ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Σαββάλας ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Χαράλαμπος Στεργίου
Τηλ.: 22210 89752, 6979 382042
e-mail: stergiu@otenet.gr

Σελίδες: 576 Σχήμα: 17×24
ISBN: 978-960-493-838-4 Κ.Α.: 39024

Σαββάλας ΕΚΔΟΣΕΙΣ

Ζωοδ. Πηγής 18, Αθήνα 106 81
Τηλ.: 210 33 01 251 Fax: 210 33 06 918
http://www.savalas.gr e-mail: *info@savalas.gr*

Σχεδίαση εξωφύλλου: Κοσμάς Αρβανίτης

Στην κόρη μου Μαρία-Άννα που ξεκινάει ως φοιτήτρια
τον όμορφο δρόμο των μαθηματικών σπουδών!

Φίλε μαθητή!

Αυτή η στιγμή που κρατάς στα χέρια σου τούτο το βιβλίο μπορεί να είναι ένας σταθμός για τα μαθητικά σου χρόνια. Κάθισε σε μια γωνιά και διάβασε με προσοχή, αργά και ήρεμα, όσα γράφονται σ' αυτόν τον πρόλογο.

Λοιπόν, είσαι στην Α΄ Γυμνασίου, είσαι καλός μαθητής και –το σπουδαιότερο– σου αρέσουν τα μαθηματικά. Κάνεις ήδη όνειρα για το μέλλον. Το ίδιο και οι γονείς σου που βλέπουν ότι έχεις δυνατότητες. Θέλεις ίσως να γίνεις ένας εξαιρετικός επιστήμονας, μηχανικός, γιατρός, οικονομολόγος, στρατιωτικός, μαθηματικός ή φυσικός. Πιθανόν να θέλεις να γίνεις ερευνητής, να κάνεις σπουδές στο εξωτερικό και να διδάξεις σε μεγάλα πανεπιστήμια του κόσμου.

Ίσως όμως, απλά, να σου αρέσουν τα μαθηματικά και να θέλεις να περνάς δημιουργικά την ώρα σου, ξεφυλλίζοντας με ευχαρίστηση το απόγευμα ή τα Σαββατοκύριακα ένα βιβλίο με όμορφα μαθηματικά προβλήματα, να λύνεις γρίφους ή σπαζοκεφαλιές και να ακονίζεις το μυαλό σου.

Ίσως πάλι να σου είπαν στο σχολείο ότι γίνεται κάποιος ωραίος διαγωνισμός στα μαθηματικά και εσύ, κουβεντιάζοντας με τους φίλους σου ή τους γονείς σου, αποφάσισες να πάρεις μέρος για να μετρήσεις τις δυνάμεις σου. Θέλεις όμως στο χρονικό διάστημα που απομένει μέχρι τη μέρα του διαγωνισμού να ρίξεις μια ματιά και να μάθεις τι είναι αυτός ο διαγωνισμός, πώς περίπου είναι τα θέματα, να δεις ορισμένα από αυτά με τις λύσεις τους και να φρεσκάρεις κάποιες από τις γνώσεις σου ή να τις βελτιώσεις ή να τις εμπλουτίσεις.

Σε όποια κατηγορία και να ανήκεις, το βιβλίο που έχεις μπροστά σου θα σου προσφέρει σημαντική βοήθεια και ευχάριστες στιγμές. Περιέχει μεγάλο πλήθος από προβλήματα και παρατηρήσεις, χωρισμένα σε μεγάλες ενότητες, άλλα με τις λύσεις τους και άλλα για εξάσκηση (όλα όμως λυμένα στο τέλος του βιβλίου!). Τα περισσότερα από αυτά τα προβλήματα έχουν δοθεί σε διαγωνισμούς στην Ευρώπη, στην Αμερική ή στην Αυστραλία και σε παιδιά πάνω – κάτω της ηλικίας σου. Είναι ωραία προβλήματα, άλλα απλά και έξυπνα, άλλα πιο δύσκολα που διαφέρουν όμως από αυτά που συναντάς στο σχολείο. Διεγείρουν το ενδιαφέρον, τη φαντασία και σε κάνουν να περνάς ένα ολόκληρο απόγευμα σκυμμένος πάνω στο χαρτί, να περνούν οι ώρες και συ να μην λες να … ξεκολλήσεις!

Μπορείς να χρησιμοποιείς το βιβλίο αυτό, όπως εσύ νομίζεις: άλλοτε να διαβάζεις τα λυμένα θέματα, άλλοτε να παίρνεις χαρτί και να προσπαθείς μόνος σου, άλλοτε να λύνεις παρέα με τους φίλους σου, άλλοτε να μοιράζεσαι την προσπάθεια και τη χαρά με τους γονείς σου. Δεν είναι απαραίτητο να το λύσεις όλο! Αυτό είναι σχεδόν αδύνατο. Μπορείς όμως να λύσεις ένα μεγάλο μέρος στις διακοπές των Χριστουγέννων, του Πάσχα ή στις καλοκαιρινές σου διακοπές.

Α! Πρέπει να σου τονίσω ότι το βιβλίο αυτό δεν είναι εύκολο! «Καθετί ωραίο είναι σπάνιο και δύσκολο» έλεγε ένας σοφός. Έτσι είναι! Όμως ποτέ να μην απογοητευτείς! Ακόμα κι αν κάποιο πρόβλημα δεν μπορέσεις να το λύσεις ή δεν καταλάβεις τη λύση του, μην εγκαταλείψεις. Πρέπει να επιμείνεις. Ρώτα το δάσκαλό σου ή κάποιον που νομίζεις ότι μπορεί να σου απαντήσει. Προχώρα αν θέλεις σε άλλο πρόβλημα. Γύρνα πάλι πίσω και πάρε ένα πιο απλό. Ένας μεγάλος μαθηματικός έλεγε: «Αν δεν μπορείς να λύσεις κάποιο πρόβλημα, υπάρχει κάποιο ευκολότερο που δεν έχει λύση. Βρες το!» Αυτή την παραίνεση να μην την ξεχνάς ποτέ. Όσο περισσότερο ασχολείσαι, τόσο ευκολότερες θα σου φαίνονται οι ασκήσεις. Στο τέλος της χρονιάς θα κοιτάζεις τις ασκήσεις που στην αρχή σε δυσκόλεψαν και θα λες: «Μα αυτή ήταν πολύ εύκολη! Γιατί δεν μπορούσα τότε να τη λύσω;» Η αλήθεια όμως είναι ότι η άσκηση δεν ήταν και τόσο εύκολη, αλλά ότι εσύ έγινες καλύτερος. Κι όταν αρχίσεις να το νιώθεις αυτό, τότε αυτό το βιβλίο θα έχει πετύχει τον σκοπό του. Κι εγώ θα μπορώ να σε κοιτάξω νοερά και να χαμογελώ από ικανοποίηση που έγινες κιόλας ένας μικρός, ανήσυχος μαθηματικός! Ένας μικρός Αϊνστάιν!

Αυτό το βιβλίο είναι αποτέλεσμα πολύχρονης προσπάθειας και αναζήτησης. Αναμφίβολα διαφέρει από άλλα βιβλία που έχεις συναντήσει μέχρι τώρα. Όμως και συ είσαι ένα ξεχωριστό παιδί, όχι γιατί θέλεις να ξεχωρίζεις, αλλά γιατί αγαπάς τη θετική σκέψη και τη μαθηματική δημιουργία. Πρέπει όμως τώρα που το βιβλίο έχει τελειώσει να μην ξεχάσουμε να πούμε μια απλή λέξη, ένα ευχαριστώ, σε όσους έχουν με οποιοδήποτε τρόπο βοηθήσει για τη δημιουργία του.

Θα ήθελα λοιπόν να ευχαριστήσω τη Γιάννα Στεργίου, τον Χρήστο Νάκη, τον Τάκη Χρονόπουλο, τον Δημήτρη Γιαννόπουλο, καθώς και την πολύ καλή φίλη και συνάδελφο Μυρτώ Λιάπη που επιμελήθηκε με εξαιρετικό ζήλο το βιβλίο αυτό.

Ο συγγραφέας

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Α. Γιατί γίνονται μαθηματικοί διαγωνισμοί

Σε όλον τον κόσμο και ειδικότερα στις αναπτυγμένες χώρες γίνονται πολλοί μαθηματικοί διαγωνισμοί και μάλιστα σε όλες τις βαθμίδες. Οι περισσότεροι διαγωνισμοί ξεκινάνε από την Ε΄ και την ΣΤ΄ τάξη του Δημοτικού.

Στην ηλικία αυτή οι μαθητές έχουν ήδη γνωρίσει ένα σημαντικό κομμάτι από τις μαθηματικές έννοιες και έχουν μάθει να χρησιμοποιούν στην καθημερινή τους ζωή πολλά πράγματα, από αυτά που ονομάζουμε μαθηματικά. Ξέρουν για παράδειγμα να βρίσκουν την περίμετρο και το εμβαδόν της αυλής του σπιτιού τους ή του σχολείου τους, γνωρίζουν να χρησιμοποιούν τις μονάδες βάρους και χρόνου, να εκτελούν σύνθετους λογαριασμός με το ευρώ και τις υποδιαιρέσεις του, να προγραμματίζουν με τους γονείς τους τα έξοδα των διακοπών και να υπολογίζουν πόσα χιλιόμετρα είναι το μήκος μιας διαδρομής που θα κάνουν το Σαββατοκύριακο. Με άλλα λόγια τα παιδιά στην ηλικία των 11 – 12 χρονών είναι ικανά να σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο, αυτόματα βέβαια, αλλά και να κάνουν πολύπλοκους σχετικά συλλογισμούς που οι μεγαλύτεροι δυσκολεύονται να κάνουν.

Η μεγάλη τεχνολογική ανάπτυξη και το γεγονός ότι η ανάπτυξη αυτή γεννήθηκε και συντηρείται από ανθρώπους που γνωρίζουν μαθηματικά, είτε είναι μηχανικοί, είτε επιστήμονες, είτε στρατιωτικοί είτε οικονομολόγοι καθιστά ακόμη μεγαλύτερη την ανάγκη να εντοπίσουμε από μικρή ακόμα ηλικία τα παιδιά που δείχνουν έφεση στα μαθηματικά και να τα ενισχύσουμε αρκετά με ειδικά μαθήματα ή να τα εντάξουμε σε μαθηματικά σχολεία, ώστε να αξιοποιήσουν στο μέγιστο την κλίση τους αυτή. Ο καλύτερος τρόπος για τον εντοπισμό αυτών των μαθητών, είναι η διεξαγωγή τοπικών, περιφερειακών ή εθνικών μαθηματικών διαγωνισμών. Με τη συμμετοχή τους σε αυτούς τους διαγωνισμούς πολλοί μαθητές είτε ανακαλύπτουν το ταλέντο τους, είτε γοητεύονται από τη μορφή των προβλημάτων και αλλάζουν στάση απέναντι στα μαθηματικά και στη γνώση γενικότερα. Από αυτή τη σκοπιά οι διαγωνισμοί προβάλλουν τα μαθηματικά σε πλατιά στρώματα του πληθυσμού και συνεισφέρουν στο να αποβάλλουν ενήλικες και παιδιά το φόβο για τα μαθηματικά, ο οποίος κατέχει το μεγαλύτερο ποσοστό των ανθρώπων.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, η προσφορά των διαγωνισμών στην καλλιέργεια μαθηματικής παιδείας είναι πολύτιμη και αναντικατάστατη. Η κοινωνία, με τον ορθολογισμό και την κριτική σκέψη που καλλιεργούν τα μαθηματικά, μπορεί να επιλύσει καλύτερα τα πολυσύνθετα προβλήματα που καθημερινά ανακύπτουν σε κάθε τομέα του επιστημονικού και κοινωνικού στίβου.

Β. Το πνεύμα των … προβλημάτων

Στους μαθηματικούς διαγωνισμούς δεν ελέγχεται τόσο η ποσότητα των γνώσεων αλλά η ποιότητά τους. Αυτό σημαίνει ότι για τη λύση των προβλημάτων δεν απαιτούνται πολλές γνώσεις αλλά καλός συνδυασμός απλών πράξεων και έξυπνη εφαρμογή των πιο στοιχειωδών γνώσεων. Φυσικά, μέσα στις 20 έως 30 ερωτήσεις του φύλλου ερωτήσεων, σίγουρα υπάρχουν και αρκετές ερωτήσεις που είναι απλές και εξετάζουν αν ο μαθητής κατέχει τις τελείως απαραίτητες γνώσεις, όπως για παράδειγμα η εκτέλεση πράξεων, ο υπολογισμός εμβαδού βασικών σχημάτων, ο χειρισμός και η μετατροπή των μονάδων χρόνου, μήκους, μάζας, επιφάνειας κ.λπ. Οι τελευταίες όμως ασκήσεις σε κάθε διαγωνισμό έχουν αυτό που λέμε ολυμπιακό πνεύμα και διεγείρουν τη φαντασία των μαθητών. Οι ερωτήσεις αυτές συγκεντρώνουν και τις περισσότερες μονάδες και έτσι οι μαθητές που τις απαντούν είναι εκείνοι που παίρνουν τις διακρίσεις.

Δίνουμε παρακάτω ορισμένα προβλήματα που έχουν τεθεί συχνά σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Μελετώντας τα θα αντιληφθείτε αμέσως ότι αυτά διαφέρουν αρκετά από τα συνηθισμένα προβλήματα της σχολικής τάξης. Περισσότερα όμως τέτοια προβλήματα, και μάλιστα αρκετά από αυτά με τις λύσεις τους θα βρείτε στην ενότητα 10 του βιβλίου.

Πρόβλημα 1ο

Στο διπλανό διάγραμμα βλέπετε έναν πίνακα που δείχνει τις χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ των πόλεων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Η και οι οποίες βρίσκονται με αυτή τη σειρά κατά μήκος της εθνικής οδού. Στον πίνακα αυτόν βλέπετε ήδη ορισμένες αποστάσεις. Για παράδειγμα ο αριθμός 23 δείχνει ότι οι πόλεις Α και Δ απέχουν 23 χιλιόμετρα, αφού πάνω από τον αριθμό 23 βρίσκεται η πόλη Α και δεξιά από το 23 βρίσκεται η πόλη Δ. Ο αριθμός 30 δείχνει ότι οι πόλεις Β και Ε απέχουν 30 χιλιόμετρα. Να βρεθεί η απόσταση ΕΖ των πόλεων Ε και Ζ.

Α						
	Β					
		Γ				
23			Δ			
	30			Ε		
58		40			Ζ	
	68		53			Η

(Αγγλία)

ΛΥΣΗ

Υπάρχουν πολλοί τρόποι. Ένας από αυτούς είναι ο εξής:

Να παρατηρήσουμε ότι:

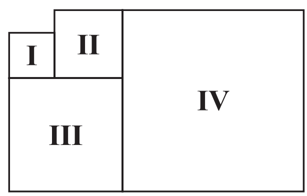
- $A\Gamma = AZ - \Gamma Z = 58 - 40 = 18$
- $B\Delta = BH - \Delta H = 68 - 53 = 15$
- $\Delta E = BE - B\Delta = 30 - 15 = 15$
- $\Delta Z = AZ - A\Delta = 58 - 23 = 35$
- $EZ = \Delta Z - \Delta E = 35 - 15 = 20$

Σχόλιο

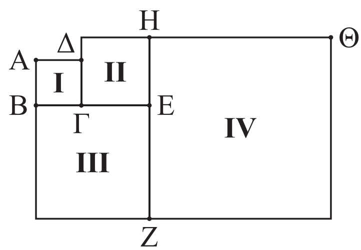
Προτείνουμε να συμπληρώσετε τον πίνακα με όλες τις αποστάσεις.

Πρόβλημα 2ο

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο I έχει περίμετρο 16 και το τετράγωνο II έχει περίμετρο 24. Πόση είναι η περίμετρος του τετραγώνου IV;



ΛΥΣΗ



Αφού το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 16, η κάθε πλευρά του, είναι $16 : 4 = 4$. Είναι δηλαδή:

$$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = 4$$

Όμοια, αφού η περίμετρος του τετραγώνου II είναι 24, η κάθε πλευρά του θα είναι $24 : 4 = 6$. Είναι δηλαδή:

$$\Gamma E = 6$$

Αφού $\Gamma E = 6$ και $\Gamma B = 4$, θα είναι $BE = 6 + 4 = 10$.

Επομένως:

$$EZ = EB = 10 \text{ και } HZ = HE + EZ = 6 + 10 = 16.$$

Η περίμετρος λοιπόν του τετραγώνου IV είναι $4 \cdot 16 = 64$.

(Από το διαγωνισμό «Math Kangarro».)

Πρόβλημα 3ο

Ο μέγας ταχυδακτυλουργός έχει στο καπέλο του 14 γκρι, 8 άσπρα και 6 μαύρα ποντίκια! Πόσα τουλάχιστον ποντίκια πρέπει να βγάλει στην τύχη από το καπέλο, ώστε να είναι απόλυτα σίγουρος ότι έχει βγάλει ένα τουλάχιστον ποντίκι από το κάθε χρώμα;

ΛΥΣΗ

Σκεφτόμαστε ως εξής: Με 14 ποντίκια δεν μπορεί να είναι σίγουρος, διότι όλα αυτά μπορεί να είναι γκρι.

Αν βγάλει $14 + 1 = 15$, τότε θα έχει σίγουρα δύο ποντίκια με διαφορετικό χρώμα.

Αν βγάλει μέχρι $14 + 8 = 22$, τότε σίγουρα δύο τουλάχιστον έχουν διαφορετικό χρώμα, αλλά δεν είναι σίγουρος ότι θα έχει και από τα τρία χρώματα (διότι μπορεί να υπάρχουν σε αυτά 14 γκρι και 8 άσπρα).

Αν όμως βγάλει 23 ποντίκια, τότε σίγουρα θα έχει ένα τουλάχιστον ποντίκι από το κάθε χρώμα.

(Από τον διαγωνισμό Kangaroo, 2002.)

Πρόβλημα 4ο

Σε μια τάξη της ΣΤ΄ ο δάσκαλος έπαιξε με τα παιδιά το εξής παιχνίδι: Εκείνος φώναζε αργά τους αριθμούς 1, 2, 3, , 99, 100 και οι μαθητές χτυπούσαν μια φορά παλαμάκια (ένα χτύπημα), όταν ο αριθμός που άκουγαν ήταν πολλαπλάσιο του 3 ή τελείωνε σε 3. Πόσες φορές χτύπησε παλαμάκια ο Λεωνίδας, αν δεν έκανε ούτε ένα λάθος στο παιχνίδι αυτό;

ΛΥΣΗ

Επειδή η διαίρεση $100 : 3$ δίνει πηλίκο 33, τα πολλαπλάσια του 3 που είναι ανάμεσα στο 1 και το 100 είναι 33. Σίγουρα λοιπόν θα γίνουν 33 παλαμάκια για τα πολλαπλάσια του 3.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 33 \\ 1 & \end{array}$$

Οι αριθμοί που τελειώνουν σε 3 είναι οι:

$$3,\ 13,\ 23,\ 33,\ 43,\ 53,\ 63,\ 73,\ 83,\ 93$$

Από αυτούς όμως οι αριθμοί 3, 33, 63, 93 είναι ήδη πολλαπλάσια του 3 και δεν πρέπει να τους ξαναμετρήσουμε.

Άρα θα ακουστούν ακόμα $10 - 4 = 6$ παλαμάκια.

Συνολικά λοιπόν ο Λεωνίδας χτύπησε:

$$33 + 6 = 39 \text{ φορές παλαμάκια}$$

Πρόβλημα 5ο

Ένα τετράγωνο λέγεται μαγικό, αν το άθροισμα των τριών αριθμών κάθε γραμμής, στήλης ή διαγωνίου είναι το ίδιο. Να βρεθεί ο αριθμός που λείπει από το κουτάκι με το γράμμα Χ, ώστε το τετράγωνο αυτό να είναι μαγικό.

Χ		
	10	12
9		7

ΛΥΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι το πρώτο κουτάκι της 2ης γραμμής έχει τον άγνωστο αριθμό α. Αφού το άθροισμα των αριθμών της πρώτης στήλης και το άθροισμα των αριθμών της 1ης διαγωνίου είναι το ίδιο, πρέπει:

Χ		
α	10	12
9		7

$$X + \alpha + 9 = X + 10 + 7$$

Η ισότητα αυτή μας δίνει $\alpha + 9 = 17$, διότι ο αριθμός Χ που βρίσκεται και στα δύο μέλη διαγράφεται. Επομένως:

$$\alpha + 9 = 17 \quad \text{ή} \quad \alpha = 17 - 9 \quad \text{ή} \quad \alpha = 8$$

Αφού λοιπόν $\alpha = 8$, το άθροισμα των στοιχείων της 2ης γραμμής είναι:

Χ		
8	10	12
9		7

$$8 + 10 + 12 = 30$$

Από την πρώτη στήλη και αφού $8 + 9 = 17$, συμπεραίνουμε ότι:

$$X = 30 - 17 = 13$$

Σχόλιο

Μπορούμε να συμπληρώσουμε εύκολα όλα τα κουτάκια. Προκύπτει τότε το διπλανό μαγικό τετράγωνο με μαγικό αριθμό το 30.

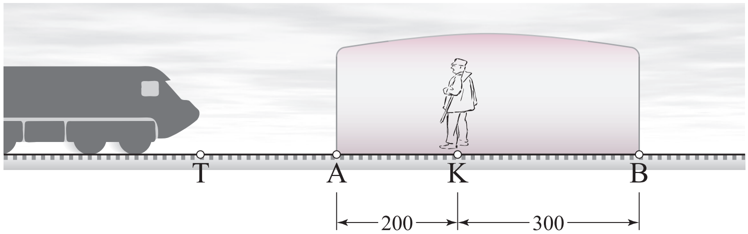
13	6	11
8	10	12
9	14	7

Πρόβλημα 6ο

Ένας κυνηγός διασχίζει ένα τούνελ. Ενώ βρίσκεται στα $\frac{2}{5}$ του τούνελ ακούει πίσω του να έρχεται ένα τραίνο με ταχύτητα 60 χιλιόμετρα την ώρα. Αν ο κυνηγός προχωρήσει μπροστά ή γυρίσει πίσω, μόλις που προλαβαίνει το τραίνο στην έξοδο ή την είσοδο του τούνελ αντίστοιχα. Με ποια ταχύτητα βαδίζει ο κυνηγός;

ΛΥΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι το μήκος του τούνελ είναι 500 μέτρα.



Τη στιγμή που ο κυνηγός έχει διασχίσει τα $\frac{2}{5}$ του τούνελ, θα έχει απομακρυνθεί:

$$\frac{2}{5}500 = 200 \text{ μέτρα}$$

από την είσοδο Α του τούνελ και θα χρειάζεται ακόμα:

$$500 - 200 = 300 \text{ μέτρα}$$

μέχρι να φτάσει στην έξοδο Β.

- Αν ο κυνηγός, ακούγοντας το τρένο να σφυρίζει, γυρίσει προς την είσοδο Α του τούνελ, μόλις που προλαβαίνει το τρένο. Αυτό σημαίνει ότι όταν το τρένο Τ διανύει την απόσταση ΤΑ, τότε ο κυνηγός διανύει την απόσταση ΚΑ, δηλαδή 200 μέτρα.

- Ας πάρουμε τώρα την περίπτωση που ο κυνηγός κινείται προς το Β. Όπως είδαμε στην προηγούμενη περίπτωση, μέχρι να φτάσει το τρένο Τ στην είσοδο Α, ο κυνηγός μπορεί να περπατήσει 200 μέτρα. Άρα τη στιγμή ακριβώς που το τρένο βρίσκεται στην είσοδο του τούνελ, ο κυνηγός απέχει από την έξοδο Β:

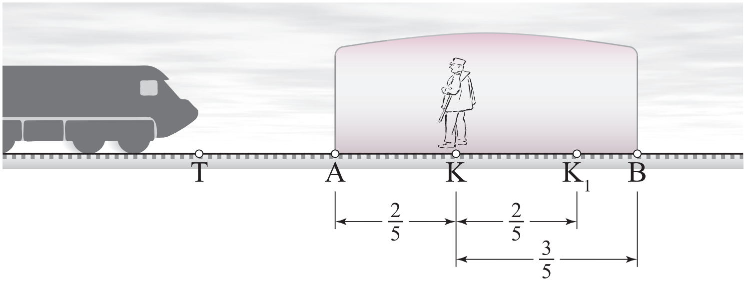
$$300 - 200 = 100 \text{ μέτρα}$$

Αλλά ο κυνηγός και το τρένο θα βγουν την ίδια στιγμή από το τούνελ. Επομένως, στο χρόνο που χρειάζεται ο κυνηγός για να διανύσει τα 100 μέτρα, το τρένο θα διασχίσει όλο το τούνελ, δηλαδή 500 μέτρα. Αυτό σημαίνει ότι το τρένο έχει πενταπλάσια ταχύτητα από τον κυνηγό $(500 : 100 = 5)$. Αφού το τραίνο τρέχει με ταχύτητα 60 χιλιόμετρα την ώρα, ο κυνηγός τρέχει με ταχύτητα $60 : 5 = 12$ χιλιόμετρα την ώρα.

Σχόλιο

Με τους παραπάνω συλλογισμούς μπορούμε να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, χωρίς την υπόθεση ότι το μήκος του τούνελ είναι 500 m. Την υπόθεση αυτή την κάναμε για να προσεγγίσουμε καλύτερα το πρόβλημα.

Είδαμε ότι μέχρι να φτάσει το τρένο στο Α, ο κυνηγός διανύει απόσταση $\frac{2}{5}$ του τούνελ. Έτσι, όταν ο κυνηγός τρέχει προς το Β και το τρένο φτάνει στο Α, αυτός έχει διανύσει την απόσταση $KK_1 = \frac{2}{5}$ του τούνελ.



Μένει λοιπόν να διανύσει ακόμα την απόσταση K_1B που είναι $K_1B = KB - KK_1$, δηλαδή:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \text{ του τούνελ}$$

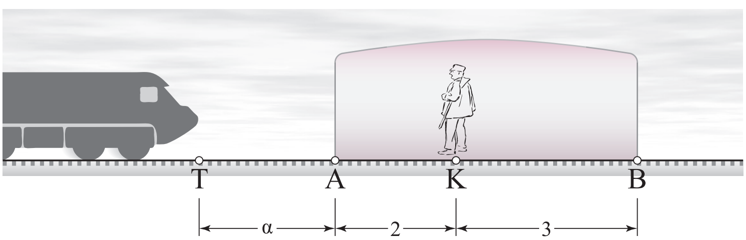
Επομένως, το χρόνο που θέλει ο κυνηγός για να διανύσει το $\frac{1}{5}$ του τούνελ, χρειάζεται το τραίνο για να διανύσει όλο το τούνελ, δηλαδή τα $\frac{5}{5}$.

Άρα το τραίνο κινείται με πενταπλάσια ταχύτητα από τον κυνηγό και αφού το τραίνο τρέχει με ταχύτητα 60, ο κυνηγός τρέχει με ταχύτητα $60 : 5 = 12$ χιλιόμετρα την ώρα.

Άλλος τρόπος

Ας δούμε και μια λύση με χρήση μεταβλητών.

Αφού δεν δίνεται το μήκος του τούνελ, ας υποθέσουμε ότι αυτό είναι 5 χιλιόμετρα και ότι ο κυνηγός έχει διανύσει ήδη 2 χιλιόμετρα (στο σχήμα ο κυνηγός βρίσκεται στο σημείο Κ).



Ονομάζουμε Χ την ταχύτητα του κυνηγού και α την απόσταση του τραίνου Τ από την είσοδο Α. Τα ποσά απόσταση και ταχύτητα είναι ανάλογα.

- Έστω ότι ο κυνηγός πάει προς την έξοδο Β. Τότε αυτός θα διανύσει 3 χιλιόμετρα και το τραίνο $\alpha + 5$, οπότε πρέπει:

$$\frac{3}{x} = \frac{\alpha + 5}{60} \quad \text{ή} \quad x(\alpha + 5) = 3 \cdot 60 \quad \text{ή} \quad \alpha x + 5x = 180 \qquad (1)$$

- Έστω ότι ο κυνηγός γυρίζει προς την είσοδο Α του τούνελ. Τότε ο κυνηγός θα διανύσει 2 χιλιόμετρα και το τραίνο α χιλιόμετρα. Πρέπει επομένως:

$$\frac{x}{2} = \frac{60}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \alpha x = 120 \qquad (2)$$

Επειδή $\alpha x = 120$ η ισότητα (1) γίνεται:

$$120 + 5x = 180 \quad \text{ή} \quad 5x = 180 - 120 \quad \text{ή} \quad 5x = 60 \quad \text{ή}$$

$$x = 60 : 5 \quad \text{ή} \quad x = 12$$

Άρα ο κυνηγός βαδίζει με ταχύτητα 12 χιλιόμετρα την ώρα.

Πρόβλημα 7ο

Τρεις φοιτητές –ο Α, ο Β και ο Γ– παίζουν ένα παιχνίδι μαθηματικών γνώσεων με την εξής συμφωνία: Θα ξεκινήσει ο καθένας με ένα τυχαίο ποσό χρημάτων, όχι υποχρεωτικά ίδιο με το ποσό των άλλων. Όμως κάθε φορά, εκείνος που θα χάνει, θα διπλασιάζει τα χρήματα που έχουν μπροστά τους οι άλλοι δύο. Παίχτηκαν τρία παιχνίδια. Πρώτος έχασε ο Α, δεύτερος ο Β και τρίτος ο Γ. Στο τέλος βρέθηκαν όλοι να έχουν από 24 ευρώ. Πόσα χρήματα είχε ο καθένας στην αρχή του παιχνιδιού;

ΛΥΣΗ

Πρέπει να σκεφτούμε αντίστροφα, δηλαδή από το τέλος προς την αρχή. Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας. Πρώτα συμπληρώθηκε η 3η γραμμή, μετά η 2η και μετά η 1η.

	Α	Β	Γ
1ο	39	21	12
2ο	6	42	24
3ο	12	12	48
ΤΕΛΟΣ	24	24	24

Ας δούμε όλους τους συλλογισμούς.

- Στην αρχή του τρίτου παιχνιδιού οι Α, Β είχαν από $24 : 2 = 12$, οπότε αφού ο Γ διπλασίασε τα χρήματά τους πλήρωσε $12 + 12 = 24$ ευρώ. Άρα στην αρχή του 3ου παιχνιδιού είχε $24 + 24 = 48$ ευρώ.
- Στην αρχή του δεύτερου παιχνιδιού οι Α, Γ είχαν από:

$$12 : 2 = 6 \quad \text{και} \quad 48 : 2 = 24$$

  οπότε αφού ο Β διπλασίασε τα χρήματά τους πλήρωσε $6 + 24 = 30$ ευρώ. Άρα στην αρχή του 2ου παιχνιδιού είχε $30 + 12 = 42$ ευρώ.
- Στην αρχή του πρώτου παιχνιδιού οι Β, Γ είχαν από:

$$42 : 2 = 21 \quad \text{και} \quad 24 : 2 = 12$$

  οπότε αφού ο Α διπλασίασε τα χρήματά τους πλήρωσε $21 + 12 = 33$ ευρώ. Άρα στην αρχή του 1ου παιχνιδιού είχε $33 + 6 = 39$ ευρώ.

Πρόβλημα 8ο

Σε καθένα από τα εννέα μικρά τετράγωνα του διπλανού σχήματος θα μπει ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3 με τέτοιον τρόπο ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να περιέχει ένα «1», ένα «2» και ένα «3». Πόσο είναι το άθροισμα $M + N$;

		M
	2	N
1		

ΛΥΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι το πρώτο κουτάκι της 2ης γραμμής έχει τον αριθμό α. Θα υπολογίσουμε το α. Το α, αφού βρίσκεται στην 1η στήλη, δεν μπορεί να είναι ίσο με 1 διότι το 1 βρίσκεται ήδη στο 3ο κουτάκι της στήλης αυτής. Επίσης το α δεν μπορεί να είναι ίσο με 2, διότι το 2 βρίσκεται ήδη στην 2η γραμμή. Άρα $\alpha = 3$.

		M
α	2	N
1		

Αφού όμως $\alpha = 3$, το πρώτο κουτάκι της 1ης στήλης περιέχει τον αριθμό 2 (μια και οι αριθμοί 1, 3 έχουν ήδη τοποθετηθεί στην 1η στήλη).

Ο αριθμός Ν είναι επομένως ο 1 (διότι στην 2η γραμμή οι αριθμοί 3 και 2 έχουν ήδη τοποθετηθεί).

2		M
3	2	N=1
1		

Αφού $N = 1$, το Μ δεν μπορεί να είναι 1 αλλά ούτε και 2 (διότι η 1η γραμμή έχει ήδη το 2). Επομένως $M = 3$ και έτσι:

$$M + N = 3 + 1 = 4$$

Σχόλιο

Έχοντας ήδη βρει τους αριθμούς Μ και Ν, μπορούμε εύκολα να βρούμε όλους τους αριθμούς που λείπουν από τα υπόλοιπα κουτάκια.

2	1	3
3	2	1
1	3	2

Πρόβλημα 9ο

Μιάμιση γάτα τρώει ενάμιση ποντίκι σε μιάμιση ώρα.
Πόσα ποντίκια θα φάνε 15 γάτες σε 15 ώρες;

One cat and a half eats one mouse and a half in one hour and a half.
How many mice can 15 cats eat in 15 hours?
(Kangaroo)

ΛΥΣΗ

Το περίεργο αυτό ερώτημα ήταν θέμα 5 μονάδων, δηλαδή αυξημένης δυσκολίας.
Τα ποσά ποντίκια - ώρες είναι ανάλογα. Άρα:

- 1,5 γάτα τρώει 1,5 ποντίκι σε 1,5 ώρα
- 1,5 γάτα τρώει 1 ποντίκι σε 1 ώρα

Τα ποσά γάτες - ποντίκια είναι ανάλογα. Άρα:

- 1,5 γάτα τρώει 1 ποντίκι σε 1 ώρα
- $2 \cdot 1{,}5 = 3$ γάτες τρώνε $2 \cdot 1 = 2$ ποντίκια σε 1 ώρα
- Οι $5 \cdot 3 = 15$ γάτες τρώνε $5 \cdot 2 = 10$ ποντίκια σε 1 ώρα.
- Οι 15 γάτες τρώνε $10 \cdot 15 = 150$ ποντίκια σε $1 \cdot 15 = 15$ ώρες.

Άρα οι 15 γάτες σε 15 ώρες τρώνε 150 ποντίκια.

Πρόβλημα 10ο

Μια επιτροπή μουσικών βαθμολογεί τους διαγωνιζόμενους τραγουδιστές με ακέραιο βαθμό από 1 έως 10. Ένας διαγωνιζόμενος συγκέντρωσε μέση βαθμολογία 7,2. Πόσα τουλάχιστον μέλη έχει η επιτροπή αυτή;

ΛΥΣΗ

Από μια πρώτη ματιά το πρόβλημα αυτό δείχνει πολύ δύσκολο. Πώς θα μπορούσαμε άραγε από τη μέση βαθμολογία, δηλαδή από το μέσο όρο των βαθμών που έδωσαν τα μέλη στον τραγουδιστή, να βρούμε πόσα τουλάχιστον μέλη έχει η επιτροπή;

Η μέση βαθμολογία βρίσκεται όμως ως εξής:

$$\text{μέση βαθμολογία} = \frac{\text{άθροισμα όλων των βαθμών}}{\text{πλήθος των μελών}}$$

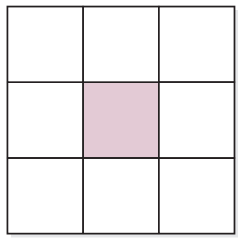
Η μέση βαθμολογία πρέπει λοιπόν να γραφεί ως κλάσμα, αφού το πλήθος των μελών είναι ο παρονομαστής του παραπάνω κλάσματος. Είναι:

$$7{,}2 = \frac{72}{10} = \frac{2 \cdot 36}{2 \cdot 5} = \frac{36}{5}$$

Το κλάσμα λοιπόν $\frac{36}{5}$, που δεν απλοποιείται περισσότερο, μας δίνει την απάντηση στο πρόβλημά μας: Η επιτροπή έχει τουλάχιστον 5 άτομα! Φυσικά, αν δεν έχει 5 μέλη, τότε θα έχει 10 ή 15 κ.λπ. Αλλά το ερώτημα ήταν να βρούμε το ελάχιστο πλήθος και έτσι η απάντηση 5 είναι πλήρως δικαιολογημένη.

Πρόβλημα 11ο

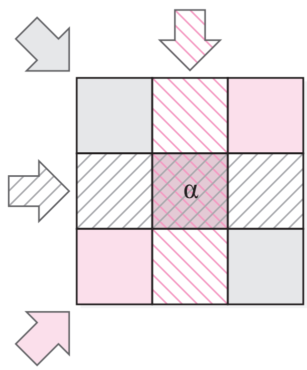
Στο διπλανό μαγικό τετράγωνο οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 θα μπουν στα εννέα κουτάκια έτσι, ώστε το άθροισμα των τριών αριθμών σε κάθε γραμμή, κάθε στήλη και κάθε διαγώνιο να είναι το ίδιο. Ποιος αριθμός θα μπει στο τετραγωνάκι που βρίσκεται στο κέντρο του τετραγώνου;



ΛΥΣΗ

Ας βάλουμε τον αριθμό α στο μεσαίο τετραγωνάκι. Επειδή $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ και το άθροισμα των τριών αριθμών κάθε γραμμής είναι το ίδιο, το άθροισμα αυτό θα είναι ίσο με:

$$45 : 3 = 15$$



Αν προσθέσουμε λοιπόν την μεσαία στήλη, τη μεσαία γραμμή και τις δύο διαγώνιες θα βρούμε άθροισμα:

$$4 \cdot 15 = 60$$

Αλλά προσθέτοντας τη μεσαία στήλη, τη μεσαία γραμμή και τις δύο διαγώνιες, έχουμε σχηματίσει το άθροισμα:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 3α = 45 + 3α$$

διότι το α το έχουμε πάρει 4 φορές και τη μία φορά από αυτές το κρατάμε έτσι, ώστε με τους άλλους 8 αριθμούς να σχηματίσουμε το άθροισμα $1 + 2 + 3 + \ldots + 9$. Πρέπει λοιπόν να είναι:

$$45 + 3α = 60 \quad ή \quad 3α = 60 - 45 \quad ή \quad 3α = 15, \quad οπότε \quad α = 15 : 3 = 5$$

Άρα ο αριθμός που θα μπει στο μεσαίο (κεντρικό) τετραγωνάκι είναι ο αριθμός 5. (Από τον αγγλικό διαγωνισμό Junior Mathematical Challenge, 2002.)

Γ. Διαγωνισμοί της ΕΜΕ

Μέχρι στιγμής δεν έχει καθιερωθεί αυστηρός πανελλαδικός διαγωνισμός από την ΕΜΕ (Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία) με κοινά θέματα για την Α΄ Γυμνασίου, με εξαίρεση τον νέο διαγωνισμό «Πυθαγόρας», άλλης όμως μορφής και δυσκολίας.

Υπάρχουν όμως μερικοί νομοί, στους οποίους τα τοπικά παραρτήματα της ΕΜΕ διοργανώνουν διαγωνισμό για τους μαθητές αυτούς. Τα θέματα στους διαγωνισμούς αυτούς επιλέγονται από τα αντίστοιχα παραρτήματα και παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Τέτοιοι διαγωνισμοί είναι οι εξής: Ν. Νικολάου (Καρδίτσα), Ε. Σταμάτης (Βοιωτία), Επιμενίδης (Ηράκλειο), αλλά και άλλοι.

Θεωρούμε ότι οι διαγωνισμοί της ΕΜΕ στο Γυμνάσιο, ανάμεσά τους και ο «Πυθαγόρας», θα αγαπηθούν και θα διαδοθούν ακόμα πιο πολύ, γιατί η σημασία τους στην καλλιέργεια της θετικής σκέψης και στην απόκτηση μαθηματικής παιδείας είναι μεγάλη. Αυτό όμως θα γίνει αν οι διαγωνισμοί αυτοί συνοδεύονται και από το κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό, όπως η έκδοση βιβλίων με θέμα τους διαγωνισμούς, η διοργάνωση ομιλιών στα σχολεία και γενικότερα η προβολή της αξίας των μαθηματικών στον σύγχρονο κόσμο.

Δ. Διαγωνισμός ΚΑΓΚΟΥΡΟ

Ο διεθνής διαγωνισμός «Καγκουρό» είναι ο μεγαλύτερος εκπαιδευτικός διασκεδαστικός διαγωνισμός στον κόσμο, με συμμετοχή 4 εκατομμυρίων μαθητών από 39 χώρες. Η ιδέα ξεκίνησε το 1993 όταν εκπρόσωποι από την Γαλλία, Ρωσία, Ουγγαρία, Λευκορωσία, Ολλανδία, Πολωνία, Ρουμανία και Ισπανία, με μεγάλη πείρα σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, αποφάσισαν να διοργανώσουν έναν διαγωνισμό ο οποίος θα απευθυνόταν σε όλους τους μαθητές και όχι μόνο σε εκείνους που έχουν ιδιαίτερη κλίση στα μαθηματικά. Η αρχή με την οποία κινήθηκαν ήταν η διαπίστωση ότι τα μαθηματικά είναι μία κουλτούρα η οποία πρέπει να παρέχεται σε όλους. Ειδικά, επειδή τα μαθηματικά καλλιεργούν την σκέψη και φέρνουν πνευματική ικανοποίηση, δεν πρέπει να απευθύνονται μόνο σε λίγους.

Ένα χρόνο αργότερα, το 1994, οι πρώτοι εκπρόσωποι ίδρυσαν τον Διεθνή Οργανισμό Kangourou Sans Frontières (Καγκουρό Χωρίς Σύνορα) με έδρα το Παρίσι. Ο βασικός στόχος του οργανισμού ήταν η προώθηση των μαθηματικών με διασκεδαστικό τρόπο, χωρίς φυλετικές ή κοινωνικές διακρίσεις. Συγχρόνως οργάνωσαν έναν μαθηματικό διαγωνισμό κατά τα πρότυπα ενός επιτυχημένου εθνικού διαγωνισμού στην Αυστραλία, με το όνομα Kangaroo (από όπου και το όνομα του νέου τότε Οργανισμού). Η Ελλάδα έγινε μέλος τον Οκτώβριο του 2006. Σήμερα είναι μέλη σχεδόν όλες οι Ευρωπαϊκές χώρες, οι ΗΠΑ, και χώρες της Ασίας και της Λατινικής Αμερικής.

Το Καγκουρό, όμως, δεν είναι μόνο ένας ετήσιος διαγωνισμός. Με αφορμή τον διαγωνισμό παράγεται ενδιαφέρον εκπαιδευτικό υλικό που προάγει την γνώση, διαχέει την πληροφορία και καλλιεργεί την σκέψη. Οι διάφορες χώρες που συμμετέχουν δεν ανταγωνίζονται μεταξύ τους, ούτε γίνονται συγκρίσεις των αποτελεσμάτων. Ωστόσο, τα θέματα κατασκευάζονται από κοινού από τους εκπροσώπους των χωρών μελών, κατά την ετήσιά τους συνάντηση. Οι διαγωνιζόμενοι γράφουν σε κοινά θέματα με μικρές μόνο διαφορές, οι οποίες οφείλονται στις εκπαιδευτικές ιδιαιτερότητες κάθε χώρας μέλους. Το σημαντικό είναι ότι γίνεται προσπάθεια να επιβραβεύεται μεγάλος αριθμός διαγωνιζόμενων, και όλοι οι μαθητές να λαμβάνουν δώρα με ενδιαφέρον εκπαιδευτικό περιεχόμενο. Επίσης, κάποια από τα βραβεία του διαγωνισμού δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να ταξιδέψουν στο εξωτερικό για να συναντήσουν τους ομόλογούς τους από άλλες χώρες, και παρέχεται η δυνατότητα συμμετοχής σε θερινά σχολεία και κατασκηνώσεις.

Στον ετήσιο μαθηματικό διαγωνισμό «Καγκουρό» μπορούν να λάβουν μέρος όλοι οι μαθητές από την Γ΄ Δημοτικού μέχρι την Γ΄ Λυκείου, ανεξάρτητα από τον τύπο ή τη μορφή του σχολείου τους (Δημόσιο, Ιδιωτικό, κ.λπ.). Υπάρχουν πέντε διαφορετικά επίπεδα θεμάτων, ανάλογα με την τάξη του μαθητή. Αυτά είναι ως εξής:

- Επίπεδο 1: απευθύνεται σε μαθητές της Γ΄ και Δ΄ τάξης Δημοτικού,
- Επίπεδο 2: απευθύνεται σε μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης Δημοτικού,
- Επίπεδο 3: απευθύνεται σε μαθητές της Α΄ και Β΄ τάξης Γυμνασίου,
- Επίπεδο 4: απευθύνεται σε μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ τάξης Λυκείου,
- Επίπεδο 5: απευθύνεται σε μαθητές της Β΄ και Γ΄ τάξης Λυκείου.

Ο διαγωνισμός διαρκεί 1 ώρα και 30 λεπτά και είναι σε μορφή πολλαπλής επιλογής. Τα θέματα είναι γενικά βατά. Υπάρχουν 30 ερωτήσεις (εκτός από το Επίπεδο 1 όπου οι ερωτήσεις είναι 24) κλιμακούμενης δυσκολίας. Το πρώτο ένα τρίτο των ερωτήσεων (που βαθμολογούνται από 3 μονάδες η καθεμία) είναι ιδιαίτερα εύκολες. Το επόμενο ένα τρίτο (που βαθμολογούνται από 4 μονάδες η καθεμία) είναι επίσης αρκετά εύκολες, και το τελευταίο ένα τρίτο (που βαθμολογούνται από 5 μονάδες η καθεμία) κατά τι δυσκολότερες. Οι περισσότερες ερωτήσεις είναι πρωτότυπες και πολλές διατυπώνονται με διασκεδαστικό τρόπο. Δεν απαιτούνται ειδικές γνώσεις για να απαντηθούν οι ερωτήσεις. Οι γνώσεις των μαθητών μέσα στην τάξη τους, ο κοινός νους και η αγάπη για τα Μαθηματικά είναι αρκετά εφόδια για τον διαγωνισμό.

Ε. Οδηγίες προς τον καθηγητή

Οι συνάδελφοι μαθηματικοί μπορούν να βρουν στο βιβλίο αυτό πλήθος από πρωτότυπα προβλήματα που κεντρίζουν την περιέργεια των παιδιών αυτής της ηλικίας και τα βοηθούν να ασχοληθούν πιο συστηματικά με τα μαθηματικά. Ανάλογα με τη διδακτική ενότητα που αναπτύσσουν στο σχολείο, μπορούν να επιλέξουν μερικά προβλήματα και είτε να τα δώσουν για εξάσκηση στο σπίτι είτε να τα παρουσιάσουν στην τάξη. Στη δεύτερη περίπτωση και επειδή τα περισσότερα προβλήματα είναι έξυπνα, προτείνουμε τα εξής:

- να διαβάσουν προσεκτικά την εκφώνηση και να εξετάσουν μήπως αυτή θέλει επαναδιατύπωση, ώστε να γίνει πιο σαφής,
- να λύσουν μόνοι τους το πρόβλημα και σε συνδυασμό με τη λύση του βιβλίου να εντοπίσουν τις προαπαιτούμενες γνώσεις,
- να διασπάσουν, αν το θεωρούν σκόπιμο, το πρόβλημα σε επιμέρους ερωτήματα, ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί βαθμιαία στη λύση,
- να δώσουν για το σπίτι ένα παρόμοιο πρόβλημα, ώστε να προτρέψουν το μαθητή να μελετήσει ξανά το λυμένο παράδειγμα.

Εφαρμογή

Ας πούμε ότι στο βιβλίο συναντάμε το πρόβλημα:

> «Να γράψετε τον μικρότερο φυσικό αριθμό που το άθροισμα των ψηφίων του είναι 30.»

Το πρόβλημα αυτό είναι προτιμότερο, σε πρώτη φάση, να το δώσουμε στην τάξη με την εξής μορφή:

> **α)** Γράψτε το μικρότερο και το μεγαλύτερο τριψήφιο φυσικό αριθμό, που τα ψηφία τους είναι οι αριθμοί 3, 7, 1.

β) Γράψτε το μεγαλύτερο και το μικρότερο φυσικό αριθμό που δεν περιέχουν το ψηφίο 0 και τα ψηφία τους έχουν άθροισμα:

i) 10 **ii)** 11 **iii)** 12

γ) Γράψτε το μικρότερο φυσικό αριθμό που το άθροισμα των ψηφίων του είναι 30.

Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα δοκιμάσουν στο ερώτημα (α) τις θέσεις των ψηφίων και θα διαπιστώσουν ότι:

- για να είναι αριθμός μεγάλος, πρέπει ή τα ψηφία των μονάδων μεγάλης τάξης να είναι μεγάλα ή το πλήθος των ψηφίων να είναι όσο γίνεται μεγαλύτερο.
- για να είναι ένας αριθμός μικρός, πρέπει ή το πλήθος των ψηφίων να είναι όσο γίνεται μικρότερο ή τα ψηφία των μονάδων μεγάλης τάξης να είναι όσο γίνεται μικρότερα.

Είναι σχεδόν βέβαιο ότι οι μαθητές θα βρουν γρήγορα τους αριθμούς 137 και 731.

Στο ερώτημα (β), (i) πάλι με δοκιμή θα φτάσουν στους αριθμούς $\underbrace{111\ldots1}_{10-\text{ψηφία}}$ και 19.

Για να πετύχουν το μικρότερο αριθμό, πρέπει να ελαχιστοποιήσουν το πλήθος των ψηφίων. Άρα, πρέπει όσο γίνεται περισσότερα ψηφία να είναι ίσα με 9. Αλλά $10 = 9 + 1$ και έτσι ο μικρότερος αριθμός που ζητάμε είναι ο 19. Φυσικά, ο καθηγητής, με τις παρεμβάσεις του και με κατάλληλες ερωτήσεις θα οδηγήσει το μαθητή εκεί που πρέπει.

Έτσι, μια εύστοχη ερώτηση, στην αρχή του ερωτήματος (β), (i) είναι να ζητηθεί από τους μαθητές να γράψουν το 10 ως άθροισμα δύο ψηφίων, με όλους τους δυνατούς τρόπους:

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5$$

Άρα για παράδειγμα οι διψήφιοι αριθμοί με άθροισμα ψηφίων ίσο με 10 είναι οι:

19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91

Αν θέλουμε να μπούμε βαθύτερα στο πρόβλημα, η πρώτη ερώτηση θα ήταν:

«Μπορεί ο μικρότερος αριθμός με άθροισμα ψηφίων 10 να είναι μονοψήφιος;»

Η απάντηση θα είναι προφανώς όχι. Η συνέχεια θα είναι:

«Μπορεί ο μικρότερος αριθμός με άθροισμα ψηφίων 10 να είναι διψήφιος;»

Εδώ είναι που οι μαθητές θα πρέπει να φτάσουν –με δοκιμές βέβαια– στο γεγονός ότι:

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5$$

και να βρουν το μικρότερο αριθμό που ζητάμε.

Για το αρχικό ερώτημα, όπου το άθροισμα των ψηφίων είναι 30, πρέπει να βάλουμε 3 φορές το 9 και το ψηφίο 3, αφού $30 - 3 \cdot 9 = 30 - 27 = 3$. Θα δούμε ότι ο αριθμός που ψάχνουμε είναι ο 3999.

Ο προηγούμενος προβληματισμός θέλει να δείξει ότι η συμβολή των δασκάλων στην πορεία επίλυσης ενός προβλήματος είναι καθοριστική και αναντικατάστατη. Είμαστε σίγουροι, ότι οι δάσκαλοί μας, με την παιδαγωγική τους αρτιότητα, θα μπορέσουν να αξιοποιήσουν με τον καλύτερο τρόπο πολλά από τα προβλήματα του βιβλίου αυτού για να αυξήσουν το ενδιαφέρον και την αγάπη των μαθητών τους προς τα μαθηματικά. Αυτός είναι άλλωστε και ο σκοπός που γράφτηκε αυτό το βιβλίο.

ΣΤ. Διαγνωστικό κριτήριο

Πριν προχωρήσετε στην ενδοχώρα αυτού του βιβλίου, σας δίνουμε την ευκαιρία να αξιολογήσετε σε πρώτο επίπεδο τις μαθηματικές σας ικανότητες. Για το λόγο αυτό συντάξαμε το επόμενο ερωτηματολόγιο.

Να αφιερώσετε μία το πολύ ώρα και να προσπαθήσετε να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Όλα είναι με το σύστημα των πολλαπλών επιλογών. Στο τέλος δίνουμε τον πίνακα με τις σωστές απαντήσεις και μια πρόταση με τις απαραίτητες οδηγίες για να συνεχίσετε τη μελέτη αυτού του βιβλίου.

——— Διαγνωστικό κριτήριο ———

Ερωτηματολόγιο - Θέματα

1. Αυτή τη στιγμή ο αδερφός μου βρίσκεται πάνω σε μία μεγάλη σκάλα. Αν ανέβει 7 σκαλιά θα βρεθεί στην κορυφή. Αν κατέβει 13 σκαλιά θα πατήσει στο πάτωμα. Πόσα σκαλιά έχει η σκάλα;

Α. 20 **Β.** 21 **Γ.** 25 **Δ.** 28 **Ε.** 33

2. Οι δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι 78° και 52°. Πόσες μοίρες είναι η άλλη γωνία του;

Α. 40° **Β.** 53° **Γ.** 60° **Δ.** 50° **Ε.** 70°

3. Ένα καγκουρό κάνει 5 άλματα σε 3 δευτερόλεπτα. Πόσα άλματα θα κάνει σε ένα λεπτό;

Α. 80 **Β.** 90 **Γ.** 100 **Δ.** 110 **Ε.** 150

4. Να γράψετε τον πιο μεγάλο αριθμό που έχει τα ίδια ψηφία με τον αριθμό 2008. Τίνος αριθμού από τους παρακάτω είναι πολλαπλάσιο ο αριθμός αυτός;

Α. 3 **Β.** 77 **Γ.** 200 **Δ.** 1000 **Ε.** 4000

5. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 84 τετραγωνικά εκατοστά. Η μία πλευρά του είναι 12 εκ. Πόσο είναι η άλλη πλευρά του;

Α. 24 **Β.** 16 **Γ.** 16 **Δ.** 6 **Ε.** 7

6. Να βρείτε την τιμή της παρακάτω παράστασης:

$$K = (2008 + 2008 + 2008 + 2008 + 2008 + 2008) : (2008+ 2008)$$

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 5

7. Ο παππούς έδωσε στον εγγονό του ένα χαρτονόμισμα για να αγοράσει παγωτά για την οικογένεια. Ο εγγονός, όταν πήγε στο περίπτερο, παρατήρησε ότι αν πάρει 6 ίδια παγωτά θα πάρει 2 € ρέστα, ενώ αν δώσει ακόμα 1 €, θα πάρει 7 ίδια παγωτά. Πόσα χρήματα έδωσε ο παππούς στον εγγονό;

Α. 5 **Β.** 10 **Γ.** 20 **Δ.** 50 **Ε.** 100

8. Πάνω μου έχω 30 € περισσότερα από σένα. Αν σου δώσω 8 €, πόσα ευρώ παραπάνω θα έχω από σένα;

Α. 22 **Β.** 16 **Γ.** 15 **Δ.** 13 **Ε.** 14

9. Να υπολογίσετε την αριθμητική παράσταση:

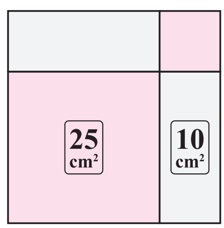
$$K = \frac{997+998+999+1001+1002+1003}{497+498+499+501+502+503}$$

Α. 997 **Β.** 497 **Γ.** 1003 **Δ.** 503 **Ε.** 2

10. Ο Γιάννης έχει κίτρινες, πράσινες και μπλε μπάλες. Συνολικά έχει 20 μπάλες. Οι δεκαεφτά απ' αυτές δεν είναι πράσινες και οι 12 δεν είναι κίτρινες. Πόσες μπλε μπάλες έχει ο Γιάννης;

Α. 3 **Β.** 7 **Γ.** 9 **Δ.** 9 **Ε.** 29

11. Το διπλανό τετράγωνο έχει χωριστεί σε δύο μικρότερα τετράγωνα και δύο ορθογώνια. Το ένα απ' αυτά τα τετράγωνα έχει εμβαδόν 25 cm^2, ενώ το ένα απ' τα ορθογώνια έχει εμβαδόν 10 cm^2. Πόση είναι η πλευρά του μεγάλου (αρχικού) τετραγώνου;



Α. 5 **Β.** 7 **Γ.** 8 **Δ.** 9 **Ε.** 10

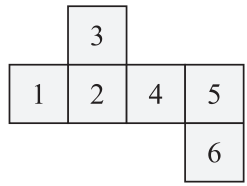
12. Αν είναι:

$$\alpha = \underbrace{2007 + 2007 + 2007 + \ldots + 2007}_{2008\text{-προσθεταίοι}} \quad \text{και} \quad \beta = \underbrace{2008 + 2008 + 2008 + \ldots + 2008}_{2007\text{-προσθεταίοι}}$$

να βρείτε τον αριθμό $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Α. 2007 **Β.** 2008 **Γ.** 4015 **Δ.** 1 **Ε.** 2

13. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το ανάπτυγμα ενός κύβου. Αν διπλώσουμε αυτό το σχήμα, όπως δείχνουν οι γραμμές, θα πάρουμε έναν κύβο. Απέναντι από το 2 βρίσκεται ο αριθμός α και απέναντι από το 3 βρίσκεται ο αριθμός β. Πόσο είναι το $\alpha + \beta$;



Α. 6 **Β.** 11 **Γ.** 9
Δ. 10 **Ε.** 7

14. Να βρείτε το αποτέλεσμα $A = \dfrac{7}{10000} + \dfrac{5}{1000} + \dfrac{3}{100} + \dfrac{1}{10}$.

Α. 7531 **Β.** 7,531 **Γ.** 0,7531 **Δ.** 0,1357 **Ε.** 13,57

15. Το άθροισμα των ψηφίων ενός αριθμού είναι 100. Πόσα ψηφία έχει ο μικρότερος αριθμός με αυτή την ιδιότητα;

Α. 9 **Β.** 10 **Γ.** 11 **Δ.** 12 **Ε.** 13

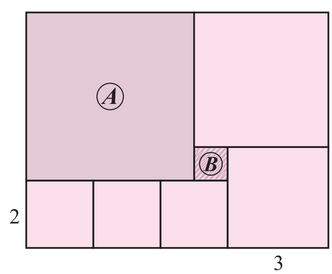
16. Η διαγώνιος ενός τετραγώνου έχει μήκος 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου:

Α. 64 **Β.** 32 **Γ.** 40 **Δ.** 56 **Ε.** 16

17. Ποιο ψηφίο θα βάλουμε στο κουτάκι □, ώστε αν έχουμε 357□ € να μπορούμε να τα μοιράσουμε ακριβώς σε 9 άτομα;

Α. το 9 **Β.** το 5 **Γ.** το 3 **Δ.** το 1 **Ε.** το 6

18. Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν 7 τετράγωνα, τα οποία όλα μαζί σχηματίζουν ένα ορθογώνιο. Να βρείτε το εμβαδόν των τετραγώνων Α και Β. Πόσο είναι το άθροισμα $A + B$;



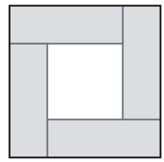
Α. 26 **Β.** 30 **Γ.** 32
Δ. 42 **Ε.** 20

19. Με ποιον αριθμό ισούται η παρακάτω παράσταση:

$$A = 33\cdot\frac{2}{11} + 333\cdot\frac{22}{111} + 3333\cdot\frac{222}{1111}$$

Α. 738 **Β.** 569 **Γ.** 937 **Δ.** 699 **Ε.** 4321

20. Το μεγάλο τετράγωνο αποτελείται από ένα άσπρο τετράγωνο και τέσσερα ορθογώνια γκρι παραλληλόγραμμα. Τα γκρι ορθογώνια έχουν περίμετρο 40 cm το καθένα. Πόσα εκατοστά είναι η μία πλευρά του μεγάλου τετραγώνου;



Α. 30 **Β.** 35 **Γ.** 20

Δ. 45 **Ε.** 25

Ερωτηματολόγιο - Λύσεις

1. Αυτή τη στιγμή ο αδερφός μου βρίσκεται πάνω σε μία μεγάλη σκάλα. Αν ανέβει 7 σκαλιά θα βρεθεί στην κορυφή. Αν κατέβει 13 σκαλιά θα πατήσει στο πάτωμα. Πόσα σκαλιά έχει η σκάλα;

Α. 20 **Β. 21** **Γ. 25** **Δ. 28** **Ε. 33**

ΛΥΣΗ

Η σκάλα έχει $7 + 13 + 1 = 21$ σκαλιά.

Σωστή απάντηση: το Β

2. Οι δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι 78° και 52°. Πόσες μοίρες είναι η άλλη γωνία του;

Α. 40° **Β. 53°** **Γ. 60°** **Δ. 50°** **Ε. 70°**

ΛΥΣΗ

Το άθροισμα των γωνιών είναι 180°. Όμως:

$$78° + 52° = 130° \quad \text{και} \quad 180° - 130° = 50°$$

Σωστή απάντηση: το Δ

3. Ένα καγκουρό κάνει 5 άλματα σε 3 δευτερόλεπτα. Πόσα άλματα θα κάνει σε ένα λεπτό;

Α. 80 **Β. 90** **Γ. 100** **Δ. 110** **Ε. 150**

ΛΥΣΗ

Στο 1 δευτερόλεπτο θα κάνει $\frac{5}{3}$ άλματα και στα 60 δευτερόλεπτα θα κάνει:

$$60 \cdot \frac{5}{3} = 100 \text{ άλματα}$$

Σωστή απάντηση: το Γ

4. **Να γράψετε τον πιο μεγάλο αριθμό που έχει τα ίδια ψηφία με τον αριθμό 2008. Τίνος αριθμού από τους παρακάτω είναι πολλαπλάσιο ο αριθμός αυτός;**

Α. 3 **Β. 77** **Γ. 200** **Δ. 1000** **Ε. 4000**

ΛΥΣΗ

Ο πιο μεγάλος αριθμός που έχει τα ίδια ψηφία με τον αριθμό 2008 είναι ο 8200. Από τους δοσμένους αριθμούς, ο αριθμός 8200 είναι πολλαπλάσιο του 200 ($8200 = 200 \cdot 41$).

Σωστή απάντηση: το Γ

5. **Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 84 τετραγωνικά εκατοστά. Η μία πλευρά του είναι 12 εκ. Πόσο είναι η άλλη πλευρά του;**

Α. 24 **Β. 16** **Γ. 16** **Δ. 6** **Ε. 7**

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

Η άλλη πλευρά είναι 84 : 12 = 7 εκατοστά.

Σωστή απάντηση: το Ε

6. **Να βρείτε την τιμή της παρακάτω παράστασης:**

$$\mathbf{K = (2008 + 2008 + 2008 + 2008 + 2008 + 2008) : (2008 + 2008)}$$

Α. 1 **Β. 2** **Γ. 3** **Δ. 4** **Ε. 5**

ΛΥΣΗ

$$K = \frac{6 \cdot 2008}{2 \cdot 2008} = \frac{6}{2} = 3$$

διότι:

$$2008 + 2008 + 2008 + 2008 + 2008 + 2008 = 6 \cdot 2008$$

$$\text{και} \quad 2008 + 2008 = 2 \cdot 2008$$

Σχόλιο

Στο κλάσμα $K = \dfrac{6 \cdot 2008}{2 \cdot 2008}$ ο αριθμός 2008 απλοποιείται.

Σωστή απάντηση: το Γ

7. **Ο παππούς έδωσε στον εγγονό του ένα χαρτονόμισμα για να αγοράσει παγωτά για την οικογένεια. Ο εγγονός, όταν πήγε στο περίπτερο, παρατήρησε ότι αν πάρει 6 ίδια παγωτά θα πάρει 2 € ρέστα, ενώ αν δώσει ακόμα 1 €, θα πάρει 7 ίδια παγωτά. Πόσα χρήματα έδωσε ο παππούς στον εγγονό;**

Α. 5 Β. 10 Γ. 20 Δ. 50 Ε. 100

ΛΥΣΗ

Αφού με τα 6 παγωτά παίρνει 2 € ρέστα, ενώ για τα 7 παγωτά πρέπει να δώσει 1 € επιπλέον, το κάθε παγωτό κοστίζει $2 + 1 = 3$ €. Άρα τα 6 παγωτά κοστίζουν:

$$6 \cdot 3 = 18 \text{ €}$$

Επομένως ο παππούς έδωσε στον εγγονό του $18 + 2 = 20$ €.

Σωστή απάντηση: το Γ

8. **Πάνω μου έχω 30 € περισσότερα από σένα. Αν σου δώσω 8 €, πόσα ευρώ παραπάνω θα έχω από σένα;**

Α. 22 Β. 16 Γ. 15 Δ. 13 Ε. 14

ΛΥΣΗ

Η διαφορά θα ελαττωθεί κατά $8 + 8 = 16$ €. Όμως $30 - 16 = 14$, οπότε θα έχω παραπάνω από σένα 14 €.

Σχόλιο

Αν έχω α και εσύ β, τότε $\alpha - \beta = 30$. Αν σου δώσω 8 €, εσύ θα έχεις $\beta + 8$ και εγώ $\alpha - 8$. Άρα θα έχω παραπάνω:

$$(\alpha - 8) - (\beta + 8) = (\alpha - \beta) - 16 = 30 - 16 = 14$$

Σωστή απάντηση: το Ε

9. **Να υπολογίσετε την αριθμητική παράσταση:**

$$\mathbf{K = \frac{997 + 998 + 999 + 1001 + 1002 + 1003}{497 + 498 + 499 + 501 + 502 + 503}}$$

Α. 997 Β. 497 Γ. 1003 Δ. 503 Ε. 2

ΛΥΣΗ

Αλλάζουμε τη σειρά των προσθετέων και βλέπουμε ότι:

- $997 + 1003 = 2000, \quad 998 + 1002 = 2000, \quad 999 + 1001 = 2000$
- $497 + 503 = 1000, \quad 498 + 502 = 1000, \quad 499 + 501 = 1000$

Άρα $K = \dfrac{2000+2000+2000}{1000+1000+1000} = \dfrac{6000}{3000} = 2.$

Σωστή απάντηση: το Ε

10. **Ο Γιάννης έχει κίτρινες, πράσινες και μπλε μπάλες. Συνολικά έχει 20 μπάλες. Οι δεκαεφτά απ' αυτές δεν είναι πράσινες και οι 12 δεν είναι κίτρινες. Πόσες μπλε μπάλες έχει ο Γιάννης;**

Α. 3 Β. 7 Γ. 9 Δ. 9 Ε. 29

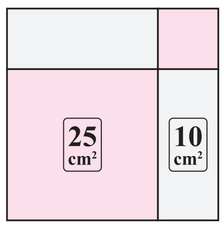
ΛΥΣΗ

Αφού οι μπάλες είναι 20 και οι 17 δεν είναι πράσινες, θα είναι κίτρινες ή μπλε. Άρα οι πράσινες είναι $20 - 17 = 3$ μπάλες.

Επίσης, αφού οι 12 δεν είναι κίτρινες, θα είναι πράσινες ή μπλε. Άρα οι κίτρινες είναι $20 - 12 = 8$ μπάλες. Επειδή λοιπόν οι $8 + 3 = 11$ μπάλες είναι πράσινες ή κίτρινες, οι μπλε μπάλες είναι $20 - 11 = 9$.

Σωστή απάντηση: το Δ

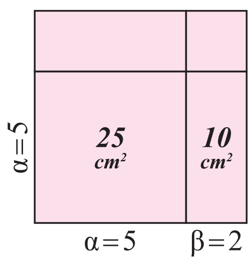
11. **Το διπλανό τετράγωνο έχει χωριστεί σε δύο μικρότερα τετράγωνα και δύο ορθογώνια. Το ένα απ' αυτά τα τετράγωνα έχει εμβαδόν 25 cm^2, ενώ το ένα απ' τα ορθογώνια έχει εμβαδόν 10 cm^2. Πόση είναι η πλευρά του μεγάλου (αρχικού) τετραγώνου;**



Α. 5 Β. 7 Γ. 8 Δ. 9 Ε. 10

ΛΥΣΗ

Αφού το ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 25, η πλευρά του είναι $\alpha = 5$ (διότι $5 \cdot 5 = 25$). Στο ορθογώνιο με εμβαδόν 10 η μία πλευρά είναι $\alpha = 5$. Επομένως η άλλη πλευρά του είναι $10 : 5 = 2$. Δηλαδή $\beta = 2$. Άρα η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι $5 + 2 = 7$ cm.



Σωστή απάντηση: το Β

12. **Αν είναι:**

$$\alpha = \underbrace{2007+2007+2007+\ldots+2007}_{2008\text{-προσθεταίοι}} \quad \text{και} \quad \beta = \underbrace{2008+2008+2008+\ldots+2008}_{2007\text{-προσθεταίοι}}$$

να βρείτε τον αριθμό $\frac{\alpha}{\beta}$.

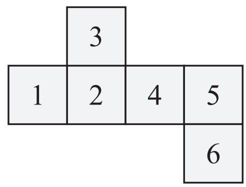
Α. 2007 Β. 2008 Γ. 4015 Δ. 1 Ε. 2

ΛΥΣΗ

Είναι $\alpha = 2008 \cdot 2007$ και $\beta = 2007 \cdot 2008$, οπότε $\frac{\alpha}{\beta} = 1$.

Σωστή απάντηση: το Δ

13. **Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το ανάπτυγμα ενός κύβου. Αν διπλώσουμε αυτό το σχήμα, όπως δείχνουν οι γραμμές, θα πάρουμε έναν κύβο. Απέναντι από το 2 βρίσκεται ο αριθμός α και απέναντι από το 3 βρίσκεται ο αριθμός β. Πόσο είναι το $\alpha + \beta$;**



Α. 6 Β. 11 Γ. 9 Δ. 10 Ε. 7

ΛΥΣΗ

Αν βάλουμε τον κύβο να «πατήσει» στην πλευρά 2, τότε οι πλευρές 1 και 4 είναι απέναντι. Το ίδιο και οι πλευρές 2 και 5. Άρα οι πλευρές 3 και 6 θα βρίσκονται επίσης απέναντι. Τα ζευγάρια λοιπόν των αριθμών που βρίσκονται απέναντι είναι (1, 4), (2, 5), (3, 6).

Σωστή απάντηση: το Β

14. **Να βρείτε το αποτέλεσμα $A = \frac{7}{10000} + \frac{5}{1000} + \frac{3}{100} + \frac{1}{10}$.**

Α. 7531 Β. 7,531 Γ. 0,7531 Δ. 0,1357 Ε. 13,57

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για έναν δεκαδικό αριθμό. Όμως, για ευκολία, προτιμάμε να γράψουμε:

$$A = \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000} = 0{,}1 + 0{,}03 + 0{,}005 + 0{,}0007 = 0{,}1357$$

Μπορούμε όμως και απευθείας να βρούμε το αποτέλεσμα 0,1357 διότι το 4ο κλάσμα διαβάζεται ένα δέκατο, το 3ο τρία εκατοστά, το 2ο πέντε χιλιοστά και το πρώτο 1 δεκάκις χιλιοστό.

Σωστή απάντηση: το Δ

15. **Το άθροισμα των ψηφίων ενός αριθμού είναι 100. Πόσα ψηφία έχει ο μικρότερος αριθμός με αυτή την ιδιότητα;**

Α. 9 **Β. 10** **Γ. 11** **Δ. 12** **Ε. 13**

ΛΥΣΗ

Αφού ζητάμε τον μικρότερο αριθμό που το άθροισμα των ψηφίων του είναι ίσο με 100, θα πρέπει το πλήθος των ψηφίων να είναι το μικρότερο δυνατόν.

Για να συμβεί αυτό, πρέπει, αν είναι δυνατόν, όλα τα ψηφία να είναι 9.
Η διαίρεση όμως 100 : 9 δίνει υπόλοιπο 1 (και πηλίκο 11).

$$\begin{array}{r|l} 100 & 9 \\ \cline{2-2} 10 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Επομένως ο αριθμός που ζητάμε είναι ο $1\underbrace{99999999999}_{11-\text{ψηφία}}$, ο οποίος είναι δωδεκαψήφιος.

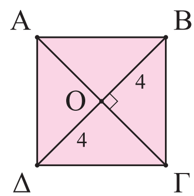
Σωστή απάντηση: το Δ

16. **Η διαγώνιος ενός τετραγώνου έχει μήκος 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου:**

Α. 64 **Β. 32** **Γ. 40** **Δ. 56** **Ε. 16**

ΛΥΣΗ

Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν:



$$E = \frac{1}{2}(\text{βάση})\cdot(\text{ύψος}) = \frac{1}{2}A\Gamma \cdot BO =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot 4 = \frac{1}{2}\cdot 32 = 16 \text{ cm}^2$$

Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $2 \cdot 16 = 32 \text{ cm}^2$.

Σωστή απάντηση: το Β

17. **Ποιο ψηφίο θα βάλουμε στο κουτάκι □, ώστε αν έχουμε 357□ € να μπορούμε να τα μοιράσουμε ακριβώς σε 9 άτομα;**

Α. το 9 **Β. το 5** **Γ. το 3** **Δ. το 1** **Ε. το 6**

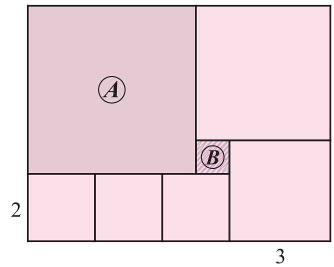
ΛΥΣΗ

Πρέπει ο αριθμός $3 + 5 + 7 + \square$ να διαιρείται ακριβώς με 9.

Αλλά $3 + 5 + 7 = 15$, οπότε το κατάλληλο ψηφίο είναι το $18 - 15 = 3$.

Σωστή απάντηση: το Γ

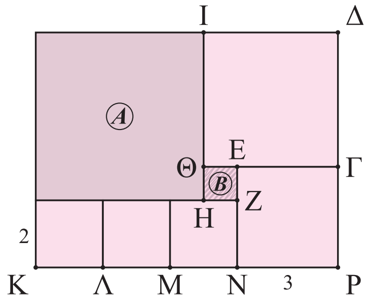
18. **Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν 7 τετράγωνα, τα οποία όλα μαζί σχηματίζουν ένα ορθογώνιο. Να βρείτε το εμβαδόν των τετραγώνων Α και Β. Πόσο είναι το άθροισμα $A + B$;**



Α. 26 **Β. 30** **Γ. 32**

Δ. 42 **Ε. 20**

ΛΥΣΗ



Θα είναι $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΝΖ = 2$.

Επίσης είναι $ΕΝ = ΓΡ = ΡΝ = 3$.

Άρα $ΕΖ = ΕΝ - ΖΝ = 3 - 2 = 1$.

Επομένως $ΓΘ = ΓΕ + ΕΘ = 3 + 1 = 4$.

Θα είναι λοιπόν και $ΓΔ = ΓΘ = 4$.

Αφού $ΙΘ = ΓΔ = 4$ και $ΘΗ = 1$, θα είναι:

$$ΗΙ = 4 + 1 = 5$$

Το τετράγωνο Α έχει εμβαδόν $5 \cdot 5 = 25$ και το τετράγωνο Β έχει εμβαδόν $1 \cdot 1 = 1$.
Άρα $A + B = 25 + 1 = 26$.
Σωστή απάντηση: το Α

19. **Με ποιον αριθμό ισούται η παρακάτω παράσταση:**

$$\mathbf{A = 33 \cdot \frac{2}{11} + 333 \cdot \frac{22}{111} + 3333 \cdot \frac{222}{1111}}$$

Α. 738 **Β. 569** **Γ. 937** **Δ. 699** **Ε. 4321**

ΛΥΣΗ

Δεν θα κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς, διότι οι πράξεις απαιτούν κόπο. Παρατηρούμε όμως ότι $33 \cdot \frac{2}{11} = 3 \cdot 11 \cdot \frac{2}{11} = 3 \cdot 2 = 6$, διότι το 11 απλοποιείται αφού:

$$3 \cdot 11 \cdot \frac{2}{11} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 2}{11} = 3 \cdot 2 = 6$$

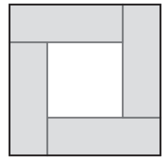
Όμοια παίρνουμε:

- $333 \cdot \frac{22}{111} = 3 \cdot 111 \cdot \frac{22}{111} = 3 \cdot 22 = 66$
- $3333 \cdot \frac{222}{1111} = 3 \cdot 1111 \cdot \frac{222}{1111} = 3 \cdot 222 = 666$

Άρα Α = 6 + 66 + 666 = 738.

Σωστή απάντηση: το Α

20. **Το μεγάλο τετράγωνο αποτελείται από ένα άσπρο τετράγωνο και τέσσερα ορθογώνια γκρι παραλληλόγραμμα. Τα γκρι ορθογώνια έχουν περίμετρο 40 cm το καθένα. Πόσα εκατοστά είναι η μία πλευρά του μεγάλου τετραγώνου;**

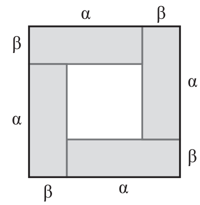


Α. 30 Β. 35 Γ. 20 Δ. 45 Ε. 25

ΛΥΣΗ

Κάθε γκρι ορθογώνιο έχει μήκος α και πλάτος β. Αφού η περίμετρός του είναι 40, το μήκος και το πλάτος μαζί θα είναι 20 cm. Δηλαδή α + β = 20. Παρατηρούμε όμως στο σχήμα ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι α + β, δηλαδή 20 cm.

Σωστή απάντηση: το Γ



Οι σωστές απαντήσεις

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Β	Δ	Γ	Γ	Ε	Γ	Γ	Ε	Ε	Δ	Β	Δ	Β	Δ	Δ	Β	Γ	Α	Α	Γ

Αξιοποίηση του κριτηρίου

- Αν απάντησες σωστά σε 4 - 6 ερωτήσεις σημαίνει ότι κατέχεις τα βασικά, αλλά χρειάζεται να λύσεις περισσότερες ασκήσεις.
- Αν απάντησες σωστά σε 7 - 11 ερωτήσεις, τότε έχεις τη δυνατότητα να μάθεις πολλά από αυτό το βιβλίο και να αποκτήσεις άπειρες μαθηματικές γνώσεις.
- Αν απάντησες σωστά σε 12 - 16 ερωτήσεις, τότε είσαι πολύ καλός στα μαθηματικά. Αν αξιοποιήσεις σωστά αυτό το βιβλίο, οι μαθηματικές σου δεξιότητες θα εκτιναχθούν στα ύψη. Να αρχίσεις από τώρα να ετοιμάζεσαι για τους μαθηματικούς διαγωνισμούς.
- Αν απάντησες σωστά σε 17 - 20 ερωτήσεις, τότε έχεις μαθηματικό ταλέντο. Το βιβλίο αυτό είναι ιδανικό για σένα. Σκέψου, μελέτα και εκμεταλλεύσου λύνοντας προβλήματα όλον τον ελεύθερο χρόνο σου. Μπορείς στο μέλλον να πετύχεις σε όποια θετική σχολή επιθυμείς! Συγχαρητήρια!!!

1

- Οι αριθμοί
- Οι πράξεις της αριθμητικής
- Κλάσματα - Δεκαδικοί αριθμοί

Θεωρία - Παραδείγματα - Ασκήσεις

1. Η μεταβλητή και η σημασία της

A. Η μεταβλητή

Η έννοια της μεταβλητής είναι απλή και πολύ σπουδαία στα μαθηματικά.

Η μεταβλητή είναι ένα γράμμα με το οποίο παριστάνουμε την τυχαία τιμή ενός μεγέθους ή ενός αριθμού.

Τις μεταβλητές τις συμβολίζουμε με γράμματα της ελληνικής ή λατινικής αλφαβήτου:

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad x, \quad y, \quad z \quad \text{κ.λπ}$$

B. Εφαρμογές των μεταβλητών

α) Το γεγονός ότι:

$$2 + 3 = 3 + 2, \quad 5 + 7 = 7 + 5$$

το εκφράζουμε με μεταβλητές γράφοντας:

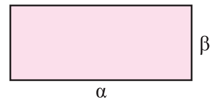
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

όπου με α, β συμβολίζουμε δύο τυχαίους αριθμούς.

Λέμε τότε ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε το μήκος με το πλάτος του. Αντί λοιπόν να γράφουμε:



$$\text{Εμβαδόν} = \text{μήκος} \times \text{πλάτος}$$

είναι προτιμότερο και απλούστερο να γράφουμε:

$$\text{Ε} = \alpha \cdot \beta$$

όπου α, β είναι οι διαστάσεις (μήκος, πλάτος) του ορθογωνίου.

γ) Με τη βοήθεια των μεταβλητών μπορούμε να εξηγήσουμε και διάφορα μαθηματικά παιχνίδια:

Ακούω	**Γράφω**
– Βάλε στο μυαλό σου έναν αριθμό	x
– Αφαίρεσε το 3	$x - 3$
– Πολλαπλασίασε με 2	$2(x - 3) = 2x - 6$
– Πρόσθεσε 16	$(2x - 6) + 16 = 2x + 10$
– Αφαίρεσε τον διπλάσιο του αριθμού που είχες στο μυαλό σου	$(2x + 10) - 2x = 10$
– Βρήκες 10	

Ο συμμαθητής σου σε κοιτάζει με απορία, αλλά εσύ ξέρεις το λόγο που συμβαίνει αυτό. Αρκεί να κοιτάξεις τη δεύτερη στήλη του πίνακα.
Αυτό βέβαια ήταν ένα πολύ απλό παράδειγμα, αλλά με τη βοήθεια μεταβλητών μπορούμε να εξηγήσουμε πολύ σύνθετα παιχνίδια ή να λύσουμε πολύπλοκα προβλήματα που δεν λύνονται εύκολα (ή και καθόλου) με πρακτική αριθμητική.

δ) Για να περιγράψουμε τον τρόπο που πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε κλάσματα χωρίς λόγια, αρκεί να γράψουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Η μεταβλητή λοιπόν έχει την αξία μιας εικόνας: «Μια εικόνα, χίλιες λέξεις», σύμφωνα με γνωστή κινέζικη παροιμία. Για το λόγο αυτό είναι σπουδαία υπόθεση να μάθουμε να χρησιμοποιούμε μεταβλητές σε κάθε σχεδόν περίπτωση που θέλουμε να γλυτώσουμε κόπο, χρόνο και να αποφύγουμε λάθη.

Γ. **Χρήσιμες παρατηρήσεις**

Αφού οι μεταβλητές εκφράζουν αριθμούς, με τις μεταβλητές όπως και με τους αριθμούς μπορούμε να κάνουμε πράξεις: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση κ.λπ. Ορίστε μερικά παραδείγματα:

- $x + x = 2x$, $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 6\alpha$
- $5x - 2x = 3x$, $9x - 3x + 2x - 5x = 3x$
- $6x : 2x = 3$, $15\alpha : 3\alpha = 5$
- $2(\alpha - 3) + 3(\alpha + 2) = (2\alpha - 6) + (3\alpha + 6) = 5\alpha$

$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

Περισσότερα όμως πράγματα για τις μεταβλητές και τη σημασία τους θα συναντήσουμε σε επόμενη ενότητα του βιβλίου που είναι ειδικά αφιερωμένη στις μεταβλητές και τις εξισώσεις.

2. Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Στην εποχή μας χρησιμοποιούμε για την καθημερινή επικοινωνία το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Το σύστημα αυτό έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Για να γράψουμε οποιονδήποτε αριθμό, χρησιμοποιούμε τα δέκα ψηφία:

  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Η αξία ενός ψηφίου που βρίσκεται σε έναν αριθμό, εξαρτάται από τη θέση του ψηφίου αυτού μέσα στον αριθμό.
- Δέκα μονάδες μιας τάξης μάς δίνουν μία μονάδα της αμέσως μεγαλύτερης τάξης.

Επομένως:

- 10 μονάδες μας δίνουν μία δεκάδα
- 10 δεκάδες μας δίνουν μία εκατοντάδα
- 10 εκατοντάδες μας δίνουν μία χιλιάδα και ούτω καθεξής

Στον αριθμό λοιπόν $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ που έχει ψηφία τα α, β, γ, δ:

- το δ δηλώνει μονάδες
- το γ δηλώνει δεκάδες
- το β δηλώνει εκατοντάδες
- το α δηλώνει χιλιάδες

α	**β**	**γ**	**δ**
Μονάδες χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες

Επειδή $100 = 10^2$ και $1.000 = 10^3$, μπορούμε να γράψουμε:

- $\overline{\alpha\beta} = 10\alpha + \beta$
- $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma = 10^2\alpha + 10^1\beta + \gamma$
- $\overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1.000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta = 10^3\alpha + 10^2\beta + 10^1\gamma + \delta$
- $\overline{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = 10^4\alpha + 10^3\beta + 10^2\gamma + 10^1\delta + \varepsilon$

Σχόλιο

Τονίζουμε ότι συχνά γράφουμε $\overline{\alpha\beta}$ για να δηλώσουμε, για παράδειγμα, τον αριθμό με ψηφία α και β. Αυτό το κάνουμε, όπου είναι απαραίτητο, διότι με αβ συμβολίζεται επίσης το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ των αριθμών α και β.

1.1 **α) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός, που το άθροισμα των ψηφίων του είναι 11 και το 0 δεν περιέχεται σ' αυτά;**

β) Ποιος είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός, που το άθροισμα των ψηφίων του είναι 21;

γ) Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος τριψήφιος, που το άθροισμα των ψηφίων του είναι 11;

ΛΥΣΗ

α) Στο ερώτημα αυτό το κλειδί είναι η εξής παρατήρηση:

> Όσο πιο πολλά είναι τα ψηφία ενός αριθμού, τόσο πιο μεγάλος είναι ο αριθμός.

Επειδή λοιπόν:

$$11 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{11-\text{προσθετέοι}}$$

ο μεγαλύτερος αριθμός, του οποίου τα ψηφία έχουν άθροισμα 11 είναι ο:

$$11.111.111.111$$

δηλαδή αυτός που έχει έντεκα ψηφία και όλα τα ψηφία του είναι 1.

β) Στο ερώτημα αυτό, είναι πολύ χρήσιμη η παρακάτω διαπίστωση:

> Όσο λιγότερα ψηφία έχει ένας αριθμός και όσο πιο μικρό είναι το πρώτο ψηφίο του, τόσο πιο μικρός είναι ο αριθμός.

Το μεγαλύτερο ψηφίο που διαθέτουμε στο δεκαδικό σύστημα είναι το 9. Όμως $21 = 9 + 9 + 3$. Άρα ο μικρότερος αριθμός, του οποίου το άθροισμα των ψηφίων είναι 21 είναι ο 399.

γ) Οι αριθμοί που ψάχνουμε είναι τριψήφιοι και το άθροισμα των ψηφίων τους είναι 11.

- Τον μικρότερο αριθμό θα τον πάρουμε αν επιλέξουμε το μικρότερο δυνατό ψηφίο για ψηφίο εκατοντάδων και το μικρότερο δυνατό ψηφίο για ψηφίο δεκάδων. Άρα ο μικρότερος αριθμός είναι ο 119, μιας και το 0 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωσή μας ως ψηφίο εκατοντάδων.
- Τον μεγαλύτερο αριθμό θα τον βρούμε, αν πάρουμε το μεγαλύτερο δυνατόν ψηφίο για τη θέση των εκατοντάδων. Επομένως, ο αριθμός που ζητάμε είναι ο 920, διότι το μεγαλύτερο ψηφίο είναι το 9 και $11 = 9 + 2 + 0$.

3. Η πρόσθεση

Α. Πρόσθεση φυσικών

Η πρόσθεση φυσικών αριθμών είναι η απλούστερη πράξη της αριθμητικής και γίνεται όπως δείχνει το διπλανό παράδειγμα. Τονίζουμε ότι στην πρόσθεση οι προσθετέοι τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μονάδες της ίδιας τάξης να βρίσκονται στην ίδια στήλη, δηλαδή η μία κάτω από την άλλη.

$$\begin{array}{r} 6.957 \\ 384 \\ 73 \\ +\quad 8 \\ \hline 7.422 \end{array}$$

Β. Πρόσθεση δεκαδικών

Η πρόσθεση των δεκαδικών περιγράφεται στο διπλανό παράδειγμα. Επισημαίνουμε ότι η υποδιαστολή, σε όλους τους αριθμούς, πρέπει να βρίσκεται στην ίδια στήλη.

$$\begin{array}{r} 78{,}54 \\ 9{,}5 \\ +\ 0{,}27 \\ \hline 88{,}31 \end{array}$$

Ας μην ξεχνάμε επίσης ότι μπορούμε να γράψουμε, για παράδειγμα:

$$72 = 72{,}00 \quad \text{και} \quad 384 = 384{,}000$$

Με άλλα λόγια:

> Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί και ως δεκαδικός, αρκεί μετά το ψηφίο των μονάδων να βάλουμε υποδιαστολή και στη συνέχεια όσα μηδενικά επιθυμούμε.

Γ. Πρόσθεση κλασμάτων

α) Αν τα κλάσματα είναι **ομώνυμα**, δηλαδή έχουν τον ίδιο παρονομαστή, τότε προσθέτουμε τους αριθμητές και αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή.

$$\frac{2}{8}+\frac{5}{8}=\frac{2+5}{8}=\frac{7}{8}$$

β) Αν τα κλάσματα είναι **ετερώνυμα**, δηλαδή έχουν διαφορετικούς παρονομαστές, τότε τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα, βρίσκοντας το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{\overset{\underline{3}}{3}}{4}+\frac{\overset{\underline{2}}{5}}{6}=$$
$$=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$$

1.2 **Να βρεθεί το άθροισμα:**

$$\mathbf{A = 912 + 912 + 912 + 912 + 75 + 75 + 75 + 75 + 13 + 13 + 13 + 13}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $912 + 75 + 13 = 1.000$ και υπάρχουν 4 προσθετέοι από καθέναν από τους αριθμούς 912, 75 και 13, το δοσμένο άθροισμα είναι ίσο με $4 \cdot 1.000 = 4.000$.

1.3 **Ένα τούβλο ζυγίζει 1 κιλό και $\frac{3}{5}$ του τούβλου. Πόσο ζυγίζουν 8 τέτοια τούβλα;**

ΛΥΣΗ

Στα $\frac{3}{5}$ του τούβλου πρέπει να προσθέσουμε 1 ακόμα κιλό για να βρούμε ένα ολόκληρο τούβλο. Άρα τα $\frac{2}{5}$ του τούβλου ζυγίζουν 1 κιλό. Το $\frac{1}{5}$ του τούβλου θα ζυγίζει $\frac{1}{2}$ κιλά και έτσι το 1 τούβλο ζυγίζει $\frac{5}{2}$ κιλά. Άρα τα 8 τούβλα ζυγίζουν:

$$8 \cdot \frac{5}{2} = 20 \text{ κιλά}$$

1.4 **Να βρεθεί ο αριθμός:**

$$\frac{\mathbf{57+83\cdot 57}}{\mathbf{57}}+\frac{\mathbf{98+15\cdot 98}}{\mathbf{98}}$$

(Αυστραλία)

ΛΥΣΗ

Υπάρχει απλός τρόπος για να βρούμε την τιμή αυτής της παράστασης:

- $\dfrac{57+83\cdot 57}{57}=\dfrac{57}{57}+\dfrac{83\cdot 57}{57}=1+83=84$

- $\dfrac{98+15\cdot 98}{98}=\dfrac{98}{98}+\dfrac{15\cdot 98}{98}=1+15=16$

Άρα, η τιμή της παράστασης είναι $84 + 16 = 100$.

4. Η αφαίρεση

A. Αφαίρεση φυσικών

Η αφαίρεση είναι πράξη αντίθετη της πρόσθεσης. Επομένως:

Αν $\alpha+\beta=\gamma$, τότε $\alpha=\gamma-\beta$ και $\beta=\gamma-\alpha$.

Στην αφαίρεση $7.837-2.958$ που φαίνεται στο παράδειγμα, ο 7.837 λέγεται **μειωτέος**, ο αριθμός 2.958 λέγεται **αφαιρετέος** και το αποτέλεσμα 4.879 της αφαίρεσης λέγεται **διαφορά**. Επομένως:

$$\begin{array}{r} 7.837 \\ -2.958 \\ \hline 4.879 \end{array}$$

Αν $\mathrm{M}-\mathrm{A}=\Delta$, τότε $\mathrm{M}=\Delta+\mathrm{A}$ και $\mathrm{A}=\mathrm{M}-\Delta$.

Τονίζουμε ότι όπως και στην πρόσθεση, έτσι και στην αφαίρεση, οι δύο αριθμοί πρέπει να τοποθετηθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μονάδες να βρίσκονται κάτω από τις μονάδες, οι δεκάδες κάτω από τις δεκάδες κ.λπ.

B. Αφαίρεση δεκαδικών

Η αφαίρεση δεκαδικών αριθμών περιγράφεται στο διπλανό παράδειγμα. Έτσι, στην αφαίρεση $528{,}3-78{,}74$, τοποθετούμε τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο αλλά προσέχουμε η υποδιαστολή να βρίσκεται στην ίδια στήλη.

$$\begin{array}{r} 528{,}30 \\ -\ \ 78{,}74 \\ \hline 449{,}56 \end{array}$$

Τον αριθμό 528,3 τον γράψαμε 528,30 ώστε και οι δύο αριθμοί να έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων.

Γ. Αφαίρεση κλασμάτων

α) Αν τα κλάσματα είναι ομώνυμα, τότε αφαιρούμε τους αριθμητές και αφήνουμε ίδιο τον παρονομαστή.

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}=\frac{2}{9}$$

β) Αν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα, τότε τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα (βρίσκοντας το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών) και αφαιρούμε όπως στην περίπτωση (α).

$$\frac{\overset{3}{7}}{8}-\frac{\overset{4}{5}}{6} \overset{\text{Ε.Κ.Π.}=24}{=\!=\!=} \frac{21}{24}-\frac{20}{24}=\frac{21-20}{24}=\frac{1}{24}$$

Δ. Γενικές ιδιότητες

Στην αφαίρεση ισχύουν επίσης ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες που τις περιγράφουμε με μεταβλητές:

- Αν από έναν αριθμό α θέλουμε να αφαιρέσουμε κάποιους άλλους αριθμούς, τότε μπορούμε να προσθέσουμε αυτούς τους αριθμούς και το άθροισμά τους να το αφαιρέσουμε από τον αριθμό α.

  $\alpha-(\beta+\gamma)=\alpha-\beta-\gamma \qquad \alpha-\beta-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)$
- Αν στον μειωτέο και στον αφαιρετέο μιας αφαίρεσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε η διαφορά δεν αλλάζει.

  $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=\alpha-\beta \qquad (\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta$
- Αν από περισσότερους από έναν αριθμούς θέλουμε να αφαιρέσουμε κάποιους άλλους αριθμούς, τότε μπορούμε να προσθέσουμε αυτούς τους αριθμούς και το άθροισμά τους να το αφαιρέσουμε από το άθροισμα των πρώτων αριθμών.

  $\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon-\zeta=(\alpha+\gamma+\varepsilon)-(\beta+\delta+\zeta)$

1.5 **Αντί να προσθέσει η Μαριάννα σε έναν αριθμό το 657, αφαίρεσε κατά λάθος από τον αριθμό αυτό το 657 και βρήκε 243. Ποιο έπρεπε να είναι το σωστό αποτέλεσμα, αν η Μαριάννα δεν είχε κάνει αυτό το λάθος;**

ΛΥΣΗ

Αφού η Μαριάννα αφαίρεσε κατά λάθος από τον άγνωστο σε μας αριθμό τον 657 και βρήκε 243, ο άγνωστος αριθμός είναι ο:

$$243+657=900$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ +657 \\ \hline 900 \end{array}$$

Επομένως η Μαριάννα έπρεπε να κάνει την πρόσθεση:

$$900+657=1557$$

οπότε το σωστό αποτέλεσμα θα ήταν ο αριθμός 1557.

1.6 **Με τι ισούται το άθροισμα $250-249+248-247+246-245+\ldots+2-1$;**

ΛΥΣΗ

Οι αριθμοί 1, 2, 3, …, 249, 250 μπορούν να χωριστούν σε $250:2=125$ ζεύγη και να γράψουμε:

$$(250-249)+(248-247)+(246-245)+\ldots+(4-3)+(2-1)=$$
$$=\underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{125-\text{προσθετέοι}}=125$$

Σχόλιο

Είναι φανερό ότι η λύση δυσκολεύει, αν κάνουμε τις πράξεις με άλλη σειρά:

$$A=\underline{250-249}+248-247+246-245+\ldots+2-1=$$
$$=\underline{1+248}-247+246-245+\ldots+2-1=$$
$$=249-247+246-245+\ldots+2-1=$$
$$=2+246-245+\ldots+2-1=$$
$$=248-245+\ldots+2-1=$$
$$=3+244-243+\ldots+2-1=\ldots$$

Η προσπάθεια αυτή παίρνει πολύ χρόνο και είναι ασύμφορη.

1.7 **Να βρεθεί το αποτέλεσμα στην παρακάτω παράσταση:**

$$\mathbf{A=(2009+2007+2005+2003)+(2008+2006+2004)-}$$
$$\mathbf{-(2003+2004+2005)-(2006+2007+2008)}$$

ΛΥΣΗ

Οι αριθμοί που προστίθενται, δηλαδή οι αριθμοί των δύο πρώτων παρενθέσεων, δίνουν άθροισμα:

$$2009+2007+2005+2003+2008+2006+2004$$

Οι αριθμοί που αφαιρούνται, δηλαδή οι αριθμοί των τελευταίων δύο παρενθέσεων έχουν άθροισμα:

$$2003+2004+2005+2006+2007+2008$$

Άρα $A=2009$, διότι το 1ο άθροισμα είναι μεγαλύτερο από το 2ο κατά 2009.

1.8 **Ο Γιάννης έχει κίτρινες, πράσινες και μπλε μπάλες. Συνολικά έχει 20 μπάλες. Οι δεκαεφτά απ' αυτές δεν είναι πράσινες και οι 12 δεν είναι κίτρινες. Πόσες μπλε μπάλες έχει ο Γιάννης;**

ΛΥΣΗ

Αφού οι μπάλες είναι 20 και οι 17 δεν είναι πράσινες, θα είναι κίτρινες ή μπλε. Άρα οι πράσινες είναι $20 - 17 = 3$ μπάλες.

Επίσης, αφού οι 12 δεν είναι κίτρινες, θα είναι πράσινες ή μπλε. Άρα οι κίτρινες είναι $20 - 12 = 8$ μπάλες.

Επειδή λοιπόν οι $8 + 3 = 11$ μπάλες είναι πράσινες ή κίτρινες, οι μπλε μπάλες είναι $20 - 11 = 9$.

1.9 **Στη διπλανή πρόσθεση των διψήφιων αριθμών ΑΒ και ΓΓ τα γράμματα Α, Β, Γ παριστάνουν ψηφία. Διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικά ψηφία. Ποιον αριθμό παριστάνει το ψηφίο Β και ποιο είναι το άθροισμα;**

$$\begin{array}{r} \mathrm{A\,B} \\ +\ \ \Gamma\,\Gamma \\ \hline \mathrm{A\,A\,A} \end{array}$$

ΛΥΣΗ

Το ψηφίο Α των εκατοντάδων στο άθροισμα ΑΑΑ είναι 1, διότι το άθροισμα $\mathrm{AB} + \Gamma\Gamma$ είναι μικρότερο του 198. Άρα το άθροισμα είναι ο αριθμός 111.

Από το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων $\mathrm{A} + \Gamma$ παίρνουμε ότι ο $1 + \Gamma$ τελειώνει σε 1. Επομένως $\Gamma = 0$ εκτός αν έχουμε κρατούμενο από τη στήλη των μονάδων.

$$\begin{array}{r} 1\,\mathrm{B} \\ +\ \ \Gamma\,\Gamma \\ \hline 1\,1\,1 \end{array}$$

- Αν ήταν $\Gamma = 0$, τότε $\mathrm{B} + \Gamma = \mathrm{B} + 0 = \mathrm{B}$. Αλλά $\mathrm{B} + \Gamma = 1$ (ή 11) και έτσι πρέπει $\mathrm{B} = 1 = \mathrm{A}$. Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$.
- Θα είναι υποχρεωτικά $\Gamma = 9$ και θα πρέπει η πρόσθεση $\mathrm{B} + \Gamma$ να τελειώνει σε 1 και να δώσει κρατούμενο. Άρα $\mathrm{B} = 2$.

Τελικά $\mathrm{A} = 1$, $\mathrm{B} = 2$ και $\Gamma = 9$.

5. Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση

Α. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση φυσικών αριθμών

Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι λίγο πιο σύνθετες από αυτές της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, αλλά παρουσιάζουν ενδιαφέρον.

$$\begin{array}{r} 379 \\ \times\ 68 \\ \hline 3032 \\ +2274 \\ \hline 25772 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 6111 & 97 \\ \cline{2-2} 291 & 63 \\ 00 & \end{array}$$

Στα παραπάνω παραδείγματα:

α) το **γινόμενο** των αριθμών 379 (**πολλαπλασιαστέος**) και 68 (**πολλαπλασιαστής**) είναι ο αριθμός 25.772,

β) το **πηλίκο** της διαίρεσης 6.111 (**διαιρετέος**) διά του 97 (**διαιρέτης**) είναι ο αριθμός 63.

Β. Βασικές ιδιότητες

α) Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι αντίστροφες πράξεις. Ό,τι δημιουργεί η μία, το «καταστρέφει» η άλλη:

$$\text{Αν } \alpha\cdot\beta=\gamma, \text{ τότε } \alpha=\gamma:\beta \text{ και } \beta=\gamma:\alpha.$$
$$\text{Αν } \alpha:\beta=\gamma, \text{ τότε } \alpha=\beta\cdot\gamma \text{ και } \beta=\alpha:\gamma.$$

Παράδειγμα

- Αφού $3\cdot 10=30$, θα είναι $3=30:10$ και $10=30:3$.
- Αφού $45:9=5$, θα είναι $45=9\cdot 5$ και $9=45:5$.

β) Η διαίρεση $\Delta:\delta$ γράφεται συχνά για ευκολία ως κλάσμα $\frac{\Delta}{\delta}$. Είναι δηλαδή:

$$\frac{\Delta}{\delta}=\Delta:\delta \quad (\delta\neq 0)$$

Γ. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση δεκαδικών

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση, όπως και όλες οι πράξεις της αριθμητικής, θεωρούνται γνωστές σε όλη την έκταση του βιβλίου αυτού. Ωστόσο, κάνουμε όπου είναι απαραίτητο, ορισμένες υπενθυμίσεις, κυρίως όμως συμπληρώσεις.

$$\begin{array}{r} 4{,}75 \\ \times\ \ 3{,}4 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 95{,}48 & 6{,}2 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{array}{rr} & 475 \\ & \times\ \ 34 \\ \hline & 1900 \\ & +1425 \\ \hline & 16150 \\ \text{Αποτέλεσμα:} & 16{,}15 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 954{,}8 & 62 \\ \cline{2-2} 334 & 15{,}4 \\ 248 & \\ 00 & \end{array}$$

- Στον πολλαπλασιασμό δεκαδικών πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς σαν να μην ήταν δεκαδικοί αλλά στο τέλος χωρίζουμε από το τέλος τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα είναι συνολικά τα δεκαδικά ψηφία και των δύο αριθμών.
- Στη διαίρεση, αν ο διαιρέτης είναι δεκαδικός, τότε τον μετατρέπουμε σε φυσικό, μετακινώντας όμως την υποδιαστολή του διαιρετέου προς τα δεξιά κατά τόσα ψηφία, όσα είναι τα δεκαδικά ψηφία του διαιρέτη.

Δ. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση κλασμάτων

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση κλασμάτων είναι απλές πράξεις και δεν γίνεται εύκολα λάθος:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta} \qquad\qquad \frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.
- Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, αφήνουμε το πρώτο όπως είναι, αντί για διαίρεση κάνουμε πολλαπλασιασμό και αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα.

Παραδείγματα

- $\frac{2}{3}:\frac{4}{12}=\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{4}=\frac{2\cdot 12}{3\cdot 4}=\frac{24}{12}=2$
- $\frac{4}{5}:8=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{8}=\frac{4\cdot 1}{5\cdot 8}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$
- $10:\frac{5}{3}=10\cdot\frac{3}{5}=\frac{10\cdot 3}{5}=\frac{30}{5}=6$

Ε. Γενικές ιδιότητες

Ορισμένες πολύ χρήσιμες ιδιότητες των πράξεων (·) και (:) είναι και οι εξής:

- $\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ και $\dfrac{\beta:\alpha}{\gamma:\alpha}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ *(Ιδιότητα της απλοποίησης)*

  Για παράδειγμα:

  $$\frac{18}{27}=\frac{2\cdot 9}{3\cdot 9}=\frac{2}{3},\ \frac{28}{35}=\frac{4\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{4}{5}$$

- $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma,\quad \alpha(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$ *(Επιμεριστική ιδιότητα)*
- $(\alpha\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)\cdot\beta=(\beta:\gamma)\cdot\alpha$

1.10 Να βρεθεί το γινόμενο:

$$\mathbf{A = 1000\cdot 100\cdot 10\cdot 1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}01\cdot 0{,}001}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή:

$$1000\cdot 0{,}001=1,\quad 100\cdot 0{,}01=1\quad \text{και}\quad 10\cdot 0{,}1=1$$

το γινόμενο είναι ίσο με 1.

Πραγματικά, επειδή στον πολλαπλασιασμό δεν έχει σημασία η σειρά των παραγόντων, μπορούμε να γράψουμε:

$$A=1000\cdot 100\cdot 10\cdot 1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}01\cdot 0{,}001=$$
$$=(1000\cdot 0{,}001)\cdot(100\cdot 0{,}01)\cdot(10\cdot 0{,}1)\cdot 1=$$
$$=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1=1$$

1.11 Ποιο είναι το πηλίκο της διαίρεσης:

$$\mathbf{(27\cdot 31\cdot 35\cdot 39\cdot 43):(43\cdot 39\cdot 35\cdot 31)}$$

ΛΥΣΗ

Οι αριθμοί (παράγοντες) 31, 35, 39, 43 απλοποιούνται και έτσι το πηλίκο είναι το 27. Είναι δηλαδή:

$$\frac{27\cdot\cancel{31}\cdot\cancel{35}\cdot\cancel{39}\cdot\cancel{43}}{\cancel{43}\cdot\cancel{39}\cdot\cancel{35}\cdot\cancel{31}}=27$$

1.12 **Η δασκάλα είπε στους μαθητές της τάξης να πολλαπλασιάσουν τον αριθμό που βλέπουν στον πίνακα με το 100. Αντί όμως ο Γιώργος να πολλαπλασιάσει τον αριθμό αυτόν με το 100, τον διαίρεσε με το 100 και βρήκε 23. Πόσο έπρεπε να βρει ο Γιώργος, αν δεν έκανε αυτό το λάθος;** *(Αυστραλία)*

ΛΥΣΗ

Ποιον αριθμό είχε γράψει η δασκάλα στον πίνακα; Αυτό είναι το βασικό ερώτημα στο πρόβλημα αυτό. Ας προσπαθήσουμε να τον βρούμε:

Τον αριθμό αυτό ο Γιώργος τον διαίρεσε με 100 και βρήκε 23. Άρα ο αριθμός που είναι γραμμένος στον πίνακα είναι ο $23 \cdot 100 = 2.300$ (διότι ο πολλαπλασιασμός είναι πράξη αντίστροφη με τη διαίρεση: αν $\alpha : \beta = \gamma$, τότε $\alpha = \beta \cdot \gamma$).

Ο Γιώργος λοιπόν έπρεπε να κάνει τον πολλαπλασιασμό $2.300 \cdot 100$ και να βρει 230.000. Η σωστή απάντηση είναι επομένως ο αριθμός 230.000.

1.13 **Ο Σπύρος έχει προετοιμάσει το $\frac{1}{3}$ των μαθημάτων του για την άλλη μέρα. Αν διαβάσει ένα ακόμα μάθημα, θα έχει κάνει τα μισά μαθήματα. Πόσα μαθήματα έχει για την άλλη μέρα ο Σπύρος;**

ΛΥΣΗ

Όπως αναφέρει το πρόβλημα, η διαφορά του $\frac{1}{3}$ από το $\frac{1}{2}$ είναι 1.

Είναι όμως:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Αφού λοιπόν το $\frac{1}{6}$ των μαθημάτων είναι 1 μάθημα, για την άλλη μέρα ο Σπύρος έχει να διαβάσει 6 μαθήματα.

1.14 **Να βρεθούν τα ψηφία Α, Β, Γ, ώστε ο διπλανός πολλαπλασιασμός να είναι σωστός. Σημειώστε ότι διαφορετικά γράμματα συμβολίζουν διαφορετικά ψηφία.**

$$\begin{array}{r} \mathrm{AB\Gamma} \\ \times \quad 3 \\ \hline \mathrm{BBB} \end{array}$$

(Αυστραλία)

ΛΥΣΗ

Αφού ο ΑΒΓ είναι τριψήφιος, ο αριθμός 3ΑΒΓ, δηλαδή ο ΒΒΒ είναι μεγαλύτερος από το 300. Άρα ο ΒΒΒ θα είναι ένας από τους αριθμούς 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999. Όμως, διαιρώντας τους αριθμούς με 3 βρίσκουμε:

$$
\begin{aligned}
333 &= 3\cdot 111\\
444 &= 3\cdot 148 \qquad (*)\\
555 &= 3\cdot 185\\
666 &= 3\cdot 222\\
777 &= 3\cdot 259\\
888 &= 3\cdot 296\\
999 &= 3\cdot 333
\end{aligned}
$$

Από τα παραπάνω γινόμενα βλέπουμε ότι μόνο το $444 = 3 \cdot 148$ ταιριάζει με τη μορφή $ΒΒΒ = 3 \cdot ΑΒΓ$. Επομένως $Β = 4$, $Α = 1$ και $Γ = 8$.

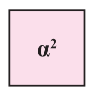
6. Δυνάμεις

Πολλές φορές συναντάμε γινόμενα των οποίων όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι. Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε ονομασίες και συμβολικές εκφράσεις όπως φαίνεται παρακάτω.

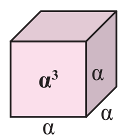
- Το γινόμενο $\boldsymbol{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}$, που έχει **ν** παράγοντες ίσους με το **α**, λέγεται **δύναμη του α στη ν** ή **νιοστή δύναμη του α** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha^\nu}$.

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

- Ο αριθμός **α** λέγεται **βάση της δύναμης** και ο **ν** λέγεται **εκθέτης**.
- Η **δύναμη** του αριθμού στη **δευτέρα**, δηλαδή το $\boldsymbol{\alpha^2}$, λέγεται και **τετράγωνο του α**.



- Η **δύναμη** του αριθμού στην **τρίτη**, δηλαδή το $\boldsymbol{\alpha^3}$, λέγεται και **κύβος του α**.



- Το $\boldsymbol{\alpha^1}$, δηλαδή η **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού α είναι **ο ίδιος ο αριθμός α**. Αν $\alpha \neq 0$, τότε γράφουμε $\alpha^0 = 1$.

$$\alpha^1 = \alpha$$

- Οι **δυνάμεις του 1**, δηλαδή το $\boldsymbol{1^\nu}$, είναι **όλες ίσες με 1**.

$$1^\nu = 1$$

Οι δυνάμεις έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$ και $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$
- $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$
- $(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$ και $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$

Παραδείγματα

- $2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12}$, $3^{10} : 3^8 = 3^{10-8} = 3^2 = 9$
- $(5^6)^8 = 5^{6 \cdot 8} = 5^{48}$, $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$

1.15 **Να γραφεί ο αριθμός 25^{25} ως δύναμη με βάση το 5^5.**

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με την ιδιότητα $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$ είναι:

$$25^{25} = (5^2)^{25} = 5^{2 \cdot 25} = 5^{50} = 5^{5 \cdot 10} = (5^5)^{10}$$

Επομένως $25^{25} = (5^5)^{10}$.

7. Η προτεραιότητα των πράξεων

Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση (**προτεραιότητα των πράξεων**) είναι η ακόλουθη:

1. Υπολογισμός **δυνάμεων**.

2. Εκτέλεση **πολλαπλασιασμών** και **διαιρέσεων**.

3. Εκτέλεση **προσθέσεων** και **αφαιρέσεων**.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε **πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις** με την παραπάνω σειρά.

1. Δυνάμεις → **2.** Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις → **3.** Προσθέσεις και αφαιρέσεις

1.16 **Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:**

$$\mathbf{A=(5-2^2)^{2008}+3\cdot(9-16:2)^{1940}-\frac{5^2\cdot 4}{2\cdot(24+26)}}$$

ΛΥΣΗ

Εκτελούμε, όπου είναι αναγκαίο, πρώτα τις δυνάμεις:

$$A=(5-2^2)^{2008}+3\cdot(9-16:2)^{1940}-\frac{5^2\cdot 4}{2\cdot(24+26)}=(5-4)^{2008}+3\cdot(9-8)^{1940}-\frac{25\cdot 4}{2\cdot 50}=$$

$$=1^{2008}+3\cdot 1^{1940}-\frac{100}{100}=1+3\cdot 1-1=1+3-1=3$$

8. Συνοψίζοντας τις πράξεις

Α. Πράξεις με φυσικούς αριθμούς

♦ **Πρόσθεση** είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς **α** και **β**, τους **προσθετέους**, βρίσκουμε έναν τρίτο φυσικό αριθμό **γ**, που είναι το **άθροισμά** τους και γράφουμε:

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=\gamma}$$

Άθροισμα

$13 + 5 = 18$

Προσθετέοι

Ιδιότητες της πρόσθεσης	
• Το **0** όταν προστεθεί σε έναν φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει.	$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$
• Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος (**Αντιμεταθετική ιδιότητα**).	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$
• Μπορούμε να αντικαθιστούμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύουμε έναν προσθετέο σε άθροισμα (**Προσεταιριστική ιδιότητα**).	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

♦ **Αφαίρεση** είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, **Μ (μειωτέος)** και **Α (αφαιρετέος)** βρίσκουμε έναν αριθμό **Δ (διαφορά)**, ο οποίος όταν προστεθεί στο **Α** δίνει το **Μ**.

$M=A+\Delta$ και γράφουμε

$\Delta=M-A$

Σχόλιο

Στους φυσικούς αριθμούς ο αφαιρετέος Α πρέπει να είναι πάντα μικρότερος ή ίσος του μειωτέου Μ. Σε αντίθετη περίπτωση η πράξη της αφαίρεσης δεν είναι δυνατόν να εκτελεστεί.

♦ **Πολλαπλασιασμός** είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς **α** και **β**, τους **παράγοντες**, βρίσκουμε έναν τρίτο φυσικό αριθμό **γ**, που είναι το **γινόμενό** τους:

$$\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = \gamma}$$

Γινόμενο

$$7 \cdot 6 = 42$$

Παράγοντες

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού	
• Το **1** όταν πολλαπλασιαστεί με έναν φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει.	$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
• Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου (**Αντιμεταθετική ιδιότητα**).	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
• Μπορούμε να αντικαθιστούμε παράγοντες με το γινόμενό τους ή να αναλύουμε έναν παράγοντα σε γινόμενο (**Προσεταιριστική ιδιότητα**).	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
• **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την πρόσθεση**.	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
• **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την αφαίρεση**.	$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$

Β. Πράξεις με κλασματικούς αριθμούς

α) ♦ Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωρισθεί σε **ν** ίσα μέρη, το κάθε ένα από αυτά ονομάζεται **νιοστό** και συμβολίζεται με το $\frac{1}{\nu}$.

αριθμητής

κλασματική γραμμή

παρονομαστής

$$\frac{2}{3}$$

όροι του κλάσματος

διαβάζεται «δύο τρίτα»

♦ Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από **κ** τέτοια ίσα μέρη, συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ και διαβάζεται «**κάπα νιοστά**».

$$\frac{5}{7} = 5 \cdot \frac{1}{7}$$

$$\kappa \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu} \cdot \kappa = \frac{\kappa}{\nu}, \quad \nu \neq 0$$

- Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το **1**.

  Είναι $\frac{8}{3} > 1$, διότι $8 > 3$

- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το **1**.

  $6 = \frac{6}{1}$, $15 = \frac{15}{1}$, $21 = \frac{21}{1}$

β) - Δύο κλάσματα $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}}$ και $\boldsymbol{\frac{\gamma}{\delta}}$ λέγονται **ισοδύναμα** όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι και ίσα και γράφουμε:

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}}$$

$\frac{2}{3}$ και $\frac{10}{15}$ ισοδύναμα

δηλαδή $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

- Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα, τότε τα «χιαστί γινόμενα» $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα. Δηλαδή:

  Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

  Αφού $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ θα είναι

  $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Για να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα ή για να διαπιστώσουμε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, μπορούμε να εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες:

- Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.

  $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

- Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.

  $\frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}$

Σχόλια

- *Η διαδικασία αυτή λέγεται **απλοποίηση του κλάσματος** και έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό με μικρότερους όρους.*

- *Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δηλαδή δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή εκτός του 1) λέγεται **ανάγωγο**.*

  $\frac{7}{12}$ *ανάγωγο, αφού*

  Μ.Κ.Δ.(7, 12) = 1

- *Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα** και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται **ετερώνυμα**.*

$\frac{2}{7}, \frac{5}{7}$ *ομώνυμα*

$\frac{2}{7}, \frac{5}{3}$ *ετερώνυμα*

γ) Για τη σύγκριση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

- Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.

$$\frac{9}{13} > \frac{5}{13}$$

- Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους.

Για να συγκρίνουμε τα $\frac{7}{12}$ και $\frac{5}{16}$ τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα:

$$\frac{7}{12} = \frac{28}{48} \quad \text{και} \quad \frac{5}{16} = \frac{15}{48}$$

Άρα $\frac{7}{12} > \frac{5}{16}$.

- Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

$$\frac{13}{9} < \frac{13}{5}$$

δ) Γενικά, για την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

- Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

$$\frac{7}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7+2}{5} = \frac{9}{5}$$

- Προσθέτουμε ετερώνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.

$$\frac{7}{4} + \frac{2}{3} = \frac{21}{12} + \frac{8}{12} = \frac{29}{12}$$

- Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους.

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$$

- Αφαιρούμε δύο ετερώνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα.

$$\frac{7}{4} - \frac{2}{3} = \frac{21}{12} - \frac{8}{12} = \frac{13}{12}$$

♦ Μερικές φορές αντί να γράφουμε $1+\frac{4}{5}$, γράφουμε πιο απλά $1\frac{4}{5}$. Ο συμβολισμός αυτός, που παριστάνει το άθροισμα ενός **ακέραιου** με ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται **μεικτός αριθμός**.

ε) ♦ Το γινόμενο **δύο κλασμάτων** είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το **γινόμενο των αριθμητών** και παρονομαστή το **γινόμενο των παρονομαστών**.

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$$

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 4}=\frac{15}{28}$$

♦ Το γινόμενο ενός **φυσικού αριθμού** επί ένα **κλάσμα** είναι το κλάσμα με αριθμητή το **γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό** και με τον ίδιο παρονομαστή.

$$\lambda\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lambda=\frac{\alpha\cdot\lambda}{\beta}$$

$$7\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 3}{5}=\frac{21}{5}$$

♦ Τα κλάσματα που έχουν **γινόμενο 1** λέγονται **αντίστροφα**. Επειδή $\boldsymbol{\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=1}$ τα κλάσματα $\boldsymbol{\frac{\gamma}{\delta}}$ και $\boldsymbol{\frac{\delta}{\gamma}}$ είναι **αντίστροφα**.

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{7\cdot 5}{5\cdot 7}=\frac{35}{35}=1$$

♦ Ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων των φυσικών αριθμών στα κλάσματα.

στ) ♦ Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$5:4=5\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

♦ Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$$

$$\frac{7}{3}:\frac{5}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{28}{15}$$

♦ Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται **σύνθετο κλάσμα**.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

♦ Μπορούμε όμως να κάνουμε τη μετατροπή και ως εξής:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Γ. Δεκαδικοί αριθμοί

α) ♦ Στο δεκαδικό μέρος οι τάξεις είναι τα δέκατα, τα εκατοστά, τα χιλιοστά, τα δεκάκις χιλιοστά, τα εκατοντάκις χιλιοστά, τα εκατομμυριοστά κ.λπ.

♦ Στο ακέραιο μέρος οι τάξεις είναι σε μονάδες, δεκάδες κ.λπ.

♦ Δέκα μονάδες μιας τάξης είναι μία μονάδα μεγαλύτερης τάξης.

♦ Σε κάθε δεκαδικό αριθμό διακρίνουμε το **ακέραιο μέρος** και το **δεκαδικό μέρος** του. Αυτά διαχωρίζονται από την **υποδιαστολή**.

♦ Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο της ίδιας τάξης, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει το μεγαλύτερο ψηφίο στην αρχική τάξη. $8{,}97453 < 9{,}432$

♦ Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο της ίδιας τάξης, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το αμέσως επόμενο ψηφίο μεγαλύτερο. $105{,}3842 > 105{,}37896$

♦ Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν δεκαδικό αριθμό:

– Προσδιορίζουμε τη δεκαδική τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.

– Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης, δηλαδή το επόμενο.

– Αν αυτό είναι **μικρότερο του 5**, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται.

Παράδειγμα $957{,}3\underline{8}42 \Rightarrow 957{,}3800$.

– Αν είναι **μεγαλύτερο ή ίσο του 5**, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης **αυξάνεται κατά 1**.

Παράδειγμα $9\underline{5}7{,}3842 \Rightarrow 960{,}0000 = 960$.

β) Δεκαδικό κλάσμα λέγεται το κλάσμα που έχει παρονομαστή μια δύναμη του 10. Κάθε δεκαδικός αριθμός διακρίνεται σε **ακέραιο μέρος** και **δεκαδικό μέρος**, που διαχωρίζονται από την **υποδιαστολή**.

Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $\boldsymbol{\alpha \cdot 10^{\nu}}$, δηλαδή ως γινόμενο ενός αριθμού **α** επί μια δύναμη του **10**. Ο αριθμός **α** είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του **1** και μικρότερο του **10**. Τη μορφή αυτή ονομάζουμε **τυποποιημένη**.

Πράξεις μεταξύ δεκαδικών αριθμών

- Η **πρόσθεση** δεκαδικών αριθμών γίνεται όπως και στους φυσικούς αριθμούς. Τοποθετούμε τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο έτσι, ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη και προσθέτουμε τα ψηφία της ίδιας τάξης.
- Η **αφαίρεση** δεκαδικών αριθμών γίνεται όπως και στους φυσικούς αριθμούς. Τοποθετούμε τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο έτσι, ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη και αφαιρούμε τα ψηφία της ίδιας στήλης.
- Ο **πολλαπλασιασμός** δεκαδικών αριθμών γίνεται όπως και των φυσικών αριθμών. Τοποθετούμε στο αποτέλεσμα της πράξης την υποδιαστολή τόσες θέσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά, όσα είναι συνολικά τα ψηφία στα δεκαδικά μέρη και των δύο παραγόντων.
- Η **διαίρεση** γίνεται όπως και η Ευκλείδεια διαίρεση. Πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτη και το διαιρετέο με την κατάλληλη δύναμη του **10** έτσι, ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός. Όταν εξαντληθεί το ακέραιο μέρος του διαιρετέου, «κατεβάζουμε» το **μηδέν** ως πρώτο δεκαδικό ψηφίο από τον διαιρετέο και τοποθετούμε στο πηλίκο υποδιαστολή.
- Όταν πολλαπλασιάζουμε με **0,1, 0,01, 0,001,** … ή όταν διαιρούμε με **10, 100, 1.000**, … ένα δεκαδικό αριθμό μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα **αριστερά μία, δύο, τρεις** … αντίστοιχα θέσεις.
- Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα δεκαδικό αριθμό με **10, 100, 1.000**, … μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα **δεξιά μία, δύο, τρεις**, … θέσεις, αντίστοιχα.
- Οι **δυνάμεις** των δεκαδικών αριθμών έχουν τις ιδιότητες των δυνάμεων των φυσικών αριθμών. Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, που έχει το αποτέλεσμα, προκύπτει από το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της βάσης, επί τον εκθέτη της δύναμης.

Ασκήσεις και προβλήματα

1.17 **Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:**

$$\mathbf{A=\frac{2023}{2025}+\frac{2025}{2027}+2\left(\frac{1}{2025}+\frac{1}{2027}\right)}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή όλοι οι όροι είναι αριθμοί μεγάλοι, εξετάζουμε μήπως μπορούμε να αποφύγουμε τις πράξεις. Για να αποφύγουμε όμως τις πράξεις πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης.

- Σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$$

μπορούμε να γράψουμε:

$$2\left(\frac{1}{2025}+\frac{1}{2027}\right)=2\cdot\frac{1}{2025}+2\cdot\frac{1}{2027}=\frac{2}{2025}+\frac{2}{2027}$$

- Η παράσταση Α γράφεται:

$$A=\frac{2023}{2025}+\frac{2025}{2027}+2\left(\frac{1}{2025}+\frac{1}{2027}\right)=\frac{2023}{2025}+\frac{2025}{2027}+\frac{2}{2025}+\frac{2}{2027}=$$

$$=\left(\frac{2023}{2025}+\frac{2}{2025}\right)+\left(\frac{2025}{2027}+\frac{2}{2027}\right)=\frac{2023+2}{2025}+\frac{2025+2}{2027}=$$

$$=\frac{2025}{2025}+\frac{2027}{2027}=1+1=2$$

Επομένως η τιμή της παράστασης Α είναι $A=2$.

1.18 **Μέχρι τις 2 μ.μ. ένα αυτοκίνητο είχε διανύσει το $\frac{1}{3}$ της διαδρομής, ενώ μέχρι τις 4 μ.μ. είχε διανύσει το $\frac{1}{2}$ της διαδρομής.**

α) Ποιο μέρος της διαδρομής είχε διανύσει το αυτοκίνητο μέχρι τις 3 μ.μ.;

β) Πόσες ώρες διήρκησε ολόκληρο το ταξίδι;

(Η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν η ίδια σε όλο το μήκος της διαδρομής.)

(Αυστραλία)

ΛΥΣΗ

α) Από τις 2 μέχρι τις 4 το αυτοκίνητο διήνυσε τα:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6} \text{ της διαδρομής}$$

Άρα από τις 2 μέχρι τις 3 διήνυσε το $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ της διαδρομής. Επομένως μέχρι τις 3 μ.μ. το αυτοκίνητο διήνυσε τα:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12} \text{ της συνολικής διαδρομής}$$

β) Αφού από τις 2 μ.μ. έως τις 3 μ.μ., δηλαδή σε 1 ώρα το αυτοκίνητο διήνυσε το $\frac{1}{12}$ της διαδρομής, όλη η διαδρομή διήρκησε:

$$12\cdot 1 = 12 \text{ ώρες}$$

1.19 **Να υπολογιστεί το γινόμενο:**

$$\Gamma=\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{58}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{59}\right)$$

ΛΥΣΗ

Το γινόμενο Γ έχει 59 παράγοντες. Οι παράγοντες αυτοί είναι οι αριθμοί:

$$1+\frac{1}{1},\quad 1+\frac{1}{2},\quad 1+\frac{1}{3},\quad 1+\frac{1}{4},\quad \ldots,\quad 1+\frac{1}{58},\quad 1+\frac{1}{59}$$

Ας δούμε όμως τον κάθε παράγοντα χωριστά:

$$1+\frac{1}{1}=1+1=2,\quad 1+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad 1+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},\quad \ldots,$$

$$1+\frac{1}{59}=\frac{59}{59}+\frac{1}{59}=\frac{60}{59}$$

Το γινόμενο λοιπόν Γ γράφεται και ως εξής:

$$\Gamma=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{59}{58}\cdot\frac{60}{59}=\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot59\cdot60}{2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot58\cdot59}$$

Στο σημείο αυτό δεν θα κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς σε αριθμητή και παρονομαστή, αλλά θα απλοποιήσουμε τους κοινούς παράγοντες. Είναι λοιπόν:

$$\Gamma=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\ldots\cdot\cancel{59}\cdot60}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\ldots\cdot\cancel{58}\cdot\cancel{59}}=60$$

1.20 **Από το διπλανό τετράγωνο έχουν σβηστεί όλοι οι αριθμοί εκτός από αυτόν που βρίσκεται στο κέντρο του τετραγώνου. Αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των τριών αριθμών που βρίσκονται σε κάθε γραμμή, σε κάθε στήλη και σε κάθε διαγώνιο είναι ίσο με 12, τι άθροισμα έχουν οι τέσσερις αριθμοί που βρίσκονται στα γωνιακά τετράγωνα;**

	4	

ΛΥΣΗ

Αν προσθέσουμε τις δύο διαγώνιες, θα πάρουμε το άθροισμα που ζητάμε αυξημένο κατά $4 + 4 = 8$, διότι τον αριθμό 4 τον έχουμε μετρήσει δύο φορές. Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι ίσο με:

$$12 + 12 - 8 = 24 - 8 = 16$$

1.21 **Ποιον αριθμό σχηματίζουν τα τελευταία τέσσερα ψηφία του αριθμού:**

$$\mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 201 + 2021}$$

ΛΥΣΗ

Ανάμεσα στους αριθμούς 1, 2, 3, …, 201 υπάρχουν οι αριθμοί 10, 100, 200.

Το γινόμενο των τριών αυτών αριθμών αυτών είναι 200.000 που σημαίνει ότι ο αριθμός:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 201$$

τελειώνει τουλάχιστον σε πέντε μηδενικά.

Προσθέτοντας λοιπόν στο γινόμενο τον αριθμό 2021, συμπεραίνουμε ότι τα τελευταία τέσσερα ψηφία του αθροίσματος σχηματίζουν τον αριθμό 2021.

1.22 **Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:**

$$\mathbf{A = (101 + 100 + 99 + \ldots + 3 + 2) - (100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1)}$$

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα:

$$(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)$$

Για το λόγο αυτό ζευγαρώνουμε κατάλληλα τους αριθμούς που βρίσκονται στις παρενθέσεις και παίρνουμε:

$$A = (101 - 100) + (100 - 99) + (99 - 98) + \ldots + (3 - 2) + (2 - 1) =$$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{100-\text{προσθετέοι}} = 100$$

1.23 **Αν τα Α, Β, Γ, Δ παριστάνουν ψηφία και διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικά ψηφία, να ξαναφτιαχτεί ο διπλανός πολλαπλασιασμός.**

$$\begin{array}{r} \mathbf{ΑΒΓΔ} \\ \times \quad \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{ΔΓΒΑ} \end{array}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή το γινόμενο ΔΓΒΑ είναι τετραψήφιος, όπως και ο ΑΒΓΔ, πρέπει $Α = 1$ ή $Α = 2$. (Αν για παράδειγμα $Α \geq 3$, τότε ο $4 \times ΑΒΓΔ$ είναι πενταψήφιος.)

i) Αν $Α = 1$, τότε προκύπτει ο διπλανός πολλαπλασιασμός, που είναι αδύνατος διότι ο $4 \times Δ$ δεν τελειώνει ποτέ σε 1! Άρα $Α = 2$.

$$\begin{array}{r} 1\,ΒΓΔ \\ \times \quad 4 \\ \hline ΔΓΒ1 \end{array}$$

ii) Αν $Α = 2$, ο πολλαπλασιασμός παίρνει τη διπλανή μορφή. Επειδή ο $4 \times Δ$ τελειώνει σε 2, πρέπει $Δ = 3$ (διότι $4 \cdot 3 = 12$) ή $Δ = 8$ (διότι $4 \cdot 8 = 32$).

$$\begin{array}{r} 2\,ΒΓΔ \\ \times \quad 4 \\ \hline ΔΓΒ2 \end{array}$$

- Η περίπτωση $Δ = 3$ απορρίπτεται, διότι ο $4 \times 2ΒΓΔ$ είναι μεγαλύτερος από τον 4.000 άρα και από τον 3ΓΒ2. Άρα $Δ = 8$.

- Με $Δ = 8$ ο πολλαπλασιασμός παίρνει τη διπλανή μορφή.

$$\begin{array}{r} 2ΒΓ8 \\ \times \quad 4 \\ \hline 8ΓΒ2 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $4 \times Β$ δεν πρέπει να δώσει κρατούμενο, διότι $4 \times 2 = 8$ και στο γινόμενο το ψηφίο των χιλιάδων είναι 8. Άρα $Β = 1$ ή $Β = 2$. Δε γίνεται όμως να είναι $Β = 2 = Α$. Άρα $Β = 1$ και έτσι ο πολλαπλασιασμός παίρνει νέα μορφή.

$$\begin{array}{r} 21\,Γ8 \\ \times \quad 4 \\ \hline 8Γ1\,2 \end{array}$$

Πρέπει τώρα το γινόμενο $4 \times Γ$ συν το κρατούμενο 3 (από το γινόμενο $4 \cdot 8$) να τελειώνει σε 1. Άρα $Γ = 2$ (διότι $4 \times 2 + 3 = 11$) ή $Γ = 7$ (διότι $4 \times 7 + 3 = 31$).

Η περίπτωση $Γ = 2$ απορρίπτεται, αφού $Α = 2$ και πρέπει $Α \neq Γ$. Άρα $Γ = 7$. Η τιμή $Γ = 7$ είναι δεκτή, κάτι που φαίνεται στον διπλανό πολλαπλασιασμό.

$$\begin{array}{r} 2178 \\ \times \quad 4 \\ \hline 8712 \end{array}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Βασικές ασκήσεις

1.24 Να κάνετε τις προσθέσεις:

α) $\begin{array}{r} 795 \\ 986 \\ 48 \\ +\ 79 \\ \hline \end{array}$

β) $\begin{array}{r} 7.647 \\ 9.879 \\ 948 \\ +\ \ 95 \\ \hline \end{array}$

1.25 Να κάνετε τις αφαιρέσεις:

α) $\begin{array}{r} 9.761 \\ -\ \ 895 \\ \hline \end{array}$

β) $\begin{array}{r} 13.423 \\ -\ 9.647 \\ \hline \end{array}$

1.26 Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $73{,}46 + 92{,}7$

β) $173{,}21 - 95{,}79$

1.27 Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) $\begin{array}{r} 894 \\ \times\ 87 \\ \hline \end{array}$

β) $\begin{array}{r} 987 \\ \times 789 \\ \hline \end{array}$

1.28 Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις:

α) $\begin{array}{r|l} 19.716 & 53 \\ \cline{2-2} & \end{array}$

β) $\begin{array}{r|l} 141.757 & 49 \\ \cline{2-2} & \end{array}$

1.29 Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $\begin{array}{r} 57{,}25 \\ \times\ 68{,}4 \\ \hline \end{array}$

β) $\begin{array}{r|l} 1.905 & 7{,}5 \\ \cline{2-2} & \end{array}$

1.30 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{15}$

β) $\frac{3}{8} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$

1.31 Να βρείτε το άθροισμα των αντίστροφων των διαιρετών του αριθμού 18 και να το γράψετε ως ένα απλοποιημένο κλάσμα. *(Ηνωμένες Πολιτείες)*

1.32 Ποιος αριθμός πρέπει να μπει στο κουτάκι, ώστε $59+154+\boxed{}-53=247$;

1.33 Ποιος αριθμός θα μπει στη θέση του α, ώστε $\dfrac{15}{7+\alpha}=\dfrac{5}{10}$;

1.34 Ποιος αριθμός είναι στο κουτάκι, ώστε $65+\boxed{}:13=160$;

1.35 Να γράψετε τον αριθμό $\dfrac{2021}{2{,}021}$ στην πιο απλή του μορφή.

1.36 Ποιος δεκαδικός είναι ο αριθμός $\dfrac{2}{100}+\dfrac{3}{1.000}+\dfrac{7}{100.000}$;

1.37 Το ένα τρίτο ενός αριθμού είναι ίσο με 25. Ποιο είναι το διπλάσιο του αριθμού αυτού;

1.38 Να βρείτε ένα κλάσμα ανάμεσα στο $\dfrac{1}{100}$ και το $\dfrac{1}{101}$.

1.39 Ποιο είναι το ψηφίο των μονάδων του γινομένου $94\cdot 89\cdot 2007\cdot 123456789$;

2. Αριθμοί με άγνωστα ψηφία

1.40 Στη διπλανή πρόσθεση τα γράμματα παριστάνουν ψηφία. Διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικά ψηφία. Ποια ψηφία κρύβονται κάτω από τα γράμματα αυτά;

$$\begin{array}{r} \text{A T} \\ +\quad \text{A} \\ \hline \text{T E E} \end{array}$$

1.41 Στη διπλανή πρόσθεση βλέπετε την πρόσθεση ενός τριψήφιου αριθμού με έναν διψήφιο. Τα γράμματα παριστάνουν ψηφία. Διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικά ψηφία. Ποιο είναι το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού ΝΑΙ;

$$\begin{array}{r} \text{N A I} \\ +\quad \text{A N} \\ \hline 1.0\,1\,0 \end{array}$$

Α: 13 **Β:** 11 **Γ:** 14 **Δ:** 15 **Ε:** Τίποτα

1.42 Στη διπλανή αφαίρεση δύο πενταψήφιων αριθμών ορισμένα ψηφία έχουν αντικατασταθεί με γράμματα. Διαφορετικά γράμματα μπορεί να παριστάνουν το ίδιο ψηφίο. Να βρείτε το άθροισμα:

$$\begin{array}{r} \alpha 4.\beta 7\gamma \\ -5\delta.8\varepsilon 6 \\ \hline 28.499 \end{array}$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$$

(Αυστραλία)

1.43 Αν διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικά ψηφία, να ξανακατασκευάσετε τον διπλανό πολλαπλασιασμό.

$$\begin{array}{r} \text{Τ Α} \\ \times\,\text{Ν Α} \\ \hline \text{Ν Τ Α} \\ +\text{Τ Α}\phantom{\text{ Α}} \\ \hline \text{Θ Ε Α} \end{array}$$

1.44 Στον διπλανό πολλαπλασιασμό τα γράμματα παριστάνουν ψηφία. Διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικά ψηφία. Να βρείτε ποια ψηφία παριστάνουν τα γράμματα Α, Β, Γ.

$$\begin{array}{r} \text{Α Β} \\ \times\quad \Gamma \\ \hline \text{Α Α Α} \end{array}$$

1.45 Στον διπλανό πολλαπλασιασμό τα γράμματα παριστάνουν ψηφία. Διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικά ψηφία. Να ξανακατασκευάσετε με τα κατάλληλα ψηφία τον διπλανό πολλαπλασιασμό.

$$\begin{array}{r} \text{ΑΒ}\Gamma \\ \times\quad \Gamma \\ \hline \Delta\text{Β}\Gamma \end{array}$$

1.46 Στη διπλανή πρόσθεση τα γράμματα παριστάνουν ψηφία. Διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικά ψηφία. Ποιους αριθμούς παριστάνουν οι λέξεις ΕΛΛΗ, ΚΙΚΗ, ΚΑΤΙΑ;

$$\begin{array}{r} \text{ΕΛΛΗ} \\ +\text{ΚΙΚΗ} \\ \hline \text{ΚΑΤΙΑ} \end{array}$$

3. Πράξεις με πολλούς αριθμούς

1.47 Να βρείτε τη διαφορά στην παρακάτω παράσταση:

$$A = (123 + 234 + 345 + 456 + 567) - (234 + 345 + 456 + 567)$$

1.48 Να βρείτε την τιμή της παρακάτω παράστασης:

$$A = (2008 + 2008 + 2008 + 2008 + 2008 + 2008) : (2008 + 2008)$$

1.49 Να βρείτε την παράσταση:

$$A = \frac{4 \cdot 55}{110} + \frac{6 \cdot 65}{130} + \frac{8 \cdot 75}{150} + \frac{10 \cdot 85}{425}$$

1.50 Ο Γιώργος, παίζοντας με τον υπολογιστή του, πολλαπλασίασε τους αριθμούς 999999999 και 888888888. Ποιο είναι το ψηφίο των εκατοντάδων του γινομένου που βρήκε;

1.51 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2023}{2025} + \frac{2025}{2027} + \frac{2027}{2029} + 2\left(\frac{1}{2025} + \frac{1}{2027} + \frac{1}{2029}\right)$$

1.52 Ποιο είναι το αποτέλεσμα στην παρακάτω παράσταση:

$$A = 50 - 49 + 48 - 47 + 46 - 45 + \ldots - 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1$$

1.53 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(4 + 6 + 8 + \ldots + 104) - (1 + 3 + 5 + \ldots + 101)$$

1.54 Αν $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 196 + 198 + 200 = 10.100$, πόσο είναι το άθροισμα:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

1.55 Να βρείτε το αποτέλεσμα:

$$(6 + 7 + 8 + \ldots + 104 + 105) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100)$$

1.56 Να βρείτε το αποτέλεσμα:

$$(200 + 199 + 198 + \ldots + 101) - (100 + 99 + 98 + \ldots + 1)$$

1.57 Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2019}\right)$$

1.58 Να βρείτε το αποτέλεσμα:

$$A = (1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 121) - (2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 120)$$

1.59 Σε έναν διαγωνισμό δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

$$(2000 + 1999 + \ldots + 1001 + 1000) - (1000 + 999 + \ldots + 2 + 1) = 1000 \cdot \boxed{}$$

Ποιος αριθμός πρέπει να μπει στο κουτάκι, ώστε το αποτέλεσμα να είναι σωστό;

1.60 Να υπολογίσετε την αριθμητική παράσταση:

$$1+3+5+\ldots+2027-2-4-6-\ldots-2026$$

1.61 Ποιο είναι το ψηφίο των μονάδων στο άθροισμα $0+1+2+3+\ldots+97+98$;

1.62 Ένας μαθητής πρόσθεσε με το κομπιουτεράκι του όλους τους αριθμούς από το 1 έως το 1.000. Ποιο είναι το ψηφίο των μονάδων στο άθροισμα αυτό;

4. Συμπληρωματικές ασκήσεις και προβλήματα

1.63 Ένα παιδί παρατήρησε ότι για να γράψει την ημερομηνία 2 Φεβρουαρίου του 2020, δηλαδή 02/02/2020, χρησιμοποίησε μόνο δύο ψηφία. Ποια ήταν η προηγούμενη ακριβώς ημερομηνία που μπορεί να γράψει με αυτόν τον τρόπο;

1.64 Πέντε διαφορετικοί μεταξύ τους φυσικοί αριθμοί διάφοροι του 0, έχουν άθροισμα 500. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει ο ένας από αυτούς;

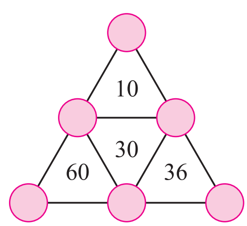
1.65 Το έτος 2210 λέγεται «φθίνων έτος» διότι τα τρία τελευταία ψηφία του 2, 1, 0 είναι 3 συνεχόμενοι (διαδοχικοί) αριθμοί με φθίνουσα σειρά. Ένα τέτοιο έτος ήταν και το 1987. Ποιο είναι το μεθεπόμενο «φθίνων έτος»;

1.66 Ένα στρογγυλό ρολόι (με δείκτες) πάει μπροστά 3 λεπτά το δωδεκάωρο. Αν αυτή τη στιγμή το ρυθμίσω ώστε να δείχνει την πραγματική ώρα, ύστερα από πόσες μέρες θα ξαναδείξει την πραγματική ώρα; *(Αυστραλία)*

1.67 Ποια ψηφία παριστάνουν τα γράμματα α, β, γ στη διπλανή πρόσθεση; Γνωρίζουμε ότι $\alpha<\beta$ και διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικά ψηφία.

$$\begin{array}{r} \alpha\,\beta\,\alpha \\ \beta\,\alpha\,\beta \\ +\ \alpha\,\alpha\,\alpha \\ \beta\,\beta\,\beta \\ \hline \gamma\,\gamma\,\gamma \end{array}$$

1.68 Να σημειώσετε μέσα στους κενούς κύκλους τους αριθμούς 1 έως 6 από μία φορά τον καθένα με τέτοιο τρόπο ώστε το γινόμενο των αριθμών που βρίσκονται στις κορυφές καθενός από τα τέσσερα τρίγωνα να είναι όσο ο σημειωμένος αριθμός στο εσωτερικό του.



1.69 Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $(2 \cdot 5)^4 + 4(3+2)^2$ **β)** $(2+3)^3 - 8 \cdot 3^2$

1.70 Να βρείτε τη δύναμη που ισούται με το μισό του αριθμού 2^{1000}.

1.71 Ο δάσκαλος είπε στην τάξη ότι μόλις οι μαθητές πάνε στο Γυμνάσιο θα μάθουν την παρακάτω ιδιότητα των δυνάμεων $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$. Στη συνέχεια τους ζήτησε να βρουν σε ποια δύναμη πρέπει να υψωθεί ο αριθμός 4^4 για να προκύψει ο αριθμός 8^8. Ο Αποστόλης που είναι σπίρτο στα Μαθηματικά απάντησε ύστερα από λίγο: «Στην 3η». Πώς βρήκε ο Αποστόλης τον εκθέτη 3;

5. Αριθμοί με πολλά ψηφία

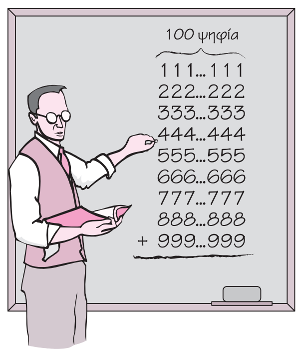
1.72 Να βρείτε το άθροισμα $555.555 + 5.555$.

1.73 Να βρείτε το άθροισμα $99.999 + 999$.

1.74 Όλα τα ψηφία δύο φυσικών αριθμών είναι 1. Ο ένας έχει 100 ψηφία (δηλαδή είναι ο $\underbrace{111\ldots111}_{100 \text{ ψηφία}}$) και ο άλλος 150 (δηλαδή είναι ο $\underbrace{111\ldots111}_{150 \text{ ψηφία}}$). Ποιο είναι το άθροισμά τους;

1.75 Να βρείτε το άθροισμα $\underbrace{555\ldots555}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{555\ldots555}_{30 \text{ ψηφία}}$.

1.76 Είναι σωστό ότι $\underbrace{111\ldots111}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{999\ldots999}_{100 \text{ ψηφία}} = \underbrace{1000\ldots000}_{101 \text{ ψηφία}}$;



1.77 Να βρείτε το άθροισμα των εννέα αριθμών που εμφανίζονται στον διπλανό πίνακα. Όλοι οι αριθμοί έχουν από εκατό ψηφία ο καθένας.

1.78 Ονομάζουμε Α τον αριθμό $\underbrace{999\ldots999}_{100\text{ ψηφία}}+\underbrace{999\ldots999}_{80\text{ ψηφία}}$. Οι επόμενες ερωτήσεις αναφέρονται στον Α.

α) Πόσα ψηφία έχει;

β) Να βρείτε ποιο ψηφίο είναι το:

i) 1ο **ii)** 21ο **iii)** 22ο **iv)** 50ό

v) 80ό **vi)** 100ό **vii)** 101ο

1.79 Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $\underbrace{555\ldots555}_{200\text{ ψηφία}}+\underbrace{555\ldots555}_{100\text{ ψηφία}}$ **β)** $\underbrace{666\ldots666}_{80\text{ ψηφία}}+\underbrace{666\ldots666}_{20\text{ ψηφία}}$

γ) $\underbrace{777\ldots777}_{70\text{ ψηφία}}+\underbrace{777\ldots777}_{40\text{ ψηφία}}$

1.80 Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + 111111111$

β) $5 + 55 + 555 + 5555 + \ldots + 555555555$

γ) $9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + 999999999$

1.81 Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α) $\underbrace{111\ldots111}_{500\text{ ψηφία}}+\underbrace{111\ldots111}_{300\text{ ψηφία}}$ **β)** $\underbrace{111\ldots111}_{200\text{ ψηφία}}+\underbrace{111\ldots111}_{200\text{ ψηφία}}$

γ) $\underbrace{111\ldots111}_{100\text{ ψηφία}}-\underbrace{111\ldots111}_{60\text{ ψηφία}}$ **δ)** $\underbrace{444\ldots444}_{100\text{ ψηφία}}+\underbrace{444\ldots444}_{80\text{ ψηφία}}$

1.82 Να βρείτε τα αθροίσματα ή τις διαφορές:

α) $\underbrace{111\ldots111}_{100\text{ ψηφία}}+\underbrace{222\ldots222}_{200\text{ ψηφία}}+\underbrace{333\ldots333}_{300\text{ ψηφία}}$

β) $\underbrace{111\ldots111}_{100\text{ ψηφία}}+\underbrace{222\ldots222}_{200\text{ ψηφία}}+\underbrace{333\ldots333}_{300\text{ ψηφία}}+\underbrace{444\ldots444}_{400\text{ ψηφία}}$

γ) $\underbrace{222\ldots222}_{200\text{ ψηφία}}-\underbrace{111\ldots111}_{100\text{ ψηφία}}$ **δ)** $\underbrace{111\ldots111}_{200\text{ ψηφία}}-\underbrace{222\ldots222}_{100\text{ ψηφία}}$