



ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ  
ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ὑπὸ  
ΝΙΚΟΛΑΟΥ Λ. ΚΕΧΡΗ  
Ἀθήνα, Ἰούνιος 2018

ISBN: 978-1-387-86283-2

## Πρόλογος

Τὸ 1906 ὁ Δανὸς φιλόλογος Johan Ludvig Heiberg ἔμαθε γιὰ τὴν ὕπαρξη ἑνὸς μαθηματικοῦ παλίμψηστο<sup>(1)</sup> στὴν Βιβλιοθήκη τοῦ Μετοχίου τοῦ Παναχίου Τάφου στὴν Κωνσταντινούπολη. Τὸ παλίμψηστο ἦταν μὲ τὴ μορφή ἑνὸς βιβλίου προσευχῆς ποὺ γράφτηκε τὸν δέκατο τρίτο αἰῶνα. Οἱ σελίδες του καθαρίστηκαν γιὰ νὰ ἀφαιρεθοῦν τα προηγούμενα γραπτά καὶ ὁ Heiberg χρησιμοποιώντας τὴν καλύτερη φωτογραφικὴ καὶ μεχεθντικὴ τεχνολογία τῆς ἐποχῆς του ἀνέλαβε τὴν πρόκληση γιὰ νὰ ἀποκρυπτογραφήσει τὴν ὑποκείμενη γραφή.

Πρὸς ἐκπλήξη ὄλων, ἀποκαλύφθηκαν οἱ ἀκόλουθες ἑπτὰ Ἀρχιμήδειες πραγματείες:

- Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.
- Περὶ ἐλίκων.
- Κύκλου μέτρησις.
- Ἐπιπέδων ἰσοροπιῶν.
- Ὀχουμένων.
- Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος
- Στομάχιον.

Τὸ σωζόμενον ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδους «Κύκλου μέτρησις» περιλαμβάνει ἑν ὄλω τρία θεωρήματα. Εἰς τὸ πρῶτο ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ἔμβαδόν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ ἔμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποῦ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ἢ δὲ ἄλλη μὲ τὴν περιφέρεια αὐτοῦ.

Εἰς τὸ δεύτερο θεώρημα ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἔμβαδου τοῦ κύκλου μὲ τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνο εἶναι ἴσος μὲ 11:14.

Τέλος εἰς τὸ τρίτο θεώρημα ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρο τοῦ κύκλου  $\pi$  εἶναι μικρότερος τοῦ  $3\frac{1}{7}$  καὶ μεγαλύτερος τοῦ  $3\frac{10}{71}$ .

Τὰ θεωρήματα αὐτὰ μνημονεύονται ὑπὸ τοῦ Ἡρωνος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Μετρικὰ»<sup>(2)</sup> Γιὰ τὸ πρῶτο καὶ τὸ δεύτερο θεώρημα τῆς παρουσίας πραγματείας ὁ Ἡρων, λέγει ὅτι περιλαμβάνονται εἰς τὸ ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδη «Κύκλου μέτρησις» ἐνῶ γιὰ τὸ τρίτο θεώρημα δὲν ἀναφέρει τοὺς ἀριθμοὺς  $3\frac{1}{7}$  καὶ  $3\frac{10}{71}$  ἀλλὰ ἄλλους καὶ λέγει ὅτι αὐτὸ τὸ θεώρημα περιέχεται στὸ ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδους «Πλινθίδες καὶ κύλινδροι».

Ὁ μαθηματικὸς Πάππος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Συναγωγὴ»<sup>(3)</sup> ἀναφέρει τὸ πρῶτο θεώρημα τῆς παρουσίας πραγματείας ὡς περιεχόμενο εἰς τὸ ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας».

Τέλος ὁ Διόφαντος εἰς τὸ ἔργο αὐτοῦ «Ἐπιπεδομετρικὰ»<sup>(4)</sup> λέγει ὅτι ὁ Ἀρ-

(1) Μὲ τὸν ὄρο παλίμψηστο περιγράφονται ἀρχαία κείμενα σὲ περπατηγὰς ποὺ ἐπικαλύφθηκαν μὲ ἄλλο κείμενο ἢ εἰκόνα σὲ μεταγενέστερη ἐποχὴ γιὰ νὰ χρησιμοποιηθοῦν ξανά ὡς βάση γιὰ τὴ δημιουργία νεότερων ἔργων.

(2) Heronis Alexandrini, H. Schoene, Vol. III, σελ 66, Teubner, Λειψία 1903

(3) Pappi Alexandrini, F.Hultsch. Βερολίνον, Πάππου Συναγωγῆς Ε, σελ 312

(4) Diophanti Alexandrini, Opera Omnia, P. Tannery, Teubneri, Vol. II, σελ 22, Λειψία

χιμήδης απέδειξε ότι 30 ισόπλευρα τρίγωνα ίσοϋνται με 13 τετράγωνα.

Έκ τῶν μαρτυριῶν τοῦ Ἡρωνος, τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Διόφαντου, συνάχεται ὅτι ἡ παροῦσαπραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους ἀποτελεῖ κάποιο μικρὸ μέρος κάποιου μεγαλύτερου τὸ ὁποῖο ἔχει ἀπολεσθεῖ. Τὴν ἄποψη αὐτὴ ἐνισχύει καὶ τὸ γεγονός ὅτι δὲν ὑπάρχει προσφώνηση σὲ κάποιο μαθηματικὸ φίλο ὅπως ὑπάρχει στὴν ἀρχὴ καθενὸς ἀπὸ τὰ θεωρούμενα ὡς πλήρη σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους.

Αθήνα, Ἰούνιος 2018  
Νικόλαος Κεχρῆς

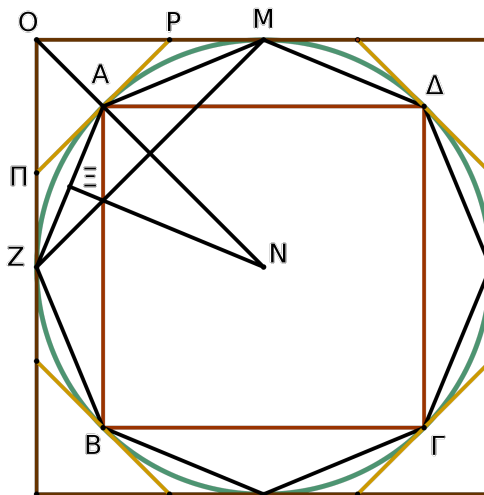


Πᾶς κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν κάθετος εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, ἡ δὲ ἄλλη ἴση μὲ τὴν περιφέρεια του.

Ἐὰν ἔχει αὐτὴν τὴν σχέσιν ὁ κύκλος **ΑΒΓΔ** πρὸς τὸ τρίγωνον **Ε**, ὅπως τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὰ ὑποκείμενα σχήματα λέγω, ὅτι ὁ κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίγωνον.

Διότι, ἐάν εἶναι δυνατόν, ἔστω, ὅτι ὁ κύκλος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ τριγώνου καὶ ἂς ἐχρησθῆ εἰς αὐτὸν τὸ τετράγωνον **ΑΓ**, καὶ ἂς ληφθοῦν τὰ μέσα τῶν τόξων, καὶ ἔστω ὅτι τὰ κυκλικά τμήματα εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· ἄρα τὸ ἐχρησμημένον πολύγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου.

Ἐὰν ληφθῆ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ **Ν** καὶ ἂς ἀχθῆ ἡ κάθετος **ΝΞ**. Ἄρα ἡ **ΝΞ** εἶναι μικρότερα τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου (τῆς ληφθείσης ἴσης πρὸς τὴν ἀκτίνα). Εἶναι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ἐχρησμημένου πολυγώνου, μικρότερα τῆς ἄλλης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, ἐπειδὴ εἶναι αὕτη μικρότερα τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου συνεπῶς τὸ ἐχρησμημένον πολύγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου **Ε**· ὅπερ ἄτοπον.



Ἐστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, μικρότερος τοῦ τριγώνου **Ε** καὶ ἂς περιγραφῆ τὸ τετράγωνον, καὶ ἂς ληφθοῦν τὰ μέσα τῶν τόξων καὶ ἂς ἀχθοῦν εἰς τὰ σημεῖα διαιρέσεως τῶν τόξων ἐφαπτόμενοι τοῦ κύκλου.

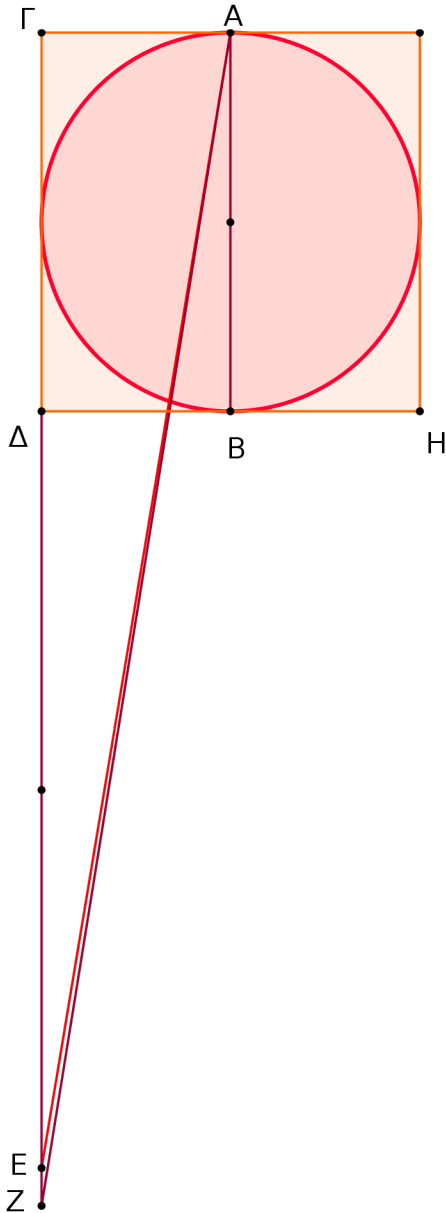
Ὅρθη ἄρα ἡ **ΟΑΡ**. Ἡ **ΟΡ** συνεπῶς εἶναι μεγαλύτερα τῆς **ΜΡ** διότι **ΡΜ = ΡΑ**· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον **ΡΟΠ** εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σχήματος **ΟΖΑΜ**.

Ἐὰν ὑπολειφθοῦν τὰ ὅμοια πρὸς τὸ τμήμα **ΠΖΑ** τμήματα (διὰ συνεχοῦς διαιρέσεως τῶν τόξων) οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν να εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ τριγώνου **Ε** τοῦ κύκλου **ΑΒΓΔ**· θὰ εἶναι τότε τὸ περιεχρησμημένον πολύγωνον μικρότερον τοῦ τριγώνου **Ε**· ὅπερ ἄτοπον.

Διότι τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον ἐπειδὴ ἡ **ΝΑ** εἶναι ἴση πρὸς τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος (τοῦ περιεχρησμημένου πολυγώνου) εἶναι μεγαλύτερα τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Ἄρα ὁ κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίγωνον **Ε**.

β'.

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν  $\alpha\alpha'$  πρὸς  $\alpha\delta'$ .



ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ  $ΑΒ$ , καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ  $ΓΗ$ , καὶ τῆς  $ΓΔ$  διπλή ἡ  $ΔΕ$ , ἕβδομον δὲ ἡ  $ΕΖ$  τῆς  $ΓΔ$ .

ἐπεὶ οὖν τὸ  $ΑΓΕ$  πρὸς τὸ  $ΑΓΔ$  λόγον ἔχει, ὃν  $\kappa\alpha'$  πρὸς  $\zeta'$ , πρὸς δὲ τὸ  $ΑΕΖ$  τὸ  $ΑΓΔ$  λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἓν, τὸ  $ΑΓΖ$  πρὸς τὸ  $ΑΓΔ$  ἔστιν, ὡς  $\kappa\beta'$  πρὸς  $\zeta'$ .

ἀλλὰ τοῦ  $ΑΓΔ$  τετραπλάσιόν ἐστὶ τὸ  $ΓΗ$  τετράγωνον· τὸ δὲ  $ΑΓΔΖ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΒ$  κύκλῳ ἴσον ἐστίν [ἐπεὶ ἡ μὲν  $ΑΓ$  κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βᾶσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων καὶ τῷ  $\zeta'$  ἔχχιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται].

ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ  $ΓΗ$  τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν  $\alpha\alpha'$  πρὸς  $\alpha\delta'$ .

β'.

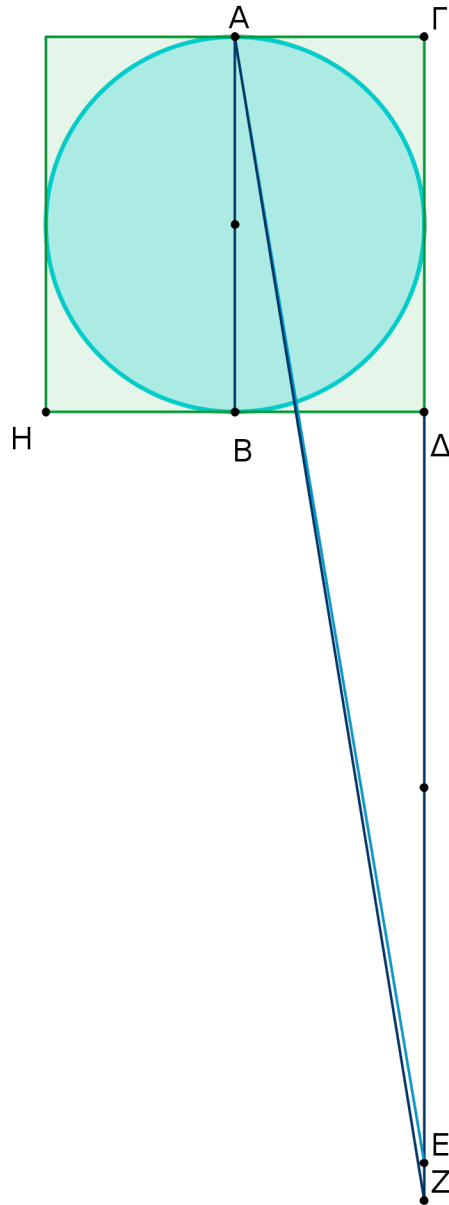
Ὁ κύκλος ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον, τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου [σχεδὸν] ὅτι λόγος ἔχει τὸ 11 πρὸς τὸ 14.

Ἐστω κύκλος τοῦ ὁποῦ διαμέτρος εἶναι ἡ  $AB$  καὶ ἄς περιγραφῆ τὸ τετράγωνον  $GH$  καὶ ἄς ληφθῆ  $DE = 2 \cdot \Gamma\Delta$  καὶ  $EZ = \frac{1}{7} \cdot \Gamma\Delta$ .

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον  $AGE$  πρὸς τὸ τρίγωνον  $AG\Delta$  ἔχει λόγον, ὃν 21 πρὸς 7, τὸ δὲ τρίγωνον  $AG\Delta$  πρὸς τὸ τρίγωνον  $AEZ$  ἔχει λόγον, ὃν 7 πρὸς 1, τὸ τρίγωνον  $AGZ$  ἔχει λόγον πρὸς τὸ τρίγωνον  $AG\Delta$  ὡς τὸ 22 πρὸς 7.

Ἀλλὰ τοῦ τριγώνου  $AG\Delta$  τὸ τετράγωνον  $GH$  εἶναι τετραπλάσιον, τὸ δὲ τρίγωνον  $AG\Delta Z$  εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κύκλον  $AB$  [ἐπειδὴ ἡ μὲν κάθετος πλευρὰ  $AG$  εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, ἡ δὲ βᾶσις πού εἶναι  $3\frac{1}{7}$  τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, θὰ δειχθῆ ὅτι εἶναι σχεδὸν ἴση τῆς περιφερείας του].

Ὁ κύκλος λοιπὸν πρὸς τὸ  $GH$  τετράγωνον ἔχει λόγον [σχεδὸν] ὅτι ὁ 11 πρὸς τὸ 14.

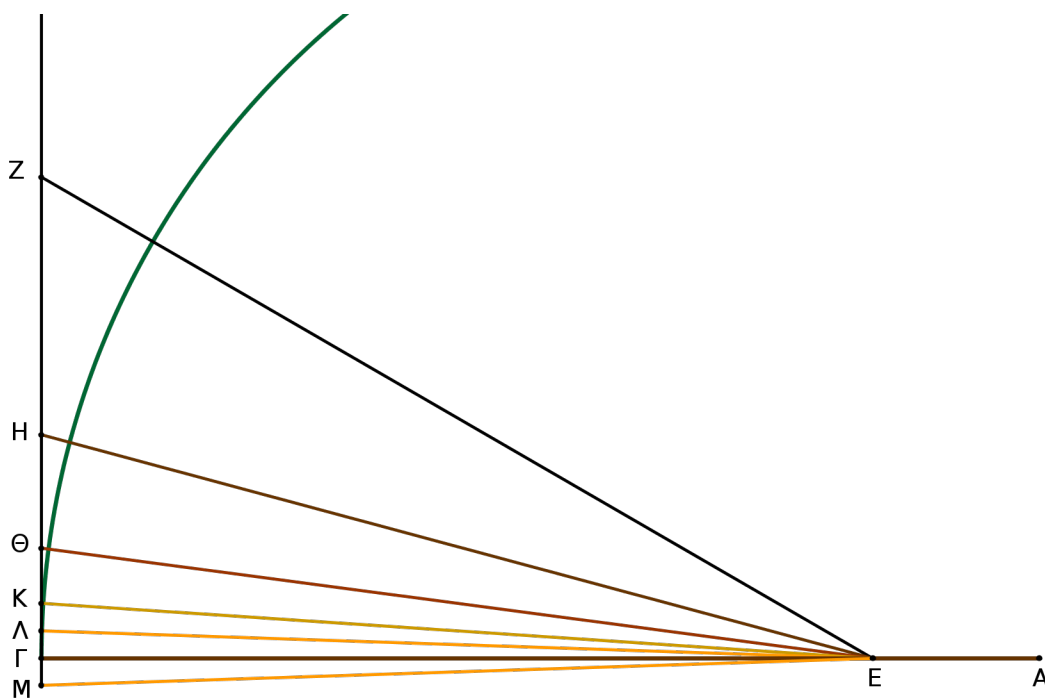


δ'.

Παντός κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ  $ΑΓ$ , καὶ κέντρον τὸ  $Ε$ , καὶ ἡ  $ΓΛΖ$  ἐφαπτομένη, καὶ ἡ ὑπὸ  $ΖΕΓ$  τρίτον ὀρθῆς. ἡ  $ΕΖ$  ἄρα πρὸς  $ΖΓ$  λόγον ἔχει, ὃν  $τς'$  πρὸς  $ρνγ'$ . ἡ δὲ  $ΕΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΖ$  λόγον ἔχει, ὃν  $σξε'$  πρὸς  $ρνγ'$ .

τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ  $ΖΕΓ$  δίχα τῇ  $ΕΗ$ . ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ  $ΖΕ$  πρὸς  $ΕΓ$ , ἡ  $ΖΗ$  πρὸς  $ΗΓ$  [καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι]. ὡς ἄρα συναμφοτέρος ἡ  $ΖΕ$ ,  $ΕΓ$  πρὸς  $ΖΓ$ , ἡ  $ΕΓ$  πρὸς  $ΓΗ$ . ὥστε ἡ  $ΓΕ$  πρὸς  $ΓΗ$  μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ  $φοα'$  πρὸς  $ρνγ'$ . ἡ  $ΕΗ$  ἄρα πρὸς  $ΗΓ$  δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν  $λδ,θου'$  πρὸς  $μ,γυθ'$ . μήκει ἄρα, ὃν  $φ4α'η''$  πρὸς  $ρνγ'$ .



πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ  $ΗΕΓ$  τῇ  $ΕΘ$ . διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ  $ΕΓ$  πρὸς  $ΓΘ$  μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν  $αρξβ'η''$  πρὸς  $ρνγ'$ . ἡ  $ΘΕ$  ἄρα πρὸς  $ΘΓ$  μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν  $αροβ'η''$  πρὸς  $ρνγ'$ .

ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ  $ΘΕΓ$  τῇ  $ΕΚ$ . ἡ  $ΕΓ$  ἄρα πρὸς  $ΓΚ$  μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν  $βτλδ'δ''$  πρὸς  $ρνγ'$ . ἡ  $ΕΚ$  ἄρα πρὸς  $ΓΚ$  μείζονα, ἢ ὃν  $βτλθ'δ''$  πρὸς  $ρνγ'$ .

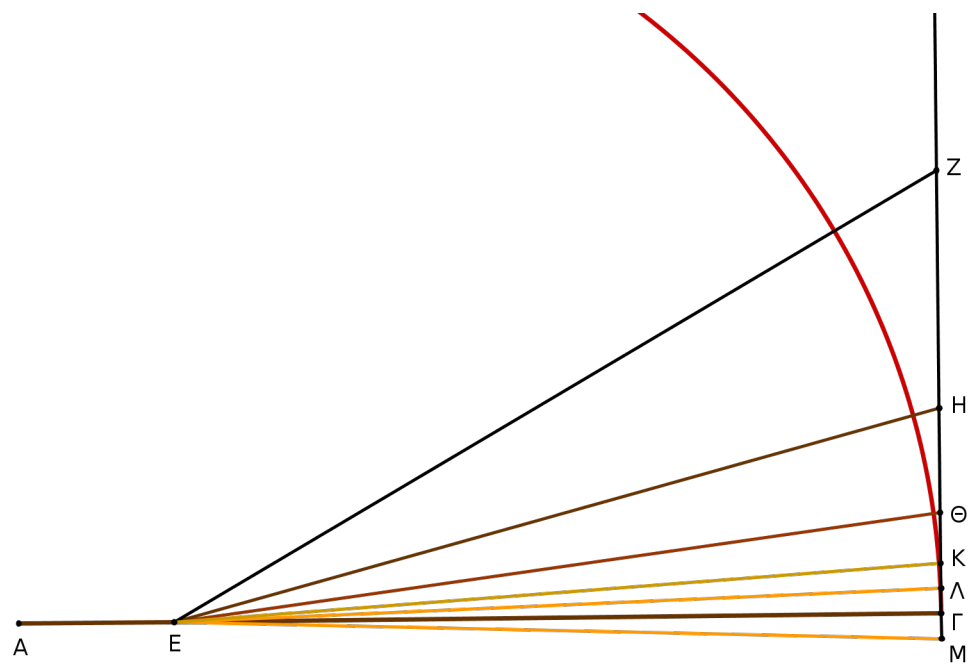
ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ  $ΚΕΓ$  τῇ  $ΛΕ$ . ἡ  $ΕΓ$  ἄρα πρὸς  $ΛΓ$  μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει, ἥπερ  $δχογι'$  πρὸς  $ρνγ'$ .

δ'.

Παντός κύκλου ή περιφέρεια είναι ὀλίγον μικρότερα μὲν τοῦ  $3\frac{1}{7}$  τῆς διαμέτρου, ὀλίγον μεγαλύτερα δὲ τοῦ  $3\frac{10}{71}$  αὐτῆς.

Ἐστω κύκλος καὶ διάμετρος ή ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ή ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ή γωνία ΖΕΓ ἴση πρὸς τὸ  $\frac{1}{3}$  ὀρθῆς· ἄρα ή ΕΖ : ΖΓ = 306 : 153, ή δὲ ΕΓ : ΖΣ = 265 : 153.

Ἄς διχοτομηθῆ λοιπὸν ή ΖΕΓ διὰ τῆς ΕΗ· θα εἶναι τότε ΖΕ : ΕΓ = ΖΗ : ΗΓ [καὶ δι' ἐναλλαχῆς καὶ συνθέσεως] ἄρα (ΖΕ + ΕΓ) : ΖΓ = ΕΓ : ΓΗ· ὥστε ὁ λόγος ΓΕ : ΓΗ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου 571 : 153. Ἄρα ΕΗ<sup>2</sup> : ΗΓ<sup>2</sup> > 349450 : 23409 ὁπότε γιὰ τὶς τετραγωνικὲς ρίζες θα ἰσχύει παρόμοια ΕΗ : ΗΓ > 591 $\frac{1}{8}$  : 153.



Ἄς διχοτομηθῆ πάλιν ή γωνία ΗΕΓ ὑπὸ τῆς ΕΘ· διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν ὁ λόγος ΕΓ : ΘΘ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου 1162 $\frac{1}{8}$  : 153 ἄρα ΕΘ : ΘΓ > 1172 $\frac{1}{8}$  : 153.

Ἄς διχοτομηθῆ ἀκόμη ή γωνία ΘΕΓ διὰ τῆς ΕΚ· τότε ΕΓ : ΓΚ > 2334 $\frac{1}{4}$  : 153 ἄρα ΕΚ : ΓΚ > 2339 $\frac{1}{4}$  : 153·

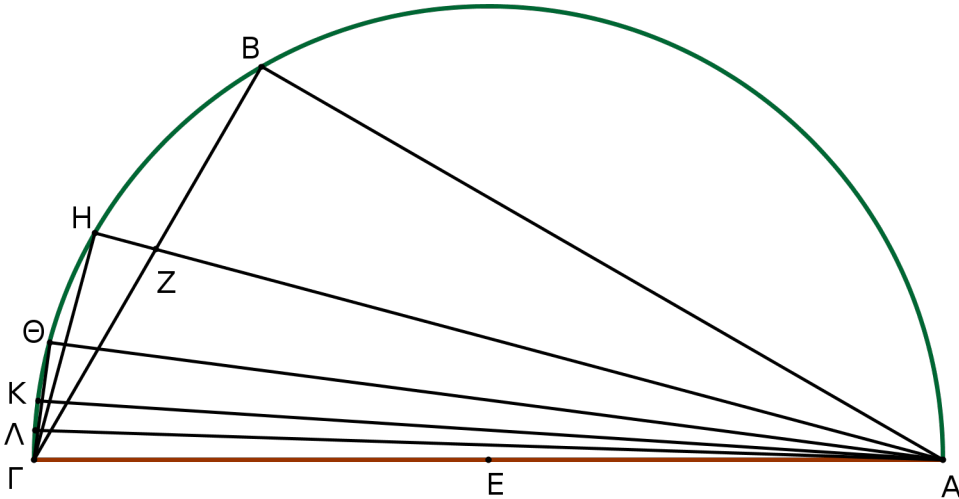
Ἄς διχοτομηθῆ ἀκόμη ή γωνία ΚΕΓ διὰ τῆς ΕΛ· τότε ΕΓ : ΛΓ > 4673 $\frac{1}{2}$  : 153.

ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ  $ZEG$  τρίτον οὔσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ  $ΛΕΓ$  ὀρθῆς ἐστὶ  $μη''$ .

κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ  $E$  ἡ ὑπὸ  $ΓΕΜ$  ἡ ἄρα ὑπὸ  $ΛΕΜ$  ὀρθῆς ἐστὶ  $κδ''$ . καὶ ἡ  $ΛΜ$  ἄρα εὐθεῖα τοῦ περιτὸν κύκλου ἐστὶ πολυχώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος  $ζς'$ .

ἐπεὶ οὖν ἡ  $ΕΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΛ$  ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα, ἥπερ  $δχογ'ι''$  πρὸς  $ργγ'$ , ἀλλὰ τῆς μὲν  $ΕΓ$  διπλῆ ἡ  $ΑΓ$ , τῆς δὲ  $ΓΔ$  διπλασίον ἡ  $ΛΜ$ , καὶ ἡ  $ΑΓ$  ἄρα πρὸς τὴν τοῦ  $ζς'$  πολυχώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ  $δχογ'ι''$  πρὸς  $μ.δχπη'$ . καὶ ἐστὶν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν  $χξζ'ι''$ , ἥπερ τῶν  $δχογ'ι''$  ἐλάττονα ἐστὶν ἡ τὸ ἑβδομον.

ὥστε τὸ πολυχώνον τὸ περιτὸν κύκλου τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονον ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μείζον. ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίον καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.



ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ  $ΑΓ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τρίτον ὀρθῆς. ἡ  $ΑΒ$  ἄρα πρὸς  $ΒΓ$  ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὄν  $ατνα'$  πρὸς  $ψπ'$  [ἡ δὲ  $ΑΓ$  πρὸς  $ΓΒ$ , ὄν  $αφξ'$  πρὸς  $ψπ'$ ].

δίχα ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ  $ΑΗ$ . ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΗ$  τῇ ὑπὸ  $ΗΓΒ$ , ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ  $ΗΑΓ$ , καὶ ἡ ὑπὸ  $ΗΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΗΑΓ$  ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ  $ΑΗΓ$  ὀρθή. καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΗΖΓ$  τρίτη τῇ ὑπὸ  $ΑΓΗ$  ἴση. ἰσοχώνιον ἄρα τὸ  $ΑΗΓ$  τῷ  $ΓΗΖ$  τριχώνῳ.

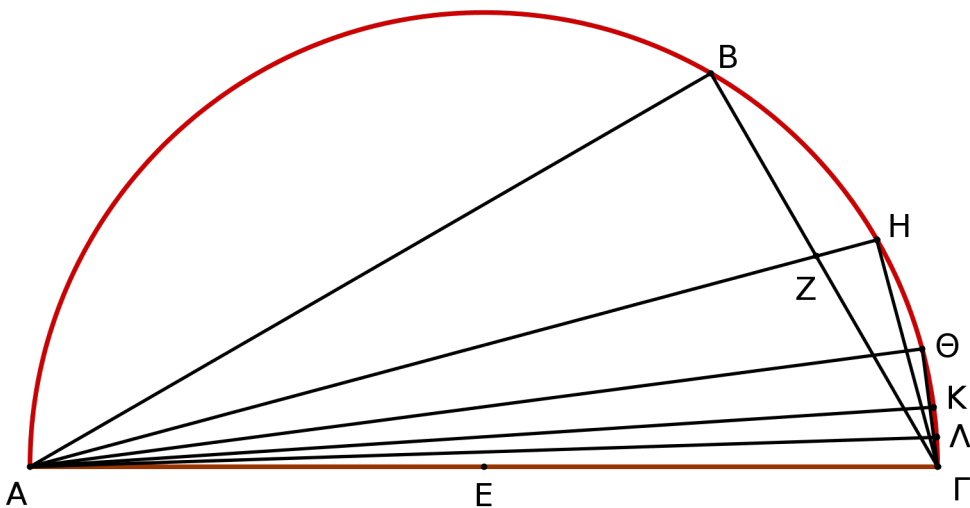
ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ  $ΑΗ$  πρὸς  $ΗΓ$ , ἡ  $ΓΗ$  πρὸς  $ΗΖ$ , καὶ ἡ  $ΑΓ$  πρὸς  $ΓΖ$ . ἀλλ' ὡς ἡ  $ΑΓ$  πρὸς  $ΓΖ$ , καὶ συναμφοτέρος ἡ  $ΓΑΒ$  πρὸς  $ΒΓ$ . καὶ ὡς συναμφοτέρος ἄρα ἡ  $ΒΑΓ$  πρὸς  $ΒΓ$ , ἡ  $ΑΗ$  πρὸς  $ΗΓ$ . διὰ τοῦτο οὖν ἡ  $ΑΗ$  πρὸς τὴν  $ΗΓ$  ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἥπερ  $βθια'$  πρὸς  $ψπ'$ , ἡ δὲ  $ΑΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΗ$  ἐλάσσονα, ἢ ὄν  $γιγ'ι''δ''$  πρὸς  $ψπ'$ .

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία **ΖΕΓ** ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἓν τρίτον ὀρθῆς, ἐδικοτομήθη τετράκις, ἡ γωνία **ΛΕΓ** θα εἶναι τὸ 1/48 ὀρθῆς.

Ἄς ληφθῆ ἡ γωνία **ΜΕΓ** = **ΛΕΓ** τότε ἡ γωνία **ΛΕΜ** θα εἶναι τὸ 1/24 ὀρθῆς· συνεπῶς ἡ εὐθεία **ΛΜ** θα εἶναι πλευρά τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ ἔχοντος 96 πλευράς.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη ὅτι  $ΕΓ : ΓΛ > 4673\frac{1}{2} : 153$ , ἀλλὰ  $ΑΓ = 2 \cdot ΕΓ$  καὶ  $ΛΜ = 2 \cdot ΓΛ$  συνάχεται, ὅτι  $ΑΓ : \text{περίμετρον } 96\text{γώνου} > 4673\frac{1}{2} : 14688$ . καὶ ἀντιστρόφως τὸ  $14688 : 4673\frac{1}{2}$  εἶναι μικρότερον τοῦ  $3\frac{1}{7}$  (τὸ ὁποῖον ἰσοῦται με  $14688 : 4672\frac{1}{2}$ )

ὥστε τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον (ἡ περίμετρος τούτου) εἶναι τριπλάσιον καὶ ὑπερέχον προσέτι κατὰ διάστημα μικρότερον τοῦ ἑνὸς ἑβδόμου τῆς διαμέτρου· ἄρα καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι μικρότερα ἢ τριπλάσια καὶ ὑπερέχουσα ἐπὶ πλεόν κατὰ τὸ ἑβδομον μέρος (θά εἶναι δηλ. μικρότερα τοῦ  $3\frac{1}{7}$ ).



Ἐστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ **ΑΓ**, ἡ δὲ γωνία **ΒΑΓ**, ἔστω ἓν τρίτον ὀρθῆς· ἄρα ἡ **ΑΒ** ἔχει λόγον πρὸς τὴν **ΒΓ** μικρότερον τοῦ λόγου τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἀριθμὸς 1351 πρὸς τὸν ἀριθμὸν 780 [ἡ δὲ  $ΑΓ : ΒΓ = 1560 : 780$ ].

Διὰ τῆς **ΑΗ** διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν **ΒΑΓ**· ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία **ΒΑΗ** εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν **ΗΓΒ** ἀλλὰ καὶ τὴν γωνίαν **ΗΑΓ** ἔπεται ὅτι καὶ ἡ **ΗΓΒ** γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν **ΗΑΓ** γωνίαν, καὶ κοινὴ ἡ ὀρθὴ γωνία **ΑΗΓ**· ἄρα καὶ ἡ τρίτη γωνία **ΗΖΓ** εἶναι ἴση πρὸς τὴν τρίτην γωνίαν **ΑΓΗ**· ἄρα τὰ τρίγωνα **ΑΗΓ** καὶ **ΓΗΖ** εἶναι ἰσογώνια.

Συνεπῶς (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ἰσογώνιων τριγώνων **ΗΓΖ** καὶ **ΗΓΑ**) ἔπεται  $ΑΗ : ΗΓ = ΓΗ : ΗΖ = ΑΓ : ΓΖ$ . Ἀλλὰ  $ΑΓ : ΓΖ = (ΓΑ + ΑΒ) : ΒΓ$  ἄρα καὶ  $(ΓΑ + ΑΒ) : ΒΓ = ΑΗ : ΗΓ$ . Διὰ τοῦτο λοιπὸν ἡ  $ΑΗ : ΗΓ < 2911 : 780$ , ἡ δὲ  $ΑΓ : ΓΗ < 3013\frac{3}{4} : 780$ .



Ἵς διχοτομηθῆ ἡ γωνία  $\Gamma\Lambda\text{H}$  διὰ τῆς  $\Lambda\Theta$ . Διὰ τοὺς αὐτοὺς ὡς ἄνω λόγους ἄρα  $\Lambda\Theta : \Theta\Gamma < 5924\frac{3}{4} : 780$  ἢ  $\Lambda\Theta : \Theta\Gamma < 1823 : 240$ · διότι οἱ ἀριθμοὶ 1823 καὶ 240 εἶναι τὰ  $\frac{4}{13}$  ἀντιστοίχως, τῶν ἀριθμῶν  $5924\frac{3}{4}$  καὶ 780· ὥστε  $\Lambda\Gamma : \Gamma\Theta < 1838\frac{9}{11} : 240$ ·

ἀκόμη ἅς διχοτομηθῆ ἡ γωνία  $\Theta\Lambda\Gamma$  διὰ τῆς  $\text{K}\Lambda$ · τότε  $\text{A}\text{K} : \text{K}\Gamma < 1007 : 66$  διότι οἱ ἀριθμοὶ 1007 καὶ 66 εἶναι τὰ  $\frac{11}{40}$  ἀντιστοίχως τῶν ἀριθμῶν  $3661\frac{9}{11}$  καὶ 240· ἄρα ἡ  $\text{A}\Gamma : \text{K}\Gamma < 1009\frac{1}{6} : 66$ .

Ἵς διχοτομηθῆ ἀκόμη ἡ γωνία  $\text{K}\Lambda\Gamma$  ὑπὸ τῆς  $\Lambda\Lambda$ · ἄρα  $\Lambda\Lambda : \Lambda\Gamma < 2016\frac{1}{6} : 66$  καὶ  $\text{A}\Gamma : \Gamma\Lambda < 2017\frac{1}{4} : 66$ · καὶ δι' ἀντιστροφῆς τῶν ἀνισοτήτων (π.χ.  $\Gamma\Lambda : \text{A}\Gamma > 66 : 2017\frac{1}{4}$ ) συνάχεται, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ (ἐχχεγραμμένου) πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ἔχει λόγον  $> 6336 : 2017\frac{1}{4}$ , ὅστις λόγος ( $6336 : 2017\frac{1}{4}$ ) εἶναι μεγαλύτερος τοῦ  $3\frac{10}{71}$ .

Ἵρα ἡ περίμετρος τοῦ 96γώνου τοῦ ἐχχεγραμμένου εἰς κύκλον πρὸς διάμετρον  $> 3\frac{10}{71}$ · ὥστε κατὰ μείζονα λόγον, ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου (μεγαλύτερα οὖσα τῆς περιμέτρου τοῦ 96γώνου) εἶναι μεγαλύτερα τοῦ  $3\frac{10}{71}$ .

Ἵρα ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι μικρότερα μὲν τοῦ  $3\frac{1}{7}$  τῆς διαμέτρου αὐτοῦ, μεγαλύτερα δὲ τοῦ  $3\frac{10}{71}$  αὐτῆς.

**Σχόλια για τὸ θεώρημα α΄.** Μὲ σύγχρονο συμβολισμό, ἐὰν

**Κ** δηλώνει τὸ ἔμβαδὸ κύκλου ἀκτῖνος  $\rho$

**Π** δηλώνει τὴν περιφέρειὰ του

**Ε** δηλώνει τὸ ἔμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου πλευρῶν  $\rho$ ,  $\Pi$

θὰ πρέπει νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι  $K = E$ .

1)  $K > E$ : Συνεπάγεται τότε  $K = E + \Delta$ . Θεωροῦμε ἔχχεγραμμένο κανονικὸ  $n$ -γωνο ἔμβαδοῦ  $P_n$  τέτοιου ὥστε  $K - P_n < \Delta$ . Θὰ εἶναι τότε

$$\left. \begin{array}{l} K - P_n < \Delta \\ P_n < E \end{array} \right\} \rightarrow K < P_n + \Delta < E + \Delta \quad \text{ἄτοπο}$$

2)  $K < E$ : Συνεπάγεται τότε  $E = K + \Delta$ . Θεωροῦμε περιχεγραμμένο κανονικὸ  $n$ -γωνο ἔμβαδοῦ  $R_n$  τέτοιου ὥστε  $R_n - K < \Delta$ . Θὰ εἶναι τότε

$$\left. \begin{array}{l} R_n - K < \Delta \\ R_n > E \end{array} \right\} \rightarrow K > R_n - \Delta > E - \Delta \quad \text{ἄτοπο}$$

**Σχόλια για τὸ θεώρημα γ΄.** Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ γ΄ θεωρήματος ἔχουν παραλειφθεῖ ἀρκετοὶ ὑπολογισμοὶ ποὺ εἶναι φυσικὸ νὰ δημιουργοῦν ἐρωτήματα στὸν ἀναχνώστη, θὰ σκιαγραφήσουμε καὶ θὰ παρουσιάσουμε τὸ θεώρημα αὐτὸ σὲ σύγχρονη μορφή καὶ τρόπο ἀναλυτικὸ ἔτσι ὥστε νὰ γίνει καλύτερα κατανοητὸ.

Ἡ ἀπόδειξη ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη. Στὸ πρῶτο μέρος ὁ Ἀρχιμήδης ἐπιχειρεῖ τὴν προσέγγιση τοῦ λόγου τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρο του μὲ περιχεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα, ἐνῶ στὸ δεύτερο μὲ ἔχχεγραμμένα.

Ἡ ἀπόδειξη στὸ πρῶτο μέρος ξεκινᾷ ἀπὸ μιὰ προσέγγιση κατ'ἄλληληψη τοῦ  $\sqrt{3}$  μὲ τὸ κλάσμα  $\frac{265}{153}$ , ἐνῶ στὸ δεύτερο, ξεκινᾷ μὲ μιὰ προσέγγιση κατ'ὑπεροχὴ τοῦ  $\sqrt{3}$  μὲ τὸ κλάσμα  $\frac{1351}{780}$ .

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Πῶς ἔφθασε ὁ Ἀρχιμήδης σὲ αὐτὴ τὴν προσέγγιση τοῦ  $\sqrt{3}$  δὲν εἶναι βέβαιο, εἶναι ἀρκετὰ πιθανὸν ὅμως νὰ κατέληξε σὲ αὐτὰ ἐφαρμόζοντας τὸν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη γιὰ τὴν εὔρεση κοινοῦ μέτρου μεθεθῶν ἴσων μὲ  $\sqrt{3}$  καὶ 1. Μὲ σημερινὴ ὀρολογία, κατέληξε σὲ αὐτὰ τὰ κλάσματα μέσω τῆς θεωρίας τῶν συνεχῶν κλασμάτων. Πιὸ συγκεκριμένα, ἡ ἀνάλυση τοῦ  $\sqrt{3}$  σὲ συνεχῆ κλάσμα εἶναι ἡ ἀκόλουθη

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

ἢ μὲ ἄλλο συμβολισμό  $\sqrt{3} = 1:[1,2]$  πού εἶναι ἡ βάση γιὰ νὰ κατασκευάσουμε τὸν ἀκόλουθο πίνακα

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a <sub>n</sub>			1	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2
r <sub>n</sub>	0	1	1	2	5	7	19	26	71	97	265	362	989	1351
s <sub>n</sub>	1	0	1	1	3	4	11	15	41	56	153	209	571	780

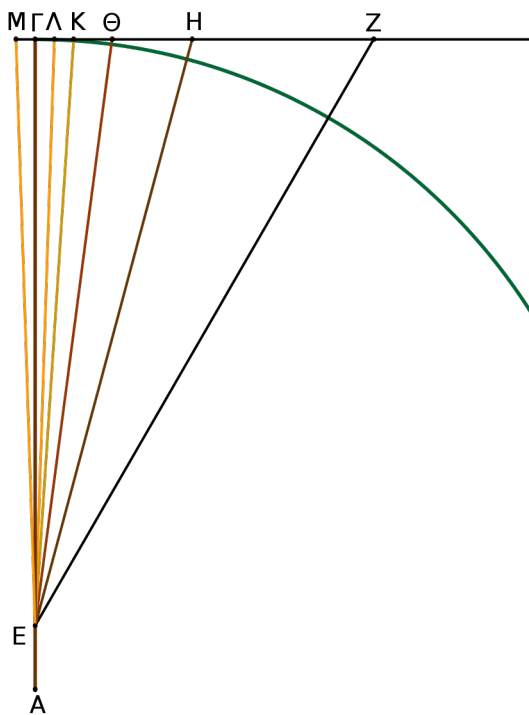
ὅπου

$$r_n = a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}$$

$$s_n = a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}$$

καὶ ἀρχικὲς συνθήκες  $r_{-1} = 0, r_0 = 1, s_{-1} = 1$  καὶ  $s_0 = 0$ .

Ἄν καὶ ἡ μέθοδος τῶν συνεχῶν κλάσμάτων προσφέρει ἱκανοποιητικὴ ἐξήχηση γιὰ τὸ πῶς ἔφθασε ὁ Ἀρχιμήδης στὰ φράγματα τοῦ  $\sqrt{3}$ , ἀποτυγχάνει ἐν τούτοις νὰ ἐρμηνεύσει τὴν παραχωγὴ τῶν φραγμάτων κατὰ τὴν ἐξαχωγὴ ριζῶν στὸ τέλος κάθε βήματος πού θὰ δοῦμε ἐν συνεχείᾳ. Μία τέτοια μέθοδος δὲν ἔχει βρεθεῖ (2) καὶ ἀποτελεῖ μέχρι σήμερα ἀντικείμενο ἔρευνας.



**Μέρος 1<sup>ο</sup>.** Ὑπολογίζονται διαδοχικὰ οἱ λόχοι:

$$\frac{EG}{GZ}, \frac{EZ}{GZ}, \frac{EG}{GH}, \frac{EZ}{GH}, \frac{EG}{GO}, \frac{EZ}{GO}, \frac{EG}{GK}, \frac{EZ}{GK}$$

**Βῆμα 1<sup>ο</sup>.** Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ ΓΖ ὡς τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ ἑξαγώνου περιγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα ΕΓ.

$$\frac{EG}{GZ} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

$$\frac{EZ}{GZ} = \frac{2}{1} = \frac{306}{153}$$

(2) E. B. Davies, Archimedes' calculations of square roots

**Βήμα 2<sup>ο</sup>.** Θεωρούμε την πλευρά  $\Gamma\text{H}$  ως τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ δωδεκαχώνου περιγεγραμμένου σὲ κύκλῳ μὲ ἀκτῖνα  $\text{E}\Gamma$  καὶ διάμετρο  $\delta$ .

ἐπειδὴ ἀπὸ θεώρημα διχοτόμων

$$\frac{\text{E}\text{Z}}{\text{E}\Gamma} = \frac{\text{Z}\text{H}}{\Gamma\text{H}} \rightarrow \frac{\text{E}\text{Z} + \text{E}\Gamma}{\text{E}\Gamma} = \frac{\text{Z}\text{H} + \Gamma\text{H}}{\Gamma\text{H}} \rightarrow \frac{\text{E}\Gamma}{\Gamma\text{H}} = \frac{\text{E}\text{Z} + \text{E}\Gamma}{\text{Z}\text{H} + \Gamma\text{H}} \rightarrow \frac{\text{E}\Gamma}{\Gamma\text{H}} = \frac{\text{E}\text{Z} + \text{E}\Gamma}{\Gamma\text{Z}}$$

θὰ εἶναι

$$\frac{\text{E}\Gamma}{\Gamma\text{H}} = \frac{\text{E}\text{Z} + \text{E}\Gamma}{\Gamma\text{Z}} = \frac{\text{E}\text{Z}}{\Gamma\text{Z}} + \frac{\text{E}\Gamma}{\Gamma\text{Z}} > \frac{265}{153} + \frac{306}{153} = \frac{571}{153}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\text{E}\text{H}^2 = \Gamma\text{H}^2 + \text{E}\Gamma^2 \rightarrow$$

$$\frac{\text{E}\text{H}^2}{\Gamma\text{H}^2} = 1 + \frac{\text{E}\Gamma^2}{\Gamma\text{H}^2}$$

$$> \left(\frac{571}{153}\right)^2 + 1 = \frac{349450}{26569} \rightarrow$$

$$\frac{\text{E}\text{H}}{\Gamma\text{H}} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>.** Θεωρούμε την πλευρά  $\Gamma\Theta$  ως τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ 24-χώνου περιγεγραμμένου σὲ κύκλῳ μὲ ἀκτῖνα  $\text{E}\Gamma$  καὶ διάμετρο  $\delta$ .

ἐπειδὴ ἀπὸ θεώρημα διχοτόμων

$$\frac{\text{E}\text{H}}{\text{E}\Gamma} = \frac{\text{H}\Theta}{\Gamma\Theta} \rightarrow \frac{\text{E}\text{H} + \text{E}\Gamma}{\text{E}\Gamma} = \frac{\text{H}\Theta + \Gamma\Theta}{\Gamma\Theta} \rightarrow \frac{\text{E}\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{\text{E}\text{H} + \text{E}\Gamma}{\text{H}\Theta + \Gamma\Theta} \rightarrow \frac{\text{E}\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{\text{E}\text{H} + \text{E}\Gamma}{\Gamma\text{H}}$$

θὰ εἶναι

$$\frac{\text{E}\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{\text{E}\text{H} + \text{E}\Gamma}{\Gamma\text{H}} = \frac{\text{E}\text{H}}{\Gamma\text{H}} + \frac{\text{E}\Gamma}{\Gamma\text{H}} > \frac{591\frac{1}{8}}{153} + \frac{571}{153} = \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\text{E}\Theta^2 = \Gamma\Theta^2 + \text{E}\Gamma^2 \rightarrow$$

$$\frac{\text{E}\Theta^2}{\Gamma\Theta^2} = 1 + \frac{\text{E}\Gamma^2}{\Gamma\Theta^2}$$

$$> \left(\frac{1162\frac{1}{8}}{153}\right)^2 + 1 = \frac{1373943\frac{33}{64}}{23409} \rightarrow$$

$$\frac{\text{E}\Theta}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

**Βήμα 4<sup>ο</sup>.** Θεωρούμε την πλευρά ΓΚ ως τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ 48-γώνου περιγεγραμμένου σὲ κύκλῳ μὲ ἀκτίνα ΕΓ καὶ διάμετρο δ.

ἐπειδὴ ἀπὸ θεώρημα διχοτόμων

$$\frac{ΕΘ}{ΕΓ} = \frac{ΘΚ}{ΓΚ} \rightarrow \frac{ΕΘ + ΕΓ}{ΕΓ} = \frac{ΘΚ + ΓΚ}{ΓΚ} \rightarrow \frac{ΕΓ}{ΓΚ} = \frac{ΕΘ + ΕΓ}{ΘΚ + ΓΚ} \rightarrow \frac{ΕΓ}{ΓΚ} = \frac{ΕΘ + ΕΓ}{ΓΘ}$$

θα εἶναι

$$\frac{ΕΓ}{ΓΚ} = \frac{ΕΘ + ΕΓ}{ΓΘ} = \frac{ΕΘ}{ΓΘ} + \frac{ΕΓ}{ΓΘ} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153} + \frac{1162\frac{1}{8}}{153} = \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$ΕΚ^2 = ΓΚ^2 + ΕΓ^2 \rightarrow$$

$$\frac{ΕΚ^2}{ΓΚ^2} = 1 + \frac{ΕΓ^2}{ΓΚ^2}$$

$$> \left( \frac{2334\frac{1}{4}}{153} \right)^2 + 1 = \frac{5472132\frac{1}{16}}{23409} \rightarrow$$

$$\frac{ΕΚ}{ΓΚ} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$$

**Βήμα 5<sup>ο</sup>.** Θεωρούμε την πλευρά ΓΛ ως τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ 96-γώνου περιγεγραμμένου σὲ κύκλῳ μὲ ἀκτίνα ΕΓ καὶ διάμετρο δ.

ἐπειδὴ ἀπὸ θεώρημα διχοτόμων

$$\frac{ΕΚ}{ΕΓ} = \frac{ΚΛ}{ΓΛ} \rightarrow \frac{ΕΚ + ΕΓ}{ΕΓ} = \frac{ΚΛ + ΓΛ}{ΓΛ} \rightarrow \frac{ΕΓ}{ΓΛ} = \frac{ΕΚ + ΕΓ}{ΚΛ + ΓΛ} \rightarrow \frac{ΕΓ}{ΓΛ} = \frac{ΕΚ + ΕΓ}{ΓΚ}$$

θα εἶναι

$$\frac{ΕΓ}{ΓΛ} = \frac{ΕΚ + ΕΓ}{ΓΚ} = \frac{ΕΚ}{ΓΚ} + \frac{ΕΓ}{ΓΚ} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153} + \frac{2334\frac{1}{4}}{153} = \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

καὶ ἐπειδὴ

...

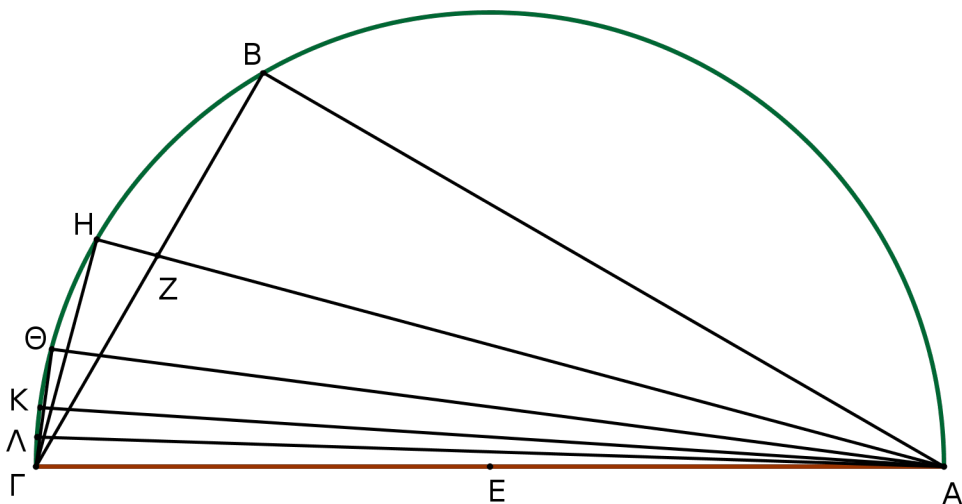
ἔδῳ ὁ Ἀρχιμήδης σταματᾷ αὐτὴ τὴν ἀναδρομικὴ ἀπειροστικὴ προσέγγιση. Συμβολίζοντας μὲ  $\Pi_{96}$  τὴν περίμετρο τοῦ περιγεγραμμένου 96γώνου στὸν κύκλῳ μὲ διάμετρο δ καταλήγει

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_{96}}{\delta} &= \frac{\text{περίμετρος } 96\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon}{\text{διάμετρο κύκλου}} = \frac{96 \cdot \Lambda\text{M}}{\text{ΑΓ}} \\ &= \frac{96 \cdot 2 \cdot \Gamma\Lambda}{2 \cdot ΕΓ} < \frac{96 \cdot 153}{4673\frac{1}{2}} = \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7} \end{aligned}$$

Μέρος 2<sup>ο</sup>.

Υπολογίζονται διαδοχικά οί λόχοι:

$$\frac{AB}{B\Gamma'} \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \quad \frac{AH}{H\Gamma'} \frac{A\Gamma}{H\Gamma} \quad \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma'} \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} \quad \frac{AK}{K\Gamma'} \frac{A\Gamma}{K\Gamma} \quad \frac{AL}{L\Gamma'} \frac{A\Gamma}{L\Gamma}$$



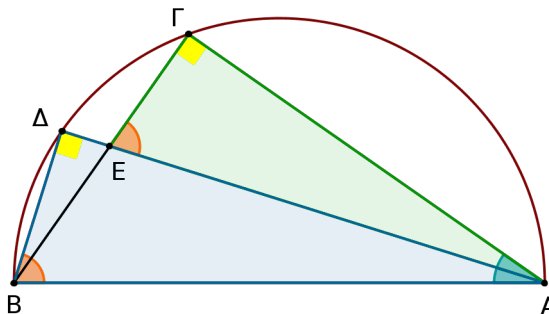
Για να συμπύξουμε την εμφάνιση της απόδειξης μπορούμε να παραχοντοποιήσουμε αποδεικνύοντας πρώτα το ακόλουθο λήμμα

**Λήμμα 1:** "Έστω ημικύκλιο διαμέτρου BA, Γ τυχαίο σημείο επί της περιφέρειάς του και Δ το σημείο τομής της διχοτόμου της BΑΓ γωνίας με το ημικύκλιο. Θά ισχύει τότε ότι

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AB + A\Gamma}{B\Gamma}$$

**Άποδειξη** Από θεώρημα έσωτερικών διχοτόμων στο τρίγωνο ABΓ λαμβάνουμε

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma E} \rightarrow \frac{AB + A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{BE + \Gamma E}{\Gamma E} \rightarrow \frac{AB + A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E}$$



Τα τρίγωνα AΓE και AΔB είναι όμοια επειδή BΔA = BΓA = 1<sup>λ</sup> και η ΓAΔ γωνία ίση με τη ΔAΒ διότι AΔ διχοτόμος. Έπομένως θά ισχύει

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$$

όποτε τελικά το ζητούμενο

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AB + A\Gamma}{B\Gamma}$$

Ἐπανερχόμεστε τώρα στὴν ἀνάλυση τῆς ἀπόδειξης τοῦ δεύτερου μέρους.  
**Βῆμα 1<sup>ο</sup>.** Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΒ** ὡς πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐχγεγραμμένου σὲ κύκλω μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

$$\frac{AB}{BG} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

$$\frac{AG}{BG} = \frac{2}{1} = \frac{1560}{780}$$

**Βῆμα 2<sup>ο</sup>.** Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΗ** ὡς πλευρὰ κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐχγεγραμμένου σὲ κύκλω μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

ἐπειδὴ ἀπὸ λήμμα 1

$$\frac{AH}{HG} = \frac{AB + AG}{BG} = \frac{AB}{BG} + \frac{AG}{BG} < \frac{1351}{780} + \frac{1560}{780} = \frac{2911}{780}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$AG^2 = HG^2 + AH^2 \rightarrow$$

$$\frac{AG^2}{HG^2} = 1 + \frac{AH^2}{HG^2}$$

$$< \left( \frac{2911}{780} \right)^2 + 1 = \frac{9082321}{608400} \rightarrow$$

$$\frac{AG}{HG} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

**Βῆμα 3<sup>ο</sup>.** Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΘ** ὡς πλευρὰ κανονικοῦ 24γώνου ἐχγεγραμμένου σὲ κύκλω μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

ἐπειδὴ ἀπὸ λήμμα 1

$$\frac{AO}{OG} = \frac{AH + AG}{HG} = \frac{AH}{HG} + \frac{AG}{HG} < \frac{2911}{780} + \frac{3013\frac{3}{4}}{780} = \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$AG^2 = OG^2 + AO^2 \rightarrow$$

$$\frac{AG^2}{OG^2} = 1 + \frac{AO^2}{OG^2}$$

$$< \left( \frac{1823}{240} \right)^2 + 1 = \frac{3380929}{57600} \rightarrow$$

$$\frac{AG}{OG} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

Βήμα 4<sup>ο</sup>. Θεωρούμε την πλευρά ΓΚ ως πλευρά κανονικοῦ 48γώνου ἐχχεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτίνα ΕΓ καὶ διάμετρο δ.

ἐπειδὴ ἀπὸ λήμμα 1

$$\frac{AK}{KG} = \frac{AO + OG}{OG} = \frac{AO}{OG} + \frac{OG}{OG} < \frac{1823}{240} + \frac{1838\frac{9}{11}}{240} = \frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$AG^2 = KG^2 + AK^2 \rightarrow$$

$$\frac{AG^2}{KG^2} = 1 + \frac{AK^2}{KG^2}$$

$$< \left(\frac{1007}{66}\right)^2 + 1 = \frac{1018405}{4356} \rightarrow$$

$$\frac{AG}{KG} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

Βήμα 5<sup>ο</sup>. Θεωρούμε την πλευρά ΓΛ ως πλευρά κανονικοῦ 96γώνου ἐχχεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτίνα ΕΓ καὶ διάμετρο δ.

ἐπειδὴ ἀπὸ λήμμα 1

$$\frac{AL}{LG} = \frac{AK + KG}{KG} = \frac{AK}{KG} + \frac{KG}{KG} < \frac{1007}{66} + \frac{1009\frac{1}{6}}{66} = \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$AG^2 = LG^2 + AL^2 \rightarrow$$

$$\frac{AG^2}{LG^2} = 1 + \frac{AL^2}{LG^2}$$

$$< \left(\frac{2016\frac{1}{6}}{66}\right)^2 + 1 = \frac{4069284\frac{1}{36}}{4356} \rightarrow$$

$$\frac{AG}{LG} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

Σταματώντας ἐδῶ τὴν ἀναδρομικὴ ἀπειροστικὴ προσέγγιση καὶ συμβολίζοντας μὲ  $\pi_{96}$  τὴν περίμετρο τοῦ ἐχχεγραμμένου 96γώνου στὸν κύκλο μὲ διάμετρο δ ὁ Ἀρχιμήδης καταλήγει

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{96}}{\delta} &= \frac{\text{περίμετρος } 96\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon}{\text{διάμετρο κύκλου}} = \frac{96 \cdot LG}{AG} \\ &> \frac{96 \cdot 66}{2017\frac{1}{4}} = \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71} \end{aligned}$$

## Βιβλιογραφία

- J.L. Heiberg, Archimedis, Opera Omnia, Vol. I, B.G. Teubner, Lipsiae
- T.L. Heath, The Works Of Archimedes, Cambridge University Press, 1897
- Ε.Σ. Σταμάτη, Αρχιμήδους Κύκλου Μέτρησης, Άθηναι 1950
- N.M. Beskin, Fascinating Fractions, MIR Publishers, Moscow
- Paulus Tannery, Diophanti Alexandrini, Opera Omnia, Volumen II, B.G. Teubner, Lipsiae
- H. Schöne, Heronis Alexandrini, Rationes Dimetiendi et Commentatio Dioptrica, Vol. III, B.G. Teubner, Lipsiae
- Fridericus Hultsch, Pappi Alexandrini Collectionis, Vol. I, Berolini 1876-8
- E. B. Davies, (Paper) Archimedes' calculations of square roots, Jan 2011.