

Τριγωνομετρία : Από τη μέτρηση των άστρων στην καθημερινή ζωή

«Ίσως τίποτα άλλο δεν κατέχει τόσο κεντρική θέση στα μαθηματικά όσο η Τριγωνομετρία »

Herbart J.F(1890)

Περίληψη

Πολλοί μαθητές αναρωτιούνται σχετικά με τη χρησιμότητα και την εφαρμογή των Μαθηματικών στη ζωή μας. Στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα δε συνηθίζονται αναφορές στα σχολικά βιβλία σε αυτό το θέμα κυρίως στις τάξεις του Λυκείου όπου όλες οι έννοιες παρουσιάζονται θεωρητικά, χωρίς τη δέουσα πρακτική εφαρμογή. Η Τριγωνομετρία αποτελεί ένα κεφάλαιο των Μαθηματικών που διδάσκεται και στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο και προσφέρεται για να δώσει χειροπιαστές απαντήσεις τους μαθητές. Με αυτήν την εργασία θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε τη μεγάλη αξία της Τριγωνομετρίας στην εξέλιξη της επιστήμης των Μαθηματικών αλλά και τη διδακτική της αξία για κάθε μαθητή.

Λέξεις κλειδιά: Διδασκαλία, Τριγωνομετρία, Ιστορία, Κλίση, Πρακτική εφαρμογή.

Λίγα λόγια για την Τριγωνομετρία

Μέσα από τη διδακτική εμπειρία ο μαθητής ακούγοντας τη λέξη τριγωνομετρία σχηματίζει τη λανθασμένη εντύπωση πως έχει να κάνει με έναν κλάδο της Γεωμετρίας και ειδικότερα κάποια προέκτασή της. Ίσως το πρώτο συνθετικό της λέξης Τριγωνομετρία να τους παραπέμπει εκεί. Στο κοντινό παρελθόν, περί τα μέσα της δεκαετίας 1970-1980 είχε αποδοθεί στην Τριγωνομετρία το επίθετο «ευτελής», κυρίως λόγω της επιρροής των Bourbaki που με επικεφαλής τον J.Dieudonne, την τοποθετούσε στους δουλικούς-δευτερεύοντες κλάδους των Μαθηματικών(Maor). Ωστόσο, θα διαπιστώσουμε παρακάτω πως μπορούμε να τη βγάλουμε από αυτήν την κατηγορία και να γίνουμε εμείς θεράποντές της, κυρίως λόγω της εφαρμογής της στη ζωή και στις ανάγκες του ανθρώπου, στις λύσεις που δίνει και στην ομορφιά που αναδεικνύεται όταν αυτή ξεδιπλώνεται. Μπορεί κάποιοι να βλέπουν μόνο μια αλγεβροποιημένη Γεωμετρία με «βαρείς» τύπους άνευ νοήματος. Σίγουρα μπορούμε να αντιστρέψουμε αυτήν την άποψη, κυρίως στο μυαλό των μαθητών.

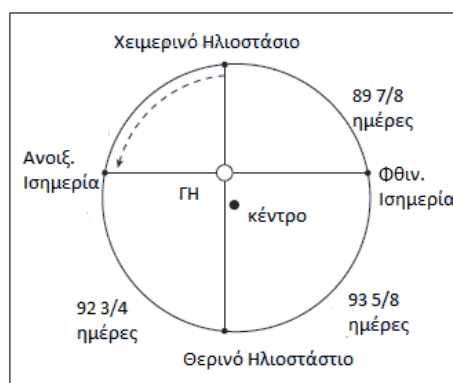
Μετρώντας τ' αστέρια και τη Γη

Οι ανάγκες των ανθρώπων λοιπόν να υπολογίσουν τα ηλιοστάσια, τις αποστάσεις των αστεριών και άλλα παρόμοια προβλήματα μέτρησης, οδήγησαν στην ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας. Οι Βαβυλώνιοι (1500 π.Χ.), σύμφωνα με ιστορικούς, φαίνεται να είναι οι πρώτοι που γνώριζαν τεχνικές για τους αστρονομικούς υπολογισμούς τους

και στο πρόβλημα 56 του πάπυρου του Rhind(1650 π.Χ.) συναντάται η πρώτη γνωστή σχέση Τριγωνομετρίας, δηλαδή ο λόγος του ύψους της πυραμίδας προς το μισό της βάσης της. Οι αρχαίοι Έλληνες θεωρούσαν ότι τα αστέρια είναι τοποθετημένα σε μια γιγάντια, ουράνια σφαίρα κι έτσι για να μετρήσουν την απόσταση, προσπάθησαν να μετρήσουν τη γωνία που σχηματίζουν.

Στην Ελληνιστική και Αλεξανδρινή περίοδο, ο Αρίσταρχος ο Σάμιος(310-230 π.Χ.) συγγράφει την πραγματεία «Στις αποστάσεις του Ήλιου και της Σελήνης» που περιέχει σχέσεις μεταξύ γωνιών και πλευρών τριγώνου, τους γνωστούς τριγωνομετρικούς λόγους.

Ο Ίππαρχος ο Ρόδιος(180-125 π.Χ.), είχε να αντιμετωπίσει ένα βασικό πρόβλημα της Αστρονομίας : Δοθέντος τόξου κύκλου, να υπολογιστεί η χορδή του τόξου (απόσταση αστεριών).



Το πρώτο όμως πρόβλημα Τριγωνομετρίας διατυπώνεται ως εξής: Οι εποχές του χρόνου έχουν άνιση διάρκεια. Ο Χειμώνας έχει τη μικρότερη (89 ημέρες) και το καλοκαίρι (93 κ 5/8 ημέρες) τη μεγαλύτερη. Ο Ίππαρχος χρησιμοποίησε αυτή τη διάρκεια για να προσδιορίσει το μήκος του τόξου που διέγραψε η τροχιά του Ηλίου κάθε εποχή. Έτσι κατάφερε να υπολογίσει τα μήκη των χορδών που συνδέονται με τη θέση του Ήλιου στο τέλος της κάθε εποχής, τα οποία τον βοήθησαν να προσδιορίσει την απόσταση της Γης από το κέντρο της τροχιάς του.

Θέλησε λοιπόν να μετρήσει τη γωνία που σχηματίζουν δύο ευθύγραμμα τμήματα, η οποία υπολογίζεται από το μήκος του τόξου του κύκλου που σχηματίζεται από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα. Το μήκος του τόξου αυτού μπορεί να παρασταθεί σαν το κλάσμα $45^\circ = 45/360$ της περιφέρειας του κύκλου. Δοθείσας της ακτίνας του κύκλου, το μήκος υπολογίζεται με τη μονάδα μέτρησης αυτής. Η απόσταση της Γης από το κέντρο της τροχιάς του Ηλίου, υπολογίζεται θεωρώντας το μισό της χορδής και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ο Ίππαρχος υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους αστρονόμους της αρχαιότητας και ο πρώτος Έλληνας που ανέπτυξε ακριβή μοντέλα για την κίνηση του Ηλίου και της Σελήνης και τόσο με τις θεωρίες του, όσο και με την υπολογιστική τριγωνομετρία του, πιθανολογείται ότι ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε μια αξιόπιστη μέθοδο πρόβλεψης των Ηλιακών Εκλείψεων. Ο

Ίππαρχος είναι και ο εφευρέτης του περίφημου Αστρολάβου, ο οποίος ήταν από τα πρώτα όργανα μέτρησης συντεταγμένων των αστεριών.

Ο Μενέλαος(100 μ.Χ.) θεωρείται ένας ακόμη από τους θεμελιωτές της αρχαίας ελληνικής τριγωνομετρίας, καθώς συνέγραψε ένα έργο περί Τριγωνομετρίας, αποτελούμενο από βιβλία, θέτοντας έτσι τις βάσεις για την ανάπτυξη της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας.

Επιπλέον ένας ακόμη σημαντικός μαθηματικός, αστρονόμος και γεωγράφος υπήρξε ο Πτολεμαίος ο Αλεξανδρεύς(100-178 μ.Χ.). Ένα από τα σημαντικότερα συγγράμματά του είναι η «Μαθηματική Σύνταξις»,η οποία έθεσε τις βάσεις για την Αστρονομία. Ο Πτολεμαίος δημιούργησε ένα ενιαίο δόμημα συγκεντρώνοντας όλες τις παλαιότερες παρατηρήσεις και θεωρίες, το οποίο αποτέλεσε πρότυπο για τους μετέπειτα Αστρονόμους. Στη συνέχεια, κατά τη διάρκεια της Ιστορίας, με μεταφράσεις και αλλαγές στον τίτλο μετονομάστηκε σε «Αλμαγέστη», από την αραβική γλώσσα (al-mijsty = σκελετός συμφώνων). Στο δέκατο και ενδέκατο μάλιστα κεφάλαιο του πρώτου βιβλίου της Αλμαγέστης, γίνεται ένας συστηματικός υπολογισμός των μηκών των χορδών κεντρικών γωνιών εγγεγραμμένων πολυγώνων σε κύκλο, συνδέοντάς τις με τις κεντρικές γωνίες των πολυγώνων.

Ωστόσο, το μεγάλο βήμα για την ανάπτυξη της τριγωνομετρίας πραγματοποιήθηκε με την συμβολή των Αράβων, στα έργα των οποίων εισάγονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί, εμφανίζονται τα θεωρήματα του ημιτόνου και του συνημιτόνου και γίνεται μια ανεξάρτητη μελέτη του τριγώνου.

Μια ματιά μέσω της Επιστημολογίας και της Διδακτικής των Μαθηματικών

Για το Δάσκαλο των Μαθηματικών είναι συχνή η εμφάνιση επιστημολογικών ερωτημάτων κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού της διδασκαλίας του αντικειμένου και της καθημερινής πρακτικής εντός της τάξης. Αυτό ακριβώς είναι που την κρατά ζωντανή και την ανατροφοδοτεί με αναστοχαστική και μεταγνωστική διάθεση. Έτσι η καθημερινή ενασχόληση με τη διδασκαλία Μαθηματικών εννοιών γίνεται ωριμότερη και αποδοτικότερη. Η επιστημολογία των Μαθηματικών σύμφωνα με τον Piaget έχει να αντιμετωπίσει τρία προβλήματα.[Σπύρου]

- i. Γιατί τα Μαθηματικά είναι τόσο αποδοτικά ενώ στηρίζονται σε σχετικά φτωχές και ελάχιστες στο πλήθος έννοιες, αξιώματα, θεωρήματα;
- ii. Γιατί έχουν αναγκαίο και καθολικό χαρακτήρα και παραμένουν αυστηρά και σταθερά σε αντίθεση με τον κατασκευαστικό τους χαρακτήρα που (πολλές φορές) προκαλεί πηγή ανωμαλιών;
- iii. Γιατί συμφωνούν τόσο πολύ με την πείρα μας ή την φυσική πραγματικότητα σε αντίθεση με τον απόλυτο παραγωγικό τους χαρακτήρα;

Η εκπαίδευση των Μαθηματικών μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω διάφορων επικοινωνιακών περιβαλλόντων, καθένα από τα οποία προϋποθέτει διαφορετική επιστημολογία. Ένα είδος επιστημολογίας που στάθηκε με καίριο τρόπο στην ανάπτυξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι η «εργαλειακή», δηλαδή σε εκείνη που κυριαρχούν η μέτρηση και η εφαρμογή. Αυτή είναι μια συνιστώσα σημαντική, η οποία πρέπει να ληφθεί υπόψη τόσο από το διδάσκοντα όσο και από τους θεμελιωτές των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών.

Η άποψη της Διδακτικής των Μαθηματικών

Για τη Διδακτική των Μαθηματικών αποτελεί βασική επιδίωξη η μελέτη των διαφορετικών αντιλήψεων που δημιουργούνται για μια Μαθηματική έννοια (Λιναρδάκης).

Η σπουδαιότητα της επιστημολογικής θεμελίωσης μιας έννοιας από τη μεριά της Διδακτικής των Μαθηματικών αναδεικνύεται μέσα από τις παρακάτω τρεις κατευθύνσεις (Artigue):

- i. Τη μελέτη τόσο της ιστορικής προέλευσης των Μαθηματικών εννοιών καθώς και των ιστορικών-κοινωνικών συνθηκών.
- ii. Την εργασία που συσχετίζει τη διαδικασία που αυτές δομήθηκαν καθώς και τον τρόπο που αυτές μαθαίνονται.
- iii. Τη μελέτη της λειτουργίας αυτών των εννοιών και στο μαθηματικό πλαίσιο και στις σχέσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στις διαφορετικές αντιλήψεις που διαμορφώνονται για την εκάστοτε έννοια.

Η διδασκαλία αυτών των εννοιών στα παιδιά ενδέχεται να μην έχει ως βασικό της άξονα την ιστορική εξέλιξη της έννοιας καθώς και τον τρόπο που εφαρμόζεται στην πραγματική ζωή ή στο φυσικό τους περιβάλλον. Αυτό οφείλεται ξεκάθαρα και στο ύψος διδασκαλίας του κάθε εκπαιδευτικού και στους στόχους που θέτει το Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Τα παιδιά αναρωτιούνται διαρκώς για τη χρησιμότητα των εννοιών που διδάσκονται. Είναι σημαντικό να λαμβάνουν απαντήσεις που έχουν ως άξονες την ιστορία της έννοιας αλλά και την πρακτική της εφαρμογή.

Η έννοια της κλίσης στα σχολικά Μαθηματικά της Ελλάδας

Η έννοια της εφαπτομένης μια οξείας γωνίας, δηλαδή της κλίσης, είναι η πρώτη τριγωνομετρική έννοια που εμφανίστηκε στην αρχαιότητα (Gillings, Robins). Οι Αιγύπτιοι ήθελαν να κατασκευάσουν πυραμίδες που να έχουν την ίδια κλίση σε κάθε μια από τις έδρες τους. Εισήγαγαν μια έννοια αντίστοιχη με αυτήν της εφαπτομένης, τη συνεφαπτομένη, και αναφέρονταν σε αυτήν με τη λέξη «σέκτ» αναφερόμενοι στην οριζόντια απόσταση μιας πλάγιας ευθείας από την κατακόρυφο.

Στο Γυμνάσιο έτσι εισάγεται η έννοια της εφαπτομένης, μέσα από ορθογώνια τρίγωνα και τον λόγο των πλευρών τους και απουσιάζει ο συσχετισμός των χορδών και των τόξων ενός κύκλου.

Στο Λύκειο και συγκεκριμένα στη Β' Λυκείου η τριγωνομετρία αποτελεί βασικό κεφάλαιο της Άλγεβρας όμως είναι μακριά από πρακτικές εφαρμογές της.

Την έννοια της κλίσης αποφασίσαμε να επεξεργαστούμε και να κάνουμε μια πρακτική εφαρμογή, παρόμοια με αυτήν των Αιγυπτίων. Βέβαια το πράξαμε στα πλαίσια της Β' Τάξης του Λυκείου και στοχευμένα, μετά από την ενασχόληση με τη θεωρία, όπου οι μαθητές να μην εργάζονται, προσπαθώντας να κατανοήσουν το λόγο ύπαρξης όλων αυτών των εννοιών και να τις συνδέσουν μεταξύ τους. Έγινε έτσι κυρίως για να μετρηθεί η «ένταση» του ενδιαφέροντος που θα επιδείξουν, ώστε να αποδώσουν στη δραστηριότητα που επιλέξαμε.

Σχέδιο Μαθήματος-Εξέλιξη

Το μάθημά μας πραγματοποιήθηκε σε δύο σχολεία σε δύο διαφορετικές πόλεις της Ελλάδας, στο 2^ο ΓΕΛ..... και στο 1^ο ΕΠΑΛ σε τμήματα της Β' Λυκείου. Ασχοληθήκαμε με βασικές τριγωνομετρικές έννοιες, τους ορισμούς των τριγωνομετρικών εννοιών και τη χρησιμότητά τους στην καθημερινή ζωή και για τη διδασκαλίας ετοιμάσαμε ένα φύλλο εργασίας.

Στόχοι του μαθήματος ήταν οι μαθητές να είναι σε θέση:

- να κατανοήσουν την έννοια του τριγωνομετρικού αριθμού
- να μπορούν να διακρίνουν τον κατάλληλο τριγωνομετρικό αριθμό που θα χρησιμοποιήσουν σε κάθε περίπτωση
- να ανακαλέσουν γνώσεις από προηγούμενες τάξεις, κυρίως γνώσεις που αφορούν τη σχέση των γωνιών που σχηματίζονται μεταξύ παραλλήλων ευθειών και επίλυσης εξισώσεων
- να αποκτήσουν ευχέρεια στις πράξεις και στους υπολογισμούς που αφορούν τριγωνομετρικούς αριθμούς
- να πειστούν για την σπουδαιότητα της Τριγωνομετρίας και της χρησιμότητάς της στην καθημερινή ζωή
- Να ανακαλύψουν την ιστορική σημασία της έννοιας της κλίσης γωνίας, πως δημιουργήθηκε και τι ανάγκες εξυπηρετούσε.

Το φύλλο εργασίας

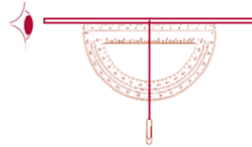
Φύλλο Εργασίας: Τριγωνομετρία και εφαρμογές

Πώς μπορούμε να μετρήσουμε ένα ψηλό αντικείμενο (λ.χ. δέντρο, κτίριο) με τη βοήθεια των μαθηματικών και της τριγωνομετρίας;
Το κλινόμετρο είναι ένα όργανο μέτρησης που χρησιμοποιείται στην τοπογραφία, στη ναυσιπλοΐα, στη δασολογία και σε όλες τις επιστήμες εκείνες που απαιτείται μέτρηση γωνιών.

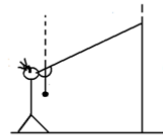
Κατασκευή και χρήση κλινόμετρου

Απαραίτητα υλικά:

- μοιρογνωμόνιο
 - καλαμάκι
 - κολλητική ταινία
 - κλωστή και
 - ένα βαρίδιο
- (συνδετήρας, γαμολάστιχα)



1. Οτιδήποτε θα μετρήσουμε θα είναι κάθετο στο έδαφος. Θα κρατήσουμε το κλινόμετρο, έτσι ώστε να βλέπουμε με το καλαμάκι το ψηλότερο σημείο του αντικειμένου που μετράμε. Η κλωστή θα πέφτει κατακόρυφα κάτω, κάθετα στο έδαφος όπως διπλανό σχήμα

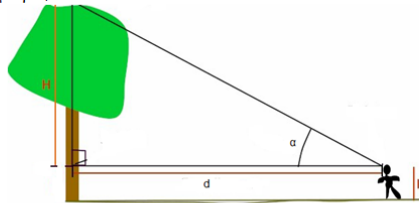


2. Τι σχέση έχει η ευθεία της κλωστής και η ευθεία του αντικειμένου που μετρούμε;

Ας το εφαρμόσουμε!!!

Δραστηριότητα 1

Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος ενός δέντρου χρησιμοποιώντας Τριγωνομετρία:



- Μετρήστε την απόσταση του ματιού του παρατηρητή από το έδαφος

.....

- Μετρήστε την απόσταση του παρατηρητή από το δέντρο

.....

- Σημειώστε τη θέση του παρατηρητή στο έδαφος

Κρατήστε το κλινόμετρο έτσι ώστε η κλωστή να είναι κάθετη στο έδαφος.

• Τοποθετήστε το κλινόμετρο έτσι ώστε το καλαμάκι να «δείχνει» την κορυφή του δέντρου

• Σημειώστε την ένδειξη της γωνίας που σχηματίζεται

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρία για να υπολογίσουμε το ύψος του δέντρου;

Ποιάς πλευράς είναι γνωστό το μήκος:

Ποιάς πλευράς είναι ζητούμενο το μήκος:

Ποιος τριγωνομετρικός αριθμός συνδέει τις δύο πλευρές:

Το ύψος του δέντρου είναι.....

Μαζί με το φύλλο εργασίας χορηγήθηκε και πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών έτσι ώστε διευκολυνθούν οι υπολογισμοί,

Το μάθημα στα σχολεία

Το μάθημα πραγματοποιήθηκε σε τμήματα της Β' Λυκείου, τόσο στο ένα σχολείο, όσο και στο άλλο και είχε διάρκεια δύο(2) διδακτικές ώρες.

Η πρώτη ώρα αφιερώθηκε στην συμπλήρωση του θεωρητικού μέρους του φύλλου εργασίας και με διαδραστικό τρόπο (καθοδήγηση – συζήτηση) οι μαθητές οδηγήθηκαν στις σωστές απαντήσεις. Ο καθηγητής εξήγησε στα παιδιά την κατασκευή του κλινόμετρου με απλά μέσα, που χρησιμοποιεί στην καθημερινότητα και οι μαθητές έδειξαν πρωτόγνωρο ενδιαφέρον. Έγινε σύντομη ιστορική αναφορά στις ανάγκες επινόησης της κλίσης μιας οξείας γωνίας έτσι ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν τη γενεσιουργό αιτία της έννοιας αυτής και να τονιστεί το γεγονός πως πίσω από κάθε Μαθηματική έννοια κρύβεται συνήθως η ανάγκη για απαντήσεις σε προβλήματα.

Η δεύτερη ώρα υπήρξε πολύ πιο ευχάριστη καθώς το μάθημα πραγματοποιήθηκε στον προαύλιο χώρο του σχολείου. Τα όργανα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν:

- το αυτοσχέδιο κλινόμετρο
- μια μετροταινία
- τα φύλλα εργασίας

Οι μαθητές χωρίστηκαν σε 4-5 ομάδες και η κάθε μία κλήθηκε να υπολογίσει αρχικά το ύψος ενός δέντρου και στη συνέχεια το ύψος του σχολείου. Όλες οι ομάδες δούλεψαν με μεγάλο ζήλο και τα αποτελέσματά τους ήταν παρόμοια.

Οι μαθητές αντιμετώπισαν με ωριμότητα και πρωτόγνωρο ενδιαφέρον το μάθημα και δεν δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα στους υπολογισμούς ή στην εύρεση των τριγωνομετρικών αριθμών και οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν ότι μείνανε πολύ ευχαριστημένοι από τη διαδικασία αλλά και ότι τους βοήθησε στην κατανόηση της γνωστικής ενότητας. Η κυριότερη δυσκολία που συναντήσαμε ήταν στον συντονισμό των ομάδων και στην παράλληλη παρακολούθηση αυτών.

Μια ενδιαφέρουσα δραστηριότητα

Υποθέτουμε ότι στεκόμαστε στο έδαφος και ατενίζουμε ένα βουνό που βρίσκεται απέναντι. Μπορούμε με τη βοήθεια του κλινόμετρου να υπολογίζουμε το ύψος του;

Θεωρούμε την ύπαρξη μιας ορθής γωνία, θαμμένης κάπου στη μέση του βουνού.

Θεωρούμε h το ύψος του βουνού και x την απόσταση μας από την ορθή γωνία του βουνού. Μετρούμε την γωνία που σχηματίζεται στο κλινόμετρο, κοιτώντας τη βουνοκορφή και ας υποθέσουμε ότι είναι 35° . Πάμε πίσω 300 m και τότε η γωνία γίνεται 34° . Έχουμε λοιπόν τις παρακάτω εξισώσεις :

$\varepsilon\phi 35^{\circ} = \frac{h}{x}$ και $\varepsilon\phi 34^{\circ} = \frac{h}{x+300}$. Έτσι λοιπόν υπολογίζεται το ύψος.

Συμπεράσματα

Η διδασκαλία των Μαθηματικών απαιτεί έμφαση τόσο και στην ιστορία της επιστήμης όσο και στην πρακτική εφαρμογή των μαθητών επάνω σε Μαθηματικές έννοιες. Στην Ελληνική πραγματικότητα αυτό όχι σπανία φαντάζει δύσκολο κυρίως λόγω του φορτωμένου Αναλυτικού προγράμματος το οποίο όμως δεν αποκλείει ενέργειες τέτοιου είδους. Μια τέτοια εμπλουτισμένη διδασκαλία πιστεύουμε πως βοηθά καλύτερα στην κατανόηση αλλά και τη διάθεση για ενασχόληση των μαθητών με το μάθημα των Μαθηματικών. Είναι στο χέρι του εκάστοτε διδάσκοντα να αποφασίσει την ένταξη στα πλαίσια του μαθήματος της ιστορικής αναδρομής καθώς και της πρακτικής εφαρμογής.

Ενδεικτική Βιβλιογραφία

Bressoud D.M.(2010), *Historical Reclections of Teaching Trigonometry*, The National Council of Teachers of Mathematics

Gillings, R.(1972) — *Mathematics in the Time of Pharaohs* — Dover, 1972 (reprinted 1982).

Heath, T.(1981) *A History of Greek Mathematics(Vol.I-Chapter IV)* Dover Publications,New York.

Libby j.(2017) *Math of Real Life* McFarland& Company,Inc.,Publishers Jefferson, North Carolina

Robins, G.(1987) Charles Shute — *The Rhind Mathematical Papyrus: an Ancient Egyptian Text* — Dover.

Van Brummelen, G.(2009)- *The Mathematics of the Heavens and the Earth, the Early History of Trigonometry*, Princeton University Press.

Maor, E(2002), *Τριγωνομετρικά Λουκούμια*, Κάτοπτρο, Αθήνα.

Λιναρδάκης, Π.(2003) Η παρουσίαση των Τριγωνομετρικών εννοιών στα Σχολικά Βιβλία συγκριτικά με την ιστορική τους εξέλιξη (από το Γυμνάσιο στο Λύκειο). 2^ο συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση «Τα Μαθηματικά στο Γυμνάσιο» 11-13 Απριλίου 2003 (Διαθέσιμο on line: <http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/linard.pdf>) Προσπελάστηκε στις 7/02/2019.

Σπύρου, Π.(2009) *Επιστημολογίες για τη Διδακτική των Μαθηματικών, Σημειώσεις μαθήματος* (Διαθέσιμο on line: <http://opencourses.uoa.gr/modules/document/index.php?course=MATH129&openDir=/561d03d0WHLI>) Προσπελάστηκε 24/02/2019.

Artigue, M.(1989) «*Epistemologie et didactique*». *Cahier de didactique. No 3*, IREM, Paris 7