβει 2021 μικρές τρύπες κυκλικά στο έδαφος γύρω από το αγαπημένο τους δέντρο. Το επόμενο πρωινό ο Τζάμπυ παρατηρεί ότι ο Μπάσυ είχε τοποθετήσει ένα καρύδι μέσα σε κάθε τρύπα, αλλά δεν είχε προσέξει την αρίθμηση. Δυσαρεστημένος ο Τζάμπυ, αποφασίζει να αναδιατάξει τα καρύδια κάνοντας μια ακολουθία 2021 κινήσεων. Στην k-στη κίνηση, ο Τζάμπυ ανταλλάσσει τις θέσεις των δύο καρυδιών που είναι γειτονικά στο καρύδι με αριθμό k. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τιμή του k τέτοια ώστε, στην k-στη κίνηση, ο Τζάμπυ ανταλλάσσει κάποια καρύδια a και b τέτοια ώστε $a < k < b$.

Πρόβλημα 6. Έστω $m \geqslant 2$ ένας ακέραιος, A ένα πεπερασμένο σύνολο ακεραίων (όχι κατ' ανάγκη θετικών) και $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ υποσύνολα του A. Υποθέτουμε ότι για κάθε $k = 1, 2, \ldots, m$ το άθροισμα των στοιχείων του B_k είναι m^k. Να αποδείξετε ότι το σύνολο A περιέχει τουλάχιστον $m/2$ στοιχεία.

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες