

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
 $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Μονάδες 7

- A2.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$

γ) Για κάθε συνάρτηση f , το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f , εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f .

δ) $(\ln |x|)' = -\frac{1}{x}$, για κάθε $x < 0$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x + 1$ και $g(x) = x + 2$, για τις οποίες ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφή της, f^{-1} .

Μονάδες 8

B3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Μονάδες 4

B4. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x^2 - 9}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + \alpha x, & \text{για } x \geq 0 \\ x^2 - \alpha, & \text{για } x < 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να εξετάσετε αν το σημείο $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 7

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η κλίση της στο σημείο $M(x, f(x))$ είναι $3x^2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Μονάδες 8

- Δ3.** Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο M ξεκινά από το σημείο $N(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων O . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ