

ΘΕΜΑ 1 ^ο .	
ΘΕΜΑ 2 ^ο .	
ΘΕΜΑ 3 ^ο .	
ΘΕΜΑ 4 ^ο .	
ΣΥΝΟΛΟ	

Τμήμα Γ...

Επώνυμο:

Όνομα:

ΘΕΜΑ 1^ο.

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[α, β]$, τότε $f([α, β]) = [f(β), f(α)]$.
- ii) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $Δ$, τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in Δ$.
- iii) Αν η συνάρτηση f , είναι παραγωγίσιμη στο $[α, β]$, τότε υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) \cdot (α - β) = f(α) - f(β)$
- iv) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $e^x - x < 0$.
- v) Αν η συνάρτηση $f: [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, η οποία δεν διατηρεί πρόσημο στο $[α, β]$ και $f(α) > 0$, $f(β) > 0$, τότε η f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $[α, β]$.

(μονάδες 2x5=10)

B. Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας στο v).

(μονάδες 5)

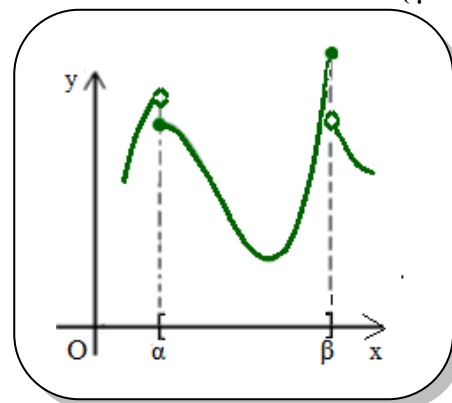
Γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

(μονάδες 8)

Δ. Η συνάρτηση f του σχήματος που δίνεται:

- i) Είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$.
- ii) Είναι συνεχής στο $α$.
- iii) Είναι συνεχής στο $β$.
- iv) Κανένα από τα προηγούμενα.

(μονάδες 3)



ΘΕΜΑ 2^ο.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^3 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$ και g πολώνυμο με $[g'(x)]^2 = 4g(x) + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g'(0) = 0$.

α) Να δείξετε ότι $g(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να εξετάσετε αν είναι άρτια, περιττή ή κανένα από τα δύο.

(μονάδες 8)

γ) Δίνεται η εξίσωση $(g \circ f)(x) = 0$ (1). Να βρείτε το πλήθος των ριζών της (1).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3^ο.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \ln x, x > 0$ και $g(x) = -1 + \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$.

α. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο A . (Μονάδες 7)

β. Να δείξετε οι εφαπτόμενες στις C_f, C_g στο σημείο A είναι κάθετες σχηματίζοντας με τον άξονα $y'y$ ισοσκελές τρίγωνο, με βάση 2. (Μονάδες 6)

Σημείο $M(x, f(x)), x > 1$ κινείται στη C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec.

γ. Να εκφράσετε το εμβαδόν $E(x)$ του τριγώνου $MB\Gamma$ σε σχέση με το x , δείχνοντας συγχρόνως ότι είναι ανεξάρτητο του α , όπου $B(x,0)$ και $\Gamma(0,\alpha), \alpha > 0$. (Μονάδες 7)

δ. Να δείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ισχύει $E(x(t_0)) = E'(x(t_0))$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0, f'(1) = 1$ και $f(\alpha \cdot \beta) \leq f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$ (1).
• g που είναι συνεχής στο $[-1,1]$ με $g(0) > 0$.

α) Αν η (1) ισχύει μόνο ως ισότητα, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 6)

Δίνεται επίσης, ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$. (Μονάδες 9)

γ) Σε σύστημα αξόνων Oxy για το σημείο $M(x, g(x))$, ισχύει $f(|\overline{OM}|) = 1 - |\overline{OM}|$.

i) Να δείξετε ότι $|\overline{OM}| = 1$ (Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g και να την σχεδιάσετε. (Μονάδες 6)

Προσπαθήστε να γράψετε το καλύτερο

Μπορείτε να απαντήσετε (εκτός του διαγωνίσματος):

Να βρεθεί σημείο του θετικού ημιάξονα Oy που άγονται δύο εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ προς την C_g με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.