

Υποδείξεις - Απαντήσεις

Ενότητα 1

Σύνολα

Ασκήσεις για εξάσκηση

1.13 Είναι ερωτήσεις θεωρίας.

- 1.14** α) Λ. β) Σ. γ) Σ. δ) Σ.
ε) Σ. στ) Λ. ζ) Σ. η) Σ.
θ) Σ. ι) Λ.

1.15 α) $A = \{-3, 2, 3\}$.

β) $B = \{-2, 5, -1, 1\}$, διότι $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$.

1.16 α) Πρέπει $x^2 - 2x - 3 = 0$. *Απ:* $A = \{3, -1\}$

β) Είναι $K = \alpha - \frac{5}{\alpha}$ και ο α είναι διαυρέτης του 5, δηλαδή ± 1 και ± 5 . *Απ:* $B = \{1, -1, 5, -5\}$

1.17 Είναι:

$$\frac{3v+4}{2} = \frac{(2v+4)+v}{2} = v+2+\frac{v}{2}$$

Πρέπει ο v να είναι άρτιος. *Απ:* $A = \{0, 2, 4\}$

1.18 Πρέπει $-2 \leq x \leq 6$ και $(x < -6 \text{ ή } x > 2)$.

$$\text{Απ: } A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 6\}$$

1.19 α) $A \cap B = \{3, 6\}$.

β) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

1.20 α) $A = \{1, -1, -2, 3\}$.

β) Πρέπει $\begin{cases} x-1=0 \\ 1-x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. *Απ:* $B = \{1\}$

1.21 $A = \{-2, 2, -1, 4\}$ και $B = \{2, -3, 3, -4, 4\}$.

$$\text{Απ: } \alpha) A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 2, 3, 4\}$$

$$\beta) A \cap B = \{2, 4\}$$

1.22 $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

$B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$.

$\Gamma = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

$\Delta = \{1\}$.

$E = \emptyset$.

1.23 α) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ άρτιος}\}$.

β) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ περιττός και } x \leq 31\}$.

γ) $\Gamma = \{\text{τα γράμματα της λέξης μαθηματικά}\}$.

δ) $\Delta = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{N} \mid x \text{ πολλαπλάσιο του } 5 \\ \text{και } x \leq 100 \end{array} \right\}$.

1.24 α) $X = B$ και $Y = \Delta$.

β) i) $A \cup B = \{-3, 0, 3\}$.

ii) $A \cap B = \{-3, 3\}$.

iii) $\Gamma \cap \Delta = \{0, 1, 2, 3\}$.

iv) $A \cap \Delta = \{0, 3\}$.

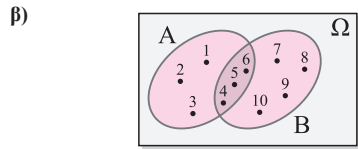
Τα διαγράμματα Venn είναι απλά, με βάση τη θεωρία.

1.25 α) $A = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)\}$.

β) $B = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), \dots\}$.

Το σύνολο B έχει άπειρο πλήθος στοιχείων.

1.26 α) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.



γ) $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \{4, 5, 6\}$, $A' = \{7, 8, 9, 10\}$,

$B' = \{1, 2, 3\}$, $A \cap B' = \{1, 2, 3\}$,

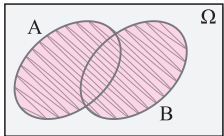
$A' \cap B = \{7, 8, 9, 10\}$, $A' \cap B' = \emptyset$,

$A' \cup B' = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$.

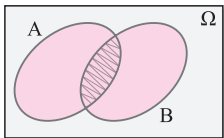
δ) $(A \cup B)' = \emptyset \stackrel{(*)}{=} A' \cap B'$ και

$(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\} \stackrel{(*)}{=} A' \cup B'$.

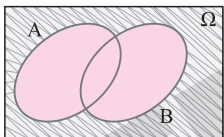
1.27 α)



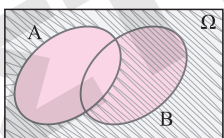
β)



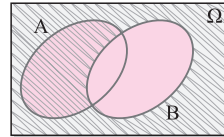
γ)



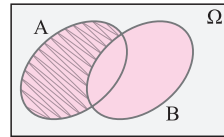
δ)



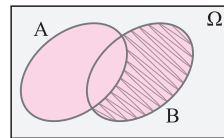
ε)



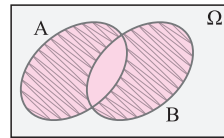
στ)



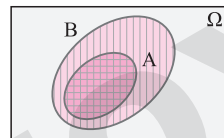
ζ)



η)

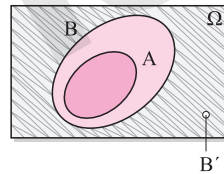


1.28 α), β)

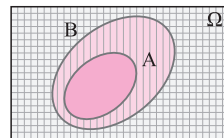


▨ : $A \cup B$ ▤ : $A \cap B$

γ)



δ)



▨ : A' ▤ : B'

1.29 α) $A \cap B$.

β) $A \cup B$.

γ) $B \cap A'$.

δ) $A \cap B'$.

ε) $(A \cup B)'$.

στ) $(A' \cap B) \cup (A \cap B')$.

1.30 α) Είναι μαθητής του γυμνασίου ή παίκτης της ομάδας ποδοσφαίρου.

β) Είναι μαθητής του γυμνασίου και παίκτης της ομάδας ποδοσφαίρου.

γ) Δεν είναι μαθητής του γυμνασίου.

δ) Δεν είναι παίκτης της ομάδας ποδοσφαίρου.

ε) Είναι παίκτης της ομάδας ποδοσφαίρου αλλά όχι μαθητής του γυμνασίου.

στ) Είναι μαθητής του γυμνασίου αλλά όχι παίκτης της ομάδας ποδοσφαίρου.

ζ) Δεν είναι ούτε μαθητής του γυμνασίου ούτε παίκτης της ομάδας ποδοσφαίρου.

η) Δεν είναι ούτε μαθητής του γυμνασίου ούτε παίκτης της ομάδας ποδοσφαίρου.

1.31 α) Θα γράψουμε καθένα από τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων του.

♦ Το κλάσμα $K = \frac{x-1}{x^2-3x-4}$ δεν ορίζεται, όταν:
 $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ή } x = -1)$

Έτσι $A = \{-1, 4\}$.

♦ Είναι:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1 = 0 \text{ ή } x^2 - 5x + 4 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 4)$$

Επομένως $B = \{-1, 1, 4\}$.

Επειδή κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B, το A είναι υποσύνολο του B.

1.32 α) Θα γράψουμε πρώτα τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους.

♦ Είναι:

$$\frac{x+10}{x} = \frac{x}{x} + \frac{10}{x} = 1 + \frac{10}{x}$$

Επειδή ο $1 + \frac{10}{x}$ είναι φυσικός, πρέπει και ο $\frac{10}{x}$ να είναι φυσικός. Επομένως ο x είναι φυσικός διαιρέτης του 10, δηλαδή:

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 5 \quad \text{και} \quad x = 10$$

Άρα $A = \{1, 2, 5, 10\}$.

♦ Είναι:

$$(x^2 + 4)(x^2 - 6x + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4 = 0 \text{ ή } x^2 - 6x + 5 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 5)$$

αφού η εξίσωση $x^2 + 4 = 0$ είναι αδύνατη.

Επομένως είναι $B = \{1, 5\}$.

i) Είναι $A \cap B = \{1, 2, 5, 10\} \cap \{1, 5\} = \{1, 5\}$.

ii) Είναι $A \cup B = \{1, 2, 5, 10\} \cup \{1, 5\} = \{1, 2, 5, 10\}$.

β) Κάθε στοιχείο του B ανήκει και στο σύνολο A. Επομένως $B \subseteq A$.

1.33 α) A. β) Ψ. γ) A. δ) Ψ.

ε) Ψ. στ) A. ζ) Ψ. η) A.

1.34 α) A. β) Ψ. γ) A. δ) Ψ.

ε) A. στ) Ψ. ζ) Ψ. η) Ψ.

1.35 α) Ψ. β) Ψ. γ) A. δ) A.

ε) Ψ. στ) A. ζ) Ψ. η) Ψ.

1.36 $1 \rightarrow \epsilon$, $2 \rightarrow \delta$, $3 \rightarrow \alpha$, $4 \rightarrow \beta$,
 $5 \rightarrow \sigma\tau$, $6 \rightarrow \gamma$.

1.37 α) Υπάρχει ακέραιος αριθμός που είναι περιττός.

β) Υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε $a^2 = -4$.

γ) Για κάθε αριθμό α ισχύει ότι $a \leq 2$.

δ) Υπάρχουν αριθμοί α, β, ώστε να ισχύει $a \neq 2$ ή $\beta \neq 4$.

ε) Κανέναν ακέραιος αριθμός δεν διαιρεί τον 7.

Ενότητα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί: Πράξεις και ιδιότητες

Ασκήσεις για εξάσκηση

- 2.30** α) $A = 1$. β) $B = 6$.
 γ) $\Gamma = -2$. δ) $\Delta = -7$.
- 2.31** α) 1. β) 1. γ) -1.
 δ) 1. ε) 1. στ) 1.
- 2.32** α) $A = 2$. β) $B = -6$. γ) $\Gamma = -10$.
 δ) $\Delta = -1$. ε) $E = -6$. στ) $Z = -9$.
- 2.33** α) $A = -2$. β) $B = 1$.
 γ) $\Gamma = -1$. δ) $\Delta = -4$.
- 2.34** α) -1. β) 2. γ) -30.
 δ) -16. ε) -1. στ) 24.
- 2.35** α) $A = -7$. β) $B = 12$.
 γ) $\Gamma = -3$. δ) $\Delta = 4$.
- 2.36** α) $A = 1$. β) $B = 2$. γ) $\Gamma = 2$.
 δ) $\Delta = 1$. ε) $E = 7$. στ) $Z = 1$.
- 2.37** α) 5. β) -2. γ) -2.
 δ) 3. ε) 3. στ) $-\frac{2}{3}$.
 ζ) 1. η) $-\frac{9}{2}$.
- 2.38** α) $A = 9$. β) $B = -4$. γ) $\Gamma = 3$.
 δ) $\Delta = -12$. ε) $E = 0$. στ) $Z = -6$.
 ζ) $H = 4$. η) $\Theta = -1$.
- 2.39** α) $A = -2$. β) $B = -5$. γ) $\Gamma = 7$.
 δ) $\Delta = 2$. ε) $E = 10$. στ) $Z = -3$.
 ζ) $H = -6$. η) $\Theta = -4$.
- 2.40** α) $A = -1$. β) $B = 1$.
 γ) $\Gamma = 4$. δ) $\Delta = -2$.
- 2.41** α) $A = \frac{3}{5}$. β) $B = \frac{44}{35}$.
 γ) $\Gamma = 1$. δ) $\Delta = -2$.
- 2.42** α) Η παράσταση δίνει:

$$\frac{\alpha - \alpha\beta^2 + 2\beta}{1 - \beta^2 - 2\alpha\beta} = \frac{\frac{1}{7} - \frac{1}{63} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{21}} = \frac{\frac{9-1+42}{63}}{\frac{63-7-6}{63}} = \frac{\frac{50}{63}}{\frac{50}{63}} = 1$$
- β) Είναι:

$$A = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma}{1 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma} = \dots = \frac{40 + 16 + 10 - 1}{80 - 8 - 5 - 2} = 1$$
- 2.43** α) $A = 5\beta + 4$. β) $B = 3\alpha + 1$.
 γ) $\Gamma = -2\alpha$. δ) $\Delta = 0$.
 ε) $E = -35x$. στ) $Z = 25$.
- 2.44** α) $A = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 6$.
 β) $B = 2\alpha - 2\beta - 6\alpha - 3\beta + \beta = -4\alpha - 4\beta = -4(\alpha + \beta) = 12$.
 γ) $\Gamma = 7 + \alpha + \beta + 3 - 2 - \gamma + x = (\alpha + \beta) + (x - \gamma) + 8 = 4$.
 δ) $\Delta = -(x - \gamma) - (\alpha - \beta + \gamma) = -4 - (-2) = -2$.
 ε) $E = -3\alpha - 3\beta - 3\gamma - 4\beta + 4\alpha + 4\gamma + 6\alpha - 8\gamma = 7\alpha - 7\beta - 7\gamma = 7(\alpha - \beta - \gamma) = 7(-1) = -7$.
- 2.45** α) $A = 19$. β) $B = 34$.
 γ) $\Gamma = -7$. δ) $\Delta = 1$.
 ε) $E = -12$. στ) $Z = 5$.
- 2.46** α) $A = -1$. β) $B = -4$.
 γ) $\Gamma = 6$. δ) $\Delta = 13$.
 ε) $E = \frac{1}{6}$. στ) $Z = 1$.
- 2.47** α) $A = -17$. β) $B = -7$.
 γ) $\Gamma = -\frac{1}{4}$. δ) $\Delta = -\frac{1}{4}$.
- 2.48** α) 2^{11} .
 β) $4^7 \cdot 8^4 = (2^2)^7 (2^3)^4 = 2^{26}$. γ) 3^{14} .
 δ) $(3^4)^3 (3^2)^2 = 3^{16}$. ε) 7^{15} .
 στ) $(-2)^{15}$. ζ) 3^5 .
- η) $(3^4)^{10} : (3^3)^5 = 3^{25}$.
 θ) $\frac{(3^3)^4 (3^2)^6}{(3^4)^5} = \frac{3^{24}}{3^{20}} = 3^4$.
 ι) $\frac{(2^4)^{10} (2^3)^6}{(2^5)^5 (2^2)^6} = \frac{2^{58}}{2^{37}} = 2^{21}$.
- 2.49** α) $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$. β) 6^7 .
 γ) $4^{10} = (2^2)^{10} = 2^{20}$.
 δ) $16^{19} = (2^4)^{19} = 2^{76}$. ε) 2^{18} .
 στ) $(-3)^{24} = 3^{24}$. ζ) 3^{15} .
- 2.50** α) $2^{15} : 2^6 = 2^9$. β) $3^{20} : 3^9 = 3^{11}$.
 γ) $\frac{3^{12} \cdot 3^{10}}{3^{16}} = 3^6$.
 δ) $[(2^8)^2 (2^9)^4] : (2^{10})^5 = 2^{52} : 2^{50} = 2^2$.
 ε) $(2^8)^4 : (2^6)^3 = 2^{14}$.
 στ) $\frac{-3^3 \cdot 3^8}{-3^4} = 3^7$.
 ζ) $\frac{3^{16} (-3^{25})}{-3^{21}} = \frac{3^{41}}{3^{21}} = 3^{20}$.
 η) $\frac{5^4 \cdot 5^{30}}{5^{24}} = 5^{10}$.
- 2.51** α) 3^5 . β) 2^{-3} .
 γ) $(2^2)^{-5} (2^3)^{-6} \cdot 2^{-12} = 2^{-10-18-12} = 2^{-40}$.
 δ) $(-5^3)(-5^3)^{-5} (5^3)^4 = 5^3 \cdot 5^{-15} \cdot 5^8 = 5^{-4}$.
 ε) 7^4 . στ) 5^{-8} .
 ζ) 2^{24} .
 η) $\frac{(-2^5)^{-4} (-2^6)^5}{(-2^4)^7} = \frac{2^{-20} \cdot 2^{30}}{2^{28}} = 2^{-18}$.
- 2.52** α) 6^{-5} . β) 30^{-9} .
 γ) 3^{-5} . δ) 2^{-4} .
 ε) 1^{-10} .
 στ) $(\frac{3}{5} \cdot \frac{100}{9} \cdot \frac{3}{2})^{-6} = 10^{-6}$.
 ζ) $(\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{9})^{-7} = (\frac{4}{3})^{-7} = (\frac{3}{4})^7$.
 η) $(\frac{25}{4} \cdot \frac{2}{5})^{-10} = (\frac{5}{2})^{-10} = (\frac{2}{5})^{10}$.
 θ) $(-3)^{-25}$.
 ι) $(-3)^{10} = 3^{10}$.
- 2.53** α) $A = (\frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16}$.
 β) $B = \frac{4^3 \cdot 4^{10}}{4^2 \cdot 4^{11}} = 1$.
 γ) $\Gamma = -\frac{2^5 \cdot 2^6}{2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^3} = -\frac{2^{11}}{2^4} = -2^7 = -128$.
 δ) $\Delta = \frac{5^{12} \cdot 5^{-11}}{5^5 \cdot 5^8 \cdot 5^{-12}} = 1$.
 ε) $E = -\frac{3^{12} \cdot 3^{12} \cdot 3^{-20}}{3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^{-6}} = -\frac{3^4}{3^{-1}} = -3^5 = -243$.
 στ) $Z = (\frac{1}{6})^{-2} - (\frac{1}{2})^{-5} - (\frac{1}{2})^{-3} = 36 - 32 - 8 = -4$.
- 2.54** α) $A = 1$. β) $B = 1$.
- 2.55** α) $A = \frac{18^{10} \cdot 10^{15} \cdot 22^{16}}{55^5 \cdot 33^{11} \cdot 15^{10} \cdot 4^{20}} = \frac{(2 \cdot 9)^{10} (2 \cdot 5)^{15} (2 \cdot 11)^{16}}{(5 \cdot 11)^5 (3 \cdot 11)^{11} (3 \cdot 5)^{10} (2^2)^{20}} = \frac{2^{10} \cdot 9^{10} \cdot 2^{15} \cdot 5^{15} \cdot 2^{16} \cdot 11^{16}}{5^5 \cdot 11^5 \cdot 3^{11} \cdot 11^{11} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 2^{40}} = \frac{2^{41} (3^2)^{10} \cdot 5^{15} \cdot 11^{16}}{2^{40} \cdot 3^{21} \cdot 5^{15} \cdot 11^{16}} = \frac{2^{41} \cdot 3^{20}}{2^{40} \cdot 3^{21}} = \frac{2}{3}$.
 β) $B = \frac{527 \cdot 10^{12} - 3,27 \cdot 10^{14}}{5 \cdot 10^{12} + 4,5 \cdot 10^{13}} = \frac{527 \cdot 10^{12} - 327 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{14}}{5 \cdot 10^{12} + 45 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{13}} = \frac{527 \cdot 10^{12} - 327 \cdot 10^{12}}{5 \cdot 10^{12} + 45 \cdot 10^{12}} = \frac{(527 - 327) \cdot 10^{12}}{(5 + 45) \cdot 10^{12}} = \frac{200}{50} = 4$.
- 2.56** α) $A = 1$. β) $B = 1$.
 γ) $\Gamma = x^2$. δ) $\Delta = y^2$.
 ε) $E = xy^2$.
- 2.57** Με χρήση των ιδιοτήτων των δυνάμεων.
 α) $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$. **Απ:** $A = 2^9$
 β) $1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 5 \cdot 2^{-2}$. **Απ:** $B = 10^{40}$

$$\gamma) 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 3 \cdot 2^{-1}.$$

$$\delta) \Delta = (xy)^4.$$

$$\epsilon) E = (xy)^{10}.$$

$$\mathbf{2.58 \text{ \alpha}}) \text{ Βρίσκουμε } A = (xy)^4 = 1.$$

$$\beta) \text{ Βρίσκουμε } B = (xy)^{10} = 1.$$

$$\mathbf{2.59 \text{ \alpha}}) A = (x^3y^2)^3 = -8.$$

$$\beta) B = x^3 = (-3)^3 = -27.$$

$$\mathbf{2.60} A = (xy)^9 = 2^9.$$

$$\mathbf{2.61 \text{ \alpha}}) A = 10^{26}.$$

$$\beta) B = 10^2 = 100.$$

$$\gamma) \text{ Απλοποιούμε τη } \Gamma \text{ και βρίσκουμε } \Gamma = (xy)^9 = 1.$$

$$\mathbf{2.62 \text{ \alpha}}) \text{ Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων.}$$

$$\beta) \text{ Είναι } \beta = 10^{-2} \text{ και } \gamma = 10^{-3}, \text{ οπότε } A = 1.$$

$$\mathbf{2.63 \text{ \alpha}}) A = \dots = (\alpha\beta)^{-31} = 1.$$

$$\beta) B = \dots = (\alpha\beta)^4 = 1.$$

$$\gamma) \Gamma = \dots = (\alpha\beta)^2 = 1.$$

$$\mathbf{2.64 \text{ \alpha}}) 100^7 = 10^{14}.$$

$$\beta) 500^3 = 5^3 \cdot 10^6.$$

$\gamma)$ Για να βρούμε σε πόσα μηδενικά τελειώνει ο αριθμός $8^4 \cdot 25^8$ θα τον γράψουμε στη μορφή $\beta \cdot 10^v$, όπου β είναι ένας αριθμός που δεν τελειώνει σε 0. Είναι:

$$\begin{aligned} 8^4 \cdot 25^8 &= (2^3)^4 (5^2)^8 = 2^{12} \cdot 5^{16} = 2^{12} \cdot 5^{12+4} = \\ &= 2^{12} \cdot 5^{12} \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^{12} \cdot 5^4 = \\ &= 10^{12} \cdot 5^4 = 5^4 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

Άρα ο αριθμός $8^4 \cdot 25^8$ τελειώνει σε 12 μηδενικά.

$\mathbf{2.65}$ Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τους α και β στη μορφή κ^v και λ^v αντίστοιχα, όπου v, κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί. Είναι:

$$\blacklozenge \alpha = 5^{51} = 5^{3 \cdot 17} = (5^3)^{17} = 125^{17}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge \beta &= 2^{121} - 4^{60} - 2^{119} = 2^{121} - (2^2)^{60} - 2^{119} = \\ &= 2^{121} - 2^{120} - 2^{119} = 2^{119}(2^2 - 2 - 1) = 2^{119} = \\ &= 2^{7 \cdot 17} = (2^7)^{17} = 128^{17} \end{aligned}$$

Επειδή $128 > 125$, θα είναι $\beta > \alpha$.

$$\mathbf{A\pi:} \Gamma = 6^4$$

$$\mathbf{2.66 \text{ \alpha}}) A = (x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1) - 2x^2 - 2 = 0.$$

$$\beta) B = (4x^2 + 4x + 1) - (4x^2 - 4x + 1) + 2 - 8x = 2.$$

$$\gamma) \Gamma = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 24x - 2x^3 = 0.$$

$$\delta) \Delta = (27 - 27x + 9x^2 - x^3) - (27 + 27x + 9x^2 + x^3) + 2x^3 + 54x = 0.$$

$$\mathbf{2.67 \text{ \alpha}}) A = 0.$$

$$\beta) B = -7\alpha.$$

$\mathbf{2.68}$ Δες την εφαρμογή 2.8. Ενδεικτικά:

$$\begin{aligned} \theta) \alpha' \text{ μέλος} &= (\alpha + \beta)^2(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) + \\ &+ 3\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) = \dots = \\ &= (\alpha + \beta)^2(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 + 3\alpha\beta) = \\ &= (\alpha + \beta)^4 \end{aligned}$$

$$\mathbf{2.69 \text{ \alpha}}) (3x + 4)^2 = 9x^2 + 24x + 16.$$

$$\beta) (2x^2 - 2)^2 = 4x^4 - 8x^2 + 4.$$

$$\gamma) (3 - 2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2.$$

$$\delta) (2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 4.$$

$$\epsilon) \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 - 2x + \frac{1}{4}.$$

$$\sigma\tau) \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}.$$

$$\mathbf{2.70 \text{ \alpha}}) x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = (x + 4)^3.$$

$$\beta) 27y^3 + 27y^2 + 9y + 1 = (3y + 1)^3.$$

$$\gamma) 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3.$$

$$\delta) 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x - 3)^3.$$

$$\epsilon) 64x^3 + 48x^2 + 12x + 1 = (4x + 1)^3.$$

$$\sigma\tau) \frac{1}{8}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 6y - 8 = \left(\frac{1}{2}y - 2\right)^3.$$

$$\mathbf{2.71 \text{ \alpha}}) (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2.$$

$$\beta) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5.$$

$$\gamma) \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} =$$

$$= 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2.$$

$$\begin{aligned} \delta) 4\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2} &= (2\alpha)^2 + \left(\frac{3}{\alpha}\right)^2 = \left(2\alpha + \frac{3}{\alpha}\right)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot \frac{3}{\alpha} = \\ &= 5^2 - 12 = 13. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2.72 \text{ \alpha}}) (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2.$$

$$\beta) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta = 3^2 + 2 \cdot 4 = 17.$$

$$\gamma) \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + 2\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 3^2 + 2 = 11.$$

$$\delta) 9\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = (3\alpha)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \left(3\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + 2 \cdot 3\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 10.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2.73 \text{ \alpha}}) (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) &= \\ &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = \\ &= \alpha^3 + \beta^3. \end{aligned}$$

$$\beta) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

$$\gamma) \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \alpha^3 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 - 3\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) =$$

$$= 3^3 - 3 \cdot 3 = 18.$$

$$\begin{aligned} \delta) 8\alpha^3 + \frac{27}{\alpha^3} &= (2\alpha)^3 + \left(\frac{3}{\alpha}\right)^3 = \\ &= \left(2\alpha + \frac{3}{\alpha}\right)^3 - 3 \cdot 2\alpha \cdot \frac{3}{\alpha} \left(2\alpha + \frac{3}{\alpha}\right) = \\ &= 3^3 - 18 \cdot 3 = 27 - 54 = -27. \end{aligned}$$

$\mathbf{2.74}$ Είναι $\alpha + \beta = 4$, οπότε:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 &= 4^2 \text{ ή } \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 16 \text{ ή} \\ \alpha^2 + \beta^2 + 2 \cdot 3 &= 16 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 = 10 \end{aligned}$$

Άλλος τρόπος

Είναι:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \cdot 3 = 10$$

Είναι $\alpha + \beta = 4$, οπότε:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^3 &= 4^3 \text{ ή } \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = 64 \text{ ή} \\ (\alpha^3 + \beta^3) + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) &= 64 \text{ ή} \\ \alpha^3 + \beta^3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 &= 64 \text{ ή } \alpha^3 + \beta^3 = 28 \end{aligned}$$

Άλλος τρόπος

Είναι:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 4^3 - 3 \cdot 3 \cdot 4 = 28$$

$$\mathbf{2.75 \text{ \alpha}}) A = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \cdot 2 = 5.$$

$$\beta) B = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 3^3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = 9.$$

$$\begin{aligned} \gamma) \Gamma &= \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = \\ &= 5^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 25 - 2 \cdot 4 = 17. \end{aligned}$$

$$\delta) \Delta = \alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^3)^2 + (\beta^3)^2 = (\alpha^3 + \beta^3)^2 - 2\alpha^3\beta^3 =$$

$$= 9^2 - 2(\alpha\beta)^3 = 81 - 2 \cdot 8 = 65.$$

$$\begin{aligned} \epsilon) E &= \alpha(1 + \alpha + \alpha^2) + \beta(1 + \beta + \beta^2) = \\ &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \beta + \beta^2 + \beta^3 = \\ &= (\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^3 + \beta^3) = \\ &= 3 + 5 + 9 = 17. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2.76 \text{ \alpha}}) A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = \dots = 14.$$

$$\beta) B = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \dots = 52.$$

$$\mathbf{2.77}$$
 Είναι $x + \frac{1}{x} = 3$.

$$\begin{aligned} \alpha) A &= x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = \\ &= 3^2 - 2 = 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) B &= x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \\ &= 3^3 - 3 \cdot 3 = 18. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \Gamma &= x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \stackrel{(A)}{=} \\ &= 7^2 - 2 = 47. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \Delta &= x^6 + \frac{1}{x^6} = (x^3)^2 + \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 = \\ &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 - 2x^3 \cdot \frac{1}{x^3} \stackrel{(B)}{=} \\ &= 18^2 - 2 = 324 - 2 = 322. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2.78 \text{ \alpha}}) \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 2^2 - 2 = 2. \\ &= 2^2 - 2 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 - 3\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \\ &= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} &= (\alpha^2)^2 + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^2 = \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2 - 2\alpha^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2} = \\ &= 2^2 - 2 = 2. \end{aligned}$$

δ) Είναι $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 2$ και $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = 2$. Άρα:

$$\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right) = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^5 + \frac{\alpha^2}{\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^5} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5} + \frac{1}{\alpha} + \alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5} = 2$$

ε) $\alpha(1 + \alpha + \alpha^2) + \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) =$

$$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} =$$

$$= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + \left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right) = 6.$$

Ας σημειώσουμε ότι αναγκαστικά είναι $\alpha = 1$.

2.79 α) $(\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) =$

$$= \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 =$$

$$= \alpha^3 - \beta^3.$$

β) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) =$

$$= 3^3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 = 27 + 36 = 63.$$

γ) $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3} = \alpha^3 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^3 + 3\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) =$

$$= 3^3 + 3 \cdot 3 = 36.$$

δ) $27\alpha^3 - \frac{8}{\alpha^3} = (3\alpha)^3 - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^3 =$

$$= \left(3\alpha - \frac{2}{\alpha}\right)^3 + 3 \cdot 3\alpha \cdot \frac{2}{\alpha} \left(3\alpha - \frac{2}{\alpha}\right) =$$

$$= 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 18 = 19.$$

2.80 Είναι $\alpha - \beta = 2$, οπότε:

$$(\alpha - \beta)^2 = 2^2 \text{ ή } \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 4 \text{ ή}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 + 2\alpha\beta \text{ ή}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 + 2 \cdot 3 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 = 10$$

Άλλος τρόπος

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta = 2^2 + 2 \cdot 3 = 10.$$

Είναι $\alpha - \beta = 2$, οπότε:

$$(\alpha - \beta)^3 = 2^3 \text{ ή } \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = 8 \text{ ή}$$

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta) = 8 \text{ ή}$$

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3 \cdot 3 \cdot 2 = 8 \text{ ή } \alpha^3 - \beta^3 = 26$$

Άλλος τρόπος

Είναι:

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) =$$

$$= 2^3 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 26$$

2.81 α) $A = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta =$

$$= 1^2 + 2 \cdot 6 = 13.$$

β) $B = \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) =$

$$= 1^3 + 3 \cdot 6 \cdot 1 = 19.$$

γ) $\Gamma = \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 =$

$$= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 13^2 - 2(\alpha\beta)^2 =$$

$$= 169 - 2 \cdot 36 = 169 - 72 = 97.$$

δ) $\Delta = \alpha(1 + \alpha + \alpha^2) - \beta(1 - \beta + \beta^2) =$

$$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 - \beta + \beta^2 - \beta^3 =$$

$$= (\alpha - \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^3 - \beta^3) =$$

$$= 1 + 13 + 19 = 33.$$

2.82 α) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} =$

$$= 3^2 + 2 = 11.$$

β) $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) =$

$$= 27 + 3 \cdot 3 = 36.$$

γ) $x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} =$

$$= 121 - 2 = 119.$$

2.83 Είναι $x - \frac{1}{x} = 2$.

α) $A = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2^2 + 2 = 6.$

β) $B = x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) =$

$$= 2^3 + 3 \cdot 2 = 14.$$

γ) $\Gamma = x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 =$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 6^2 - 2 = 34.$$

δ) $\Delta = x^5 - \frac{1}{x^5}$. Είναι:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 6 \text{ και } x^3 - \frac{1}{x^3} = 14$$

Άρα:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 6 \cdot 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^5 - \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x^5} = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^5 - \frac{1}{x^5} + \left(x - \frac{1}{x}\right) = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta + 2 = 84 \Leftrightarrow \Delta = 82$$

2.84 α) $A = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} = \alpha^2 + 2.$

β) $B = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) = \alpha^3 + 3\alpha.$

2.85 α), β), γ), δ) Εφαρμόζουμε τις ταυτότητες αθροίσματος και διαφοράς κύβων.

2.86 α) $A = (x+1)(x^2-x+1) = x^3 + 1^3 = x^3 + 1.$

β) $B = (x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1^3 = x^3 - 1.$

γ) $\Gamma = (2x+1)(4x^2-2x+1) = (2x)^3 + 1^3 = 8x^3 + 1.$

δ) $\Delta = (3x-1)(9x^2+3x+1) = (3x)^3 - 1^3 = 27x^3 - 1.$

ε) $E = (x^2+2y)(x^4-2x^2y+4y^2) = (x^2)^3 + (2y)^3 =$

$$= x^6 + 8y^3.$$

στ) $Z = (\alpha^2+2)(\alpha^4-2\alpha^2+4) = (\alpha^2)^3 + 2^3 = \alpha^6 + 8.$

2.87 α) $A = x^6 - 1.$

β) $B = x^6 - 729.$

γ) $\Gamma = \alpha^6 - \beta^6.$

δ) $\Delta = \alpha^{16} - 1.$

2.88 α) Θα είναι $(\alpha + \beta)^3 = 1^3 = 1.$

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3\alpha\beta = 1$$

Άλλος τρόπος

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta =$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - \alpha\beta = 1 - 3\alpha\beta$$

β) Όπως στο ερώτημα (α). (Υπάρχουν πολλοί τρόποι.)

2.89 α) Είναι:

$$A = \dots = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) + 3(\alpha - \beta) =$$

$$= (\alpha - \beta)^2 + 3(\alpha - \beta)$$

β) Προκύπτει η παράσταση:

$$B = 9(\alpha^2 + \beta^2) - 24(\alpha^4 + \beta^4) + 16(\alpha^6 + \beta^6)$$

Αλλά:

$$\diamond \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 1 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$\diamond \alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^2 + \beta^2)^3 - 3\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) = 1 - 3\alpha^2\beta^2$$

2.90 Είναι:

$$\frac{\alpha^3}{1 + \alpha^2} - \frac{\beta^3}{1 + \beta^2} = \dots = \frac{(\alpha^3 - \beta^3) + \alpha^2\beta^2(\alpha - \beta)}{1 + \beta^2 + \alpha^2 + \alpha^2\beta^2} =$$

$$= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + 1 \cdot (\alpha - \beta)}{1 + \beta^2 + \alpha^2 + 1} =$$

$$= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1)}{\alpha^2 + \beta^2 + 2} = \alpha - \beta$$

2.91 α) Προκύπτει $(\alpha - \beta)^2 = 0.$

β) Παίρνουμε $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 = 0.$

γ) Προκύπτει:

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 + (\gamma - 1)^2 = 0$$

δ) $(\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

ε) $\alpha^3 - \beta^3 = 3\alpha\beta(\alpha - \beta) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

στ) Με απαλοιφή παρονομαστών.

2.92 α) Είναι:

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta$$

β) Έστω:

$$\alpha = \frac{2017}{2016}, \quad \beta = \frac{2016}{2017}$$

Τότε:

$$A = \left(\frac{2017}{2016} + \frac{2016}{2017}\right)^2 - \left(\frac{2017}{2016} - \frac{2016}{2017}\right)^2 \stackrel{(a)}{=} =$$

$$= 4\alpha\beta = 4 \cdot \frac{2017}{2016} \cdot \frac{2016}{2017} = 4$$

γ) Είναι:

$$(4^{2017} + 5^{2016})^2 - (4^{2017} - 5^{2016})^2 \stackrel{(a)}{=} 4 \cdot 4^{2017} \cdot 5^{2016} =$$

$$= 4 \cdot 4^1 \cdot 4^{2016} \cdot 5^{2016} = 16(4 \cdot 5)^{2016} = 16 \cdot 20^{2016} =$$

$$= 16(2 \cdot 10)^{2016} = 16 \cdot 2^{2016} \cdot 10^{2016} =$$

$$= 2^4 \cdot 2^{2016} \cdot 10^{2016} = 2^{2020} \cdot 10^{2016}$$

2.93 $E = 6 \tau. \mu.$

2.94 Έστω $\Delta B \Gamma$ ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^\circ$. Είναι:

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= (\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \\ &= \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = \\ &= 5\alpha^2 - 20\alpha + 25 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 &= (2\alpha - 5)^2 + \alpha^2 = 4\alpha^2 - 20\alpha + 25 + \alpha^2 = \\ &= 5\alpha^2 - 20\alpha + 25 = B\Gamma^2 \end{aligned}$$

2.95 Είναι:

$$\begin{aligned} 2(\alpha\beta - \gamma^2) &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 2\gamma) \quad \eta \\ (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Άρα $\alpha = \beta = \gamma$.

2.96 α Έστω $\frac{1999}{2000} = \alpha$. Το πρώτο μέλος γίνεται:

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \dots = 4$$

β Έστω $1,3265 = \alpha$. Τότε το πρώτο μέλος δίνει:

$$\alpha^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = \alpha^2 - (\alpha^2 - 1) = 1$$

γ Όμοια με το ερώτημα β .

2.97 α $\alpha(x - y - \omega)$. β $\alpha^2(x - 2y + 3\omega)$.

γ $\alpha x(\alpha - 4 + 3x)$. δ $\alpha\beta\gamma(\beta - \gamma - 1)$.

ϵ $2\alpha x(3x - 2xy + 4y^2)$. $\sigma\tau$ $5x^2y^3(x + 2 - 3xy)$.

2.98 α $2(\alpha - \beta)(\alpha - \beta + 2)$.

β $2(\alpha + \beta)(x - 2)$.

γ $(x - y)(\alpha + \beta)$.

δ $3(\alpha - \beta)(\alpha - \beta - 2)$.

$$\begin{aligned} \epsilon &= (\alpha - 2\beta)(x - y) + (2\alpha - \beta)(x - y) = \\ &= (x - y)(\alpha - 2\beta + 2\alpha - \beta) = \dots = \\ &= 3(x - y)(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau &x^2(x - 3) + 2x(x - 3) = (x - 3)(x^2 + 2x) = \\ &= x(x - 3)(x + 2). \end{aligned}$$

$$\zeta \quad x^2(x + 5) - 9(x + 5) = \dots = (x + 5)(x - 3)(x + 3).$$

$$\eta \quad (x - 1)(x^2 + y^2 - 2xy) = (x - 1)(x - y)^2.$$

2.99 α $(\alpha + \beta)(x - y)$. β $(\alpha - \beta)(x - y)$.

γ $(x - y)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$. δ $(xy - \omega)(\alpha\beta - 2)$.

ϵ $(x - y)(\alpha - 2)$. $\sigma\tau$ $(x - 2)(x - 5)$.

2.100 α Προσοχή, είναι $(2 - x)^2 = (x - 2)^2$. Άρα:

$$\begin{aligned} x^2(x - 2) + x(2 - x)^2 &= x^2(x - 2) + x(x - 2)^2 = \\ &= x(x - 2)[x + (x - 2)] = x(x - 2)(2x - 2) = \\ &= 2x(x - 2)(x - 1) \end{aligned}$$

β $(x - y)(\alpha + \beta - x + y)$.

γ $(x - 2)^2(\alpha - \beta x + 2\beta)$.

δ $6(\alpha - \beta)^2(\alpha - \beta - 2)$.

ϵ $(\alpha + \beta)(x - 2)(1 - \alpha - \beta)$.

$\sigma\tau$ $(\alpha - \beta)(x - y)$.

2.101 α $(x + y)(\alpha + \beta)$. β $(2x + 3)(x^2 + 2)$.

γ $(x + 1)^2(x - 1)$. δ $(x + y)(2 - \alpha)$.

ϵ $(x - y)(\alpha + 5)$. $\sigma\tau$ $(x - y)(\alpha - \beta)$.

ζ $(1 - \alpha)(1 + \alpha\beta)$. η $(\alpha - 1)(\alpha + \beta\gamma)$.

2.102 α $(x - y)(x + \omega)$. β $(\alpha - 1)(\beta + 1)$.

γ $(x - \omega)(x - y)$. δ $(x + y)(\omega - x)$.

ϵ $(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)$. $\sigma\tau$ $(y - \omega)(x - y + \omega)$.

2.103 α $(x - 1)(x - 2)$.

β $(x + y)(\alpha + \beta)$.

γ $x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$.

δ $x^2(x - 5) - 4(x - 5) = \dots = (x - 5)(x - 2)(x + 2)$.

ϵ $2(\alpha - 4x) - x(\alpha - 4x) = (\alpha - 4x)(2 - x)$.

$\sigma\tau$ $5(2\beta - \alpha) - 9\beta(2\beta - \alpha) = (2\beta - \alpha)(5 - 9\beta)$.

2.104 α $(x + y)(\alpha + \beta - \gamma)$.

β $(\alpha - 1)(3 - \alpha)$. γ $(x - 3)(y - 2\omega)$.

δ $(x + y)(\alpha - \beta - \gamma)$. ϵ $(x - y)(\alpha + \beta)$.

$\sigma\tau$ $(\beta - 1)(\alpha - 1)$.

2.105 α $(x - 4)(x + 4)$. β $(2y - 3)(2y + 3)$.

γ $(\beta - 1)(\beta + 1)(\beta^2 + 1)$. δ $(2\alpha\beta - 5)(2\alpha\beta + 5)$.

ϵ $3(x - 2)(x + 2)$. $\sigma\tau$ $-5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta)$.

2.106 α $(3x)^2 - (2y)^2 = (3x - 2y)(3x + 2y)$.

β $(5x)^2 - 3^2 = (5x - 3)(5x + 3)$.

γ $(2xy)^2 - 1^2 = (2xy - 1)(2xy + 1)$.

δ $(x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) =$
 $= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

ϵ $(x - 1)^2 - 2^2 = (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) =$
 $= (x - 3)(x + 1)$.

$\sigma\tau$ $[2(y - 2)]^2 - (3y)^2 =$
 $= (2y - 4 - 3y)(2y - 4 + 3y) =$
 $= -(y + 4)(5y - 4)$.

2.107 α $3(x - 2)(x + 2)$.

β $(\alpha\beta - 3)(\alpha\beta + 3)$.

γ $(2x - 3y)(2x + 3y)$.

δ $(x^2 - 2 - 7)(x^2 - 2 + 7) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 5)$.

ϵ $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

$\sigma\tau$ $(\alpha^2\beta^2 - 1)(\alpha^2\beta^2 + 1) = (\alpha\beta - 1)(\alpha\beta + 1)(\alpha^2\beta^2 + 1)$.

ζ $(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$.

η $(4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2) = (2x - y)(2x + y)(4x^2 + y^2)$.

2.108 α $2(x^2 - 9) = 2(x - 3)(x + 3)$.

β $3(y^4 - 1) = 3(y^2 - 1)(y^2 + 1) =$
 $= 3(y - 1)(y + 1)(y^2 + 1)$.

γ $\alpha(\beta^2 - \gamma^2) = \alpha(\beta - \gamma)(\beta + \gamma)$.

δ $2(4x^2 - 25y^2) = 2(2x - 5y)(2x + 5y)$.

ϵ $2\alpha(\alpha^2 - 1) = 2\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1)$.

$\sigma\tau$ $3(y^4 - \omega^4) = 3(y^2 - \omega^2)(y^2 + \omega^2) =$
 $= 3(y - \omega)(y + \omega)(y^2 + \omega^2)$.

2.109 α $A = x^2 - x - 3x + 3 =$
 $= x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3)$.

β $B = y^2 + 4y - 5 = y^2 + 5y - y - 5 =$
 $= y(y + 5) - (y + 5) = (y + 5)(y - 1)$.

γ $\Gamma = \alpha^2 - \alpha - 6 = \alpha^2 - 3\alpha + 2\alpha - 6 =$
 $= \alpha(\alpha - 3) + 2(\alpha - 3) = (\alpha - 3)(\alpha + 2)$.

δ $\Delta = \beta^2 + 2\beta - 8 = \beta^2 + 4\beta - 2\beta - 8 =$
 $= \beta(\beta + 4) - 2(\beta + 4) = (\beta + 4)(\beta - 2)$.

Μπορείτε φυσικά να χρησιμοποιήσετε και τον τύπο:

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

2.110 α $x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

β $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

γ $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

δ $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

ϵ $8x^3 + y^3 = (2x)^3 + y^3 = (2x + y)[(2x)^2 - 2xy + y^2] =$
 $= (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$.

$\sigma\tau$ $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 =$
 $= (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$.

ζ $64a^3 + 27\beta^3 = (4a)^3 + (3\beta)^3 =$
 $= (4a + 3\beta)(16a^2 - 12a\beta + 9\beta^2)$.

η $8a^3 - 27 = (2a)^3 - 3^3 = (2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)$.

2.111 α $(x - 2 - 4)(x - 2 + 4) = (x - 6)(x + 2)$.

β $[2(y + 2) - 3][2(y + 2) + 3] = (2y + 1)(2y + 7)$.

γ $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$.

δ $(\alpha + 2\beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2)$.

ϵ $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$.

$\sigma\tau$ $(2\alpha + \beta^2)(4\alpha^2 - 2\alpha\beta^2 + \beta^4)$.

2.112 Είναι τέλεια τετράγωνα.

α $A = (x - 1)^2$. β $B = (x + 3)^2$.

γ $\Gamma = (2y - 1)^2$. δ $\Delta = (y - 4)^2$.

ϵ $E = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$.

$\sigma\tau$ $Z = (\alpha^2 + \beta^2)^2$.

2.113 α $A = (2x + 3y)^2$. β $B = (3\alpha^2 - 2\beta^3)^2$.

2.114 α $[(x + 1) + 1]^2 = (x + 2)^2$.

β $[(y + 2) + 2]^2 = (y + 4)^2$.

γ $[(\alpha - 3) - 3]^2 = (\alpha - 6)^2$.

δ $2[(\alpha + 5)^2 + 10(\alpha + 5) + 25] = 2[(\alpha + 5) + 5]^2 =$
 $= 2(\alpha + 10)^2$.

2.115 α $(\alpha - 1)^3$.

β $(y^2 + 1)^3$.

$$\gamma) [(x+1)+1]^3 = (x+2)^3.$$

$$\delta) [(a+2)-1]^3 = (a+1)^3.$$

2.116 Με ομάδες.

$$\alpha) A = ax - 2a - 3x + 6 = a(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(a-3).$$

$$\beta) B = x^2(x-2) - 9(x-2) = (x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3).$$

$$\gamma) \Gamma = (x^2 - 2x + 1) - y^2 = (x-1)^2 - y^2 = (x-1-y)(x-1+y) = (x-y-1)(x+y-1).$$

$$\delta) \Delta = (a^2 - 2a\beta + \beta^2) - 4\gamma^2 = \dots = (a-\beta-2\gamma)(a-\beta+2\gamma).$$

$$\epsilon) E = (a^2 + \beta^2)^2 - (\gamma^2)^2 = (a^2 + \beta^2 - \gamma^2)(a^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

$$\sigma\tau) Z = (a-\beta-\gamma+\delta)(a-\beta+\gamma-\delta).$$

$$\mathbf{2.117} \alpha) (a^2 - 2a\beta + \beta^2) - (x^2 + 4x + 4) = (a-\beta)^2 - (x+2)^2 = (a-\beta-x-2)(a-\beta+x+2).$$

$$\beta) (a-\beta)^2 - (x-2)^2 = (a-\beta-x+2)(a-\beta+x-2).$$

$$\gamma) a^2(4-4a+a^2) = a^2(2-a)^2.$$

$$\delta) (a+1)(a^2-a+1) + 2(a-1)(a+1) + (a+1)^2 = (a+1)(a^2-a+1+2a-2+a+1) = (a+1)(a^2+2a) = a(a+1)(a+2).$$

$$\epsilon) (a-1)(a^2+a+1) - 2(a-1)(a+1) - (a-1)^2 = (a-1)(a^2+a+1-2a-2-a+1) = (a-1)(a^2-2a) = a(a-1)(a-2).$$

$$\sigma\tau) x(x^2-2x+1) - y(x-1) = x(x-1)^2 - y(x-1) = (x-1)(x^2-x-y).$$

$$\mathbf{2.118} \alpha) (a-\beta)^2 - (a-\beta) = (a-\beta)(a-\beta-1).$$

$$\beta) (x+y)^2 - 2(x+y) = (x+y)(x+y-2).$$

$$\gamma) (x+a)^2 - y^2 = (x+a-y)(x+a+y).$$

$$\delta) (x-y)^2 - \omega^2 = (x-y-\omega)(x-y+\omega).$$

$$\epsilon) x^2 - (y^2 + 6y + 9) = x^2 - (y+3)^2 = (x-y-3)(x+y+3).$$

$$\sigma\tau) 3^2 - (a-\beta)^2 = (3-a+\beta)(3+a-\beta).$$

$$\mathbf{2.119} \alpha) a^2 - (\beta-\gamma)^2 = (a-\beta+\gamma)(a+\beta-\gamma).$$

$$\beta) (x+2)^2 - y^2 = (x+2-y)(x+2+y).$$

$$\gamma) (x-y)(x+y) - 6(x-y) = (x-y)(x+y-6).$$

$$\delta) (x-y)(x+y) - (x+y) = (x+y)(x-y-1).$$

$$\epsilon) a^4(a+1) - (a+1) = \dots = (a+1)^2(a-1)(a^2+1).$$

$$\sigma\tau) (a-\beta)(a+\beta) - (a-\beta) = (a-\beta)(a+\beta-1).$$

$$\zeta) (x+1)(x+3) + a(x+3) = (x+3)(x+1+a).$$

$$\eta) (a^4 + \beta^4 - 2a^2\beta^2) - 9a^2\beta^2 = (a^2 - \beta^2)^2 - (3a\beta)^2 = (a^2 - \beta^2 - 3a\beta)(a^2 - \beta^2 + 3a\beta).$$

$$\theta) (x^4 - 6x^2 + 9) - 9x^2 = (x^2 - 3)^2 - (3x)^2 = (x^2 - 3 - 3x)(x^2 - 3 + 3x).$$

$$\mathbf{2.120} \alpha) x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4 = y^2(x^2-4) - (x^2-4) = (x^2-4)(y^2-1) = (x-2)(x+2)(y-1)(y+1).$$

$$\beta) x^4 - 1 + x^3 - x = (x^2)^2 - 1 + (x^3 - x) = (x^2-1)(x^2+1) + x(x^2-1) = (x^2-1)(x^2+1+x) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1).$$

$$\gamma) x^3(x^2-1) + 1 - x^2 = x^3(x^2-1) - (x^2-1) = (x^2-1)(x^3-1) = (x^2-1)^2(x^3-1) = (x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1) = (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1).$$

$$\delta) (x^2+9)^2 - 36x^2 = (x^2+9)^2 - (6x)^2 = (x^2+9-6x)(x^2+9+6x) = (x^2+3^2-2x\cdot 3)(x^2+3^2+2x\cdot 3) = (x-3)^2(x+3)^2.$$

$$\epsilon) \frac{a^2 - 2a\beta + \beta^2}{(a-\beta)^2} - a + \beta = (a-\beta)^2 - (a-\beta) = (a-\beta)(a-\beta-1).$$

$$\sigma\tau) \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x-y)^2} - \omega^2 = (x-y)^2 - \omega^2 = (x-y-\omega)(x-y+\omega).$$

$$\zeta) 1 - a^2 + 2a\beta - \beta^2 = 1 - (a^2 - 2a\beta + \beta^2) = 1 - (a-\beta)^2 = (1-a+\beta)(1+a-\beta).$$

$$\eta) y^2 - x^2 - 10y + 25 = (y^2 - 10y + 25) - x^2 = (y-5)^2 - x^2 = (y-5-x)(y-5+x).$$

$$\theta) 2(x-1)(x^2-4) - 5(x-1)(x-2)^2 = 2(x-1)(x-2)(x+2) - 5(x-1)(x-2)^2 = (x-1)(x-2)[2(x+2) - 5(x-2)] = (x-1)(x-2)(2x+4-5x+10) = (x-1)(x-2)(-3x+14).$$

$$\iota) (y^2-4)^2 - (y+2)^2 = [(y-2)(y+2)]^2 - (y+2)^2 = (y-2)^2(y+2)^2 - (y+2)^2 = (y+2)^2[(y-2)^2-1] = (y+2)^2(y-2-1)(y-2+1) = (y+2)^2(y-3)(y-1).$$

$$\kappa) (a^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4a^2\beta^2 = (a^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - (2a\beta)^2 = (a^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2a\beta)(a^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2a\beta) = [(a^2 - 2a\beta + \beta^2) - \gamma^2][(a^2 + 2a\beta + \beta^2) - \gamma^2] = [(a-\beta)^2 - \gamma^2][(a+\beta)^2 - \gamma^2] = (a-\beta-\gamma)(a-\beta+\gamma)(a+\beta-\gamma)(a+\beta+\gamma).$$

$$\iota\beta) (x^2+9)(a^2+4) - (ax+6)^2 = x^2a^2 + 4x^2 + 9a^2 + 36 - (a^2x^2 + 12ax + 36) = a^2x^2 + 4x^2 + 9a^2 + 36 - a^2x^2 - 12ax - 36 = 4x^2 + 9a^2 - 12ax = (2x)^2 + (3a)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3a = (2x-3a)^2.$$

$$\mathbf{2.121} \alpha) A = a^2\gamma^4 + a^2 - a^4\gamma^2 - \gamma^2 = a^2\gamma^2(\gamma^2 - a^2) + (a^2 - \gamma^2) = a^2\gamma^2(\gamma^2 - a^2) - (\gamma^2 - a^2) = (\gamma^2 - a^2)(a^2\gamma^2 - 1) = (\gamma-a)(\gamma+a)(a\gamma-1)(a\gamma+1).$$

$$\beta) B = a^4\gamma^2 + \beta^4\gamma^2 - a^2\beta^2 - a^2\beta^2\gamma^4 = a^2\gamma^2(a^2 - \beta^2\gamma^2) + \beta^2(\beta^2\gamma^2 - a^2) = (a^2 - \beta^2\gamma^2)(a^2\gamma^2 - \beta^2) = (a-\beta\gamma)(a+\beta\gamma)(a\gamma-\beta)(a\gamma+\beta).$$

$$\gamma) \Gamma = a^2\beta^2x^2 + a^2\beta^2y^2 + xy\alpha^4 + xy\beta^4 = (a^2\beta^2x^2 + xy\alpha^4) + (a^2\beta^2y^2 + xy\beta^4) = a^2x(\beta^2x + y\alpha^2) + \beta^2y(a^2y + x\beta^2) = (\beta^2x + y\alpha^2)(a^2x + \beta^2y) = (a^2x + \beta^2y)(a^2y + \beta^2x).$$

$$\delta) \Delta = a^2\beta^2x^2 + a^2\beta^2y^2 - xy\alpha^4 - xy\beta^4 = (a^2\beta^2x^2 - xy\alpha^4) + (a^2\beta^2y^2 - xy\beta^4) = a^2x(\beta^2x - y\alpha^2) + \beta^2y(a^2y - x\beta^2) = a^2x(\beta^2x - y\alpha^2) - \beta^2y(\beta^2x - y\alpha^2) = (\beta^2x - y\alpha^2)(a^2x - \beta^2y).$$

2.122 α) Επειδή:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2)^2 + 2x^2 \cdot 1 + 1^2 = (x^2 + 1)^2$$

σκεπτόμαστε να γράψουμε $x^2 = 2x^2 - x^2$. Έτσι:

$$A = x^4 + x^2 + 1 = x^4 + (2x^2 - x^2) + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

β) Το ερώτημα αυτό είναι ιδιαίτερα δύσκολο, διότι απαιτεί τέχνασμα. Είναι λοιπόν:

$$B = x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1) = (x^2+x+1)[x^2(x-1)+1] = (x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

γ) Το ερώτημα αυτό, όπως και το επόμενο, δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να απογοητεύσει τον μαθητή, επειδή λύνεται με τέχνασμα. Είναι ωστόσο σίγουρο ότι, μετά τη μελέτη του, ο μαθητής θα μπορεί να λύσει και μόνος του ανάλογες ασκήσεις.

Είναι $\Gamma = x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2$. Για το άθροισμα τετραγώνων δεν υπάρχει μέθοδος (τύπος). Παρατηρούμε όμως ότι αν είχαμε και τον όρο $2x^2 \cdot 2 = 4x^2$, τότε το A θα ήταν τέλει τετράγωνο. Επομένως προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $4x^2$ και παίρνουμε:

$$\Gamma = x^4 + 4 = \frac{(x^2)^2 + 2^2 + 4x^2}{(x^2+2)^2} - 4x^2 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$$

δ) Είναι $x^4 = (x^2)^2$, $y^4 = (y^2)^2$ και έτσι:

$$\Delta = x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2)^2 + x^2y^2 + (y^2)^2$$

Αν αντί για x^2y^2 είχαμε $2x^2y^2$, τότε η παράσταση Δ θα ήταν τέλει τετράγωνο και συγκεκριμένα η:

$$(x^2 + y^2)^2$$

Αν λοιπόν γράψουμε $x^2y^2 = 2x^2y^2 - x^2y^2$ (δηλαδή αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε το x^2y^2), τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2)^2 + 2x^2y^2 - x^2y^2 + (y^2)^2 = \\ &= \frac{(x^2)^2 + 2x^2y^2 + (y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} - x^2y^2 = \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) = \\ &= (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

ε) $E = (x^2 + x + 2)^2 - x^3 =$
 $= (x^2 + x + 2)^2 - 1^2 + 1^2 - x^3 =$
 $= (x^2 + x + 2 - 1)(x^2 + x + 2 + 1) + (1 - x^3) =$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3) + (1 - x)(1 + x + x^2) =$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3 + 1 - x) =$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 + 4).$

στ) $Z = (1 + x - x^2 + x^3)^2 - 1^2 + 1^2 + x^3 =$
 $= (1 + x - x^2 + x^3 - 1)(1 + x - x^2 + x^3 + 1) +$
 $+ (1 + x^3) = (x - x^2 + x^3)(2 + x - x^2 + x^3) +$
 $+ (1 + x)(1 - x + x^2) =$
 $= x(1 - x + x^2)(2 + x - x^2 + x^3) +$
 $+ (1 + x)(1 - x + x^2) =$
 $= (1 - x + x^2)[x(2 + x - x^2 + x^3) + (1 + x)] =$
 $= (1 - x + x^2)(2x + x^2 - x^3 + x^4 + 1 + x) =$
 $= (1 - x + x^2)(1 + 3x + x^2 - x^3 + x^4).$

2.123 α) Επειδή $\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta + \gamma^2\delta^2 = (\alpha\beta + \gamma\delta)^2$, είναι:

$$\begin{aligned} A &= 4(\alpha\beta + \gamma\delta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)^2 = \\ &= [2(\alpha\beta + \gamma\delta)]^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)^2 = \\ &= [2(\alpha\beta + \gamma\delta) - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)] \cdot \\ &\cdot [2(\alpha\beta + \gamma\delta) + (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)] = \\ &= (2\alpha\beta + 2\gamma\delta - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) \cdot \\ &\cdot (2\alpha\beta + 2\gamma\delta + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2) = \\ &= [(2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2) + (2\gamma\delta + \gamma^2 + \delta^2)] \cdot \\ &\cdot [(2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2) + (2\gamma\delta - \gamma^2 - \delta^2)] = \\ &= [-(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) + (\gamma + \delta)^2] \cdot \\ &\cdot [(\alpha + \beta)^2 - (\gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta)] = \\ &= [(\gamma + \delta)^2 - (\alpha - \beta)^2][(\alpha + \beta)^2 - (\gamma - \delta)^2] = \\ &= (\gamma + \delta - \alpha + \beta)(\gamma + \delta + \alpha - \beta) \cdot \\ &\cdot (\alpha + \beta - \gamma + \delta)(\alpha + \beta + \gamma - \delta) \end{aligned}$$

β) Θα σχηματίσουμε δύο ομάδες των τεσσάρων όρων. Έτσι:

$$\begin{aligned} B &= \alpha\beta\gamma - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma - 1 = \\ &= (\alpha\beta\gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha) - (\beta\gamma + \beta + \gamma - 1) = \\ &= \alpha(\beta\gamma - \beta - \gamma + 1) - (\beta\gamma - \beta - \gamma + 1) = \\ &= (\beta\gamma - \beta - \gamma + 1)(\alpha - 1) = \\ &= [\beta(\gamma - 1) - (\gamma - 1)](\alpha - 1) = \\ &= (\gamma - 1)(\beta - 1)(\alpha - 1) = \\ &= (\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) \end{aligned}$$

Άλλος τρόπος

Επειδή $\alpha\beta\gamma - \alpha\beta = \alpha\beta(\gamma - 1)$, ομαδοποιούμε με οδηγό τη δημιουργία κοινού παράγοντα του $\gamma - 1$. Έτσι:

$$\begin{aligned} A &= (\alpha\beta\gamma - \alpha\beta) + (-\beta\gamma + \beta) + (-\gamma\alpha + \alpha) + \gamma - 1 = \\ &= \alpha\beta(\gamma - 1) - \beta(\gamma - 1) - \alpha(\gamma - 1) + (\gamma - 1) = \\ &= (\gamma - 1)(\alpha\beta - \beta - \alpha + 1) = \\ &= (\gamma - 1)[\beta(\alpha - 1) - (\alpha - 1)] = \\ &= (\gamma - 1)(\alpha - 1)(\beta - 1) \end{aligned}$$

2.124 Είναι:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \quad (1)$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \quad (2)$$

α) $A \stackrel{(2)}{=} (\alpha^2 + \alpha\beta) + (\alpha^2 - \beta^2) - \alpha\gamma - \beta\gamma =$
 $= \alpha(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - \gamma(\alpha + \beta) = \dots =$
 $= (\alpha + \beta)(2\alpha - \beta - \gamma).$

β) $B = \alpha^3 + \beta\beta^2 + \gamma^3 = (\alpha^3 + \gamma^3) + \beta\beta^2 \stackrel{(1)}{=}$
 $= (\alpha + \gamma)(\alpha^2 - \alpha\gamma + \gamma^2) + \beta(\alpha^2 - \gamma^2) =$
 $= (\alpha + \gamma)(\alpha^2 - \alpha\gamma + \gamma^2) + \beta(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) =$
 $= (\alpha + \gamma)(\alpha^2 - \alpha\gamma + \gamma^2 + \alpha\beta - \beta\gamma) =$
 $= (\alpha + \gamma)A \stackrel{(a)}{=} (\alpha + \gamma)(\alpha + \beta)(2\alpha - \beta - \gamma).$

2.125 α) $A = (\alpha^2\beta - \alpha\beta^2) + (\beta^2\gamma - \gamma\alpha^2) + (\gamma^2\alpha - \beta\gamma^2) =$
 $= \alpha\beta(\alpha - \beta) + \gamma(\beta^2 - \alpha^2) + \gamma^2(\alpha - \beta) = \dots =$
 $= (\alpha - \beta)[\alpha\beta - \gamma(\beta + \alpha) + \gamma^2] =$
 $= (\alpha - \beta)(\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma + \gamma^2) =$
 $= (\alpha - \beta)[\beta(\alpha - \gamma) - \gamma(\alpha - \gamma)] =$
 $= (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) =$
 $= -(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha).$

β) $B = \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma +$
 $+ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma =$
 $= (\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma) + (\alpha^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha\beta\gamma) +$
 $+ (\beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma) =$
 $= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma + \alpha) =$
 $= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha).$

γ) $\Gamma = \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma =$
 $= (\alpha^2\beta + \beta^2\alpha) + (\alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma) + (\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma) +$
 $+ (\gamma^2\alpha + \gamma^2\beta) =$
 $= \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta) =$
 $= (\alpha + \beta)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2) =$
 $= (\alpha + \beta)[\alpha(\beta + \gamma) + \gamma(\beta + \gamma)] =$
 $= (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma).$

δ) Κάνουμε πρώτα τις πράξεις και ομαδοποιούμε.

Απ: $A = (\alpha + \beta + \gamma)(x + y + \omega)$

2.126 α) $A(x) = x^2(x - 1) - 4(x - 1) =$
 $= (x - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x - 2)(x + 2).$

β) $A(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2).$

2.127 α) Πρέπει $\alpha \neq 0$. **Απ:** $x \neq 2$ και $x \neq 3$

β) Είναι $x^2 - 2x = x(x - 2)$ και $3x - x^2 = x(3 - x)$.
Απ: $B = -x^2$

γ) Είναι $B = 0 \Leftrightarrow -x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. **Απ:** $x = 0$

2.128 α) Πρέπει $x^2 + 3x \neq 0 \Leftrightarrow x(x + 3) \neq 0$.
Απ: $x \neq 0$ και $x \neq -3$

β) Πρέπει:
 $(x^2 - 2x)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -3)$

Αλλά $x \neq 0$ και $x \neq -3$. **Απ:** $x = 2$

γ) Είναι $A = x - 2$.

2.129 α) ♦ Για $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$, $x \neq -2$ και $x \neq 2$, η Α.

♦ Για $x \neq 1$, $x \neq -1$ και $x \neq 4$, η Β.

β) Όλοι οι όροι γίνονται γινόμενο, εκτός του $x^2 + 1$. Ο αριθμητής του Β γίνεται:

$$(x - 1)(3 - x + 5 - x) = (x - 1)(8 - 2x)$$

2.130 α) $A = \frac{2}{3}$. **β)** $B = \frac{\alpha}{\alpha - 2}$.

γ) $\Gamma = \alpha + 3$. **δ)** $\Delta = \alpha - \beta$.

2.131 α) $A = \alpha$. **β)** $B = \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha - \beta}$.

γ) $\Gamma = 1$. **δ)** $\Delta = x - 1$.

2.132 α) $x - 3$. **β)** $2x - \alpha$.

γ) $\frac{x^2 + 1}{x(x + 2)}$. **δ)** $\frac{2(x - 4)}{x + 1}$.

2.133 α) $A = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} \cdot \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} =$
 $= \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)^2} \cdot \frac{x(x - 3)}{x(x + 3)} =$
 $= \frac{x + 3}{x - 3} \cdot \frac{x - 3}{x + 3} = 1.$

β) $B = \frac{x^2 + x}{x^2 - x} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{2x + 2}{x - 1} =$
 $= \frac{x(x + 1)}{x(x - 1)} \cdot \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)^2} \cdot \frac{2(x + 1)}{x - 1} = 2.$

γ) $\Gamma = \frac{x^2(x - 1) - 5(x - 1)}{x^2(x + 1) - 5(x + 1)} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} =$
 $= \frac{(x - 1)(x^2 - 5)}{(x + 1)(x^2 - 5)} \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} =$
 $= \frac{x - 1}{x + 1} \cdot \frac{x + 1}{x - 1} = 1.$

δ) $\Delta = \frac{x^2(x + 1) - (x + 1)}{(x + 1)^2} \cdot \frac{x(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} =$
 $= \frac{(x + 1)(x^2 - 1)}{(x + 1)^2} \cdot \frac{x}{x - 1} =$
 $= \frac{(x + 1)(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)^2} \cdot \frac{x}{x - 1} =$
 $= \frac{(x + 1)^2(x - 1)}{(x + 1)^2} \cdot \frac{x}{x - 1} = x.$

2.134 α) $A = \frac{(x - 1)(x^2 - x + 1)}{(x + 1)(x^2 + x + 1)}$.

β) $B = \frac{x - 2}{x + 3}$.

$$\gamma) \Gamma = \frac{(x+1)^2}{x-1}.$$

$$\delta) \Delta = x + y.$$

$$2.135 \text{ α)} A = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

$$\beta) B = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

$$\gamma) \Gamma = \frac{xy(x+y)}{x^2 + xy + y^2}.$$

$$\delta) \Delta = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\epsilon) E = -\frac{1}{(\alpha + \beta)(4x^2 + 6x + 9)}.$$

2.136 Έχουμε:

$$\alpha) A = \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)} \cdot \frac{x^2}{(x-2)(x+1)} = x.$$

$$\text{Απ: } A = x$$

$$\beta) B = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{y^2-y+1} \cdot \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{x-1} \cdot \frac{y-1}{x^2+x+1}.$$

$$\text{Απ: } B = y^2 - 1$$

2.137 α) Πρέπει $x \neq -1$ και $x \neq 1$. Είναι:

$$A = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\text{Απ: } A = 1$$

β) Πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Είναι:

$$B = \frac{x(x-1)^2}{x(x-1)}$$

$$\text{Απ: } B = x - 1$$

γ) Πρέπει $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Είναι:

$$\Gamma = \frac{x(x-1) + 2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{Απ: } \Gamma = \frac{x+2}{x+1}$$

δ) Πρέπει $x \neq 0$, $x \neq 1$ και $x \neq -2$. Είναι:

$$\Delta = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)} \cdot \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{Απ: } \Delta = \frac{x-2}{x-1}$$

ε) Πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -1$. Είναι:

$$E = \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^3} \cdot \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{x^2}$$

$$\text{Απ: } E = (x-1)^2$$

στ) Πρέπει $x \neq 1$ και $x \neq 2$. Είναι:

$$Z = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\text{Απ: } Z = \frac{x-1}{x-2}$$

2.138 Επειδή:

$$1 - \frac{1}{v^2} = \frac{v^2 - 1}{v^2} = \frac{(v-1)(v+1)}{v^2}$$

το α' μέλος γίνεται:

$$A = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{97^2-1}{97^2} \cdot \frac{98^2-1}{98^2} \cdot \frac{99^2-1}{99^2} =$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdot \dots \cdot$$

$$\frac{(97-1)(97+1)}{97^2} \cdot \frac{(98-1)(98+1)}{98^2} \cdot \frac{(99-1)(99+1)}{99^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{96 \cdot 98}{97^2} \cdot \frac{97 \cdot 99}{98^2} \cdot \frac{98 \cdot 100}{99^2}$$

Αν είχαμε μόνο τους τρεις πρώτους όρους, η τιμή της παράστασης θα ήταν:

$$\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}$$

Βλέπουμε ότι όλοι οι παράγοντες απλοποιούνται και μένει το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{5}{4}$. Στην παράστασή μας, που έχει 98 όρους, μετά την απλοποίηση, θα μείνει το $\frac{1}{2}$ από τον α' όρο και το $\frac{100}{99}$ από τον τελευταίο. Όλοι οι άλλοι παράγοντες απλοποιούνται. Έτσι:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{99} = \frac{50}{99}$$

2.139 Επειδή:

$$a^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

είναι:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot$$

$$\left(1 - \frac{1}{1998}\right) \left(1 + \frac{1}{1998}\right) \left(1 - \frac{1}{1999}\right) \left(1 + \frac{1}{1999}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1997}{1998} \cdot \frac{1999}{1998}\right) \left(\frac{1998}{1999} \cdot \frac{2000}{1999}\right)$$

Από τη δεύτερη παρένθεση και μετά, ο πρώτος παράγοντας με τον τελευταίο της προηγούμενης έχουν γινόμενο 1. Άρα:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2000}{1999} = \frac{1000}{1999}$$

$$2.140 \text{ α)} \frac{2\alpha(\alpha-3)}{\alpha+3}.$$

$$\beta) \frac{(\alpha+2)(\alpha-6)}{(\alpha-2)(\alpha+1)}.$$

$$\gamma) \frac{5\alpha+1}{\alpha+2}.$$

$$\delta) 1.$$

$$\epsilon) \frac{x^2+1}{x-1}.$$

$$\sigma\tau) x + 1.$$

$$\zeta) \frac{1}{x+y}.$$

$$\eta) -\frac{1}{x+1}.$$

2.141 Δες τις εφαρμογές 2.16 και 2.21.

Ενδεικτικά:

$$\beta) \text{ α' μέλος} = \frac{(\beta+2)(x-y)}{(\beta+2)^2} \cdot \frac{(\beta+2)(x+y)}{(x-y)(x+y)} = 1.$$

2.142 α) Ομαδοποιούμε.

$$\text{Απ: } A = 1$$

β) Κάνουμε ομόνομα.

$$\text{Απ: } B = 1$$

γ) Είναι:

$$\Gamma = \left(\frac{1}{(\mu+\nu)^2} \cdot \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2\nu^2} + \frac{2}{(\mu+\nu)^3} \cdot \frac{\mu+\nu}{\mu\nu} \right) \mu^2\nu^2 =$$

$$= \frac{\mu^2+\nu^2}{(\mu+\nu)^2} + \frac{2\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} = \frac{(\mu+\nu)^2}{(\mu+\nu)^2} = 1$$

$$\text{Απ: } \Gamma = 1$$

δ) Είναι:

$$\blacklozenge ax - 2a^2 = a(x - 2a)$$

$$\blacklozenge x^2 + x - 2ax - 2a = x(x - 2a) + (x - 2a) = (x - 2a)(x + 1)$$

Έτσι:

$$\Delta = \frac{x}{\alpha(x-2\alpha)} - \frac{2}{(x-2\alpha)(x+1)}(1+x) =$$

$$= \frac{x-2\alpha}{\alpha(x-2\alpha)} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Απ: } \Delta = \frac{1}{\alpha}$$

ε) Κάνουμε ομόνομα.

$$\text{Απ: } E = 2$$

2.143 α) Εκτελούμε τις πράξεις στις παρενθέσεις.

$$\text{Απ: } A = -1$$

β) Εκτελούμε τις πράξεις στις παρενθέσεις.

$$\text{Απ: } B = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta}$$

γ) Εκτελούμε τις πράξεις.

$$\text{Απ: } \Gamma = \frac{\alpha}{2}$$

δ) Είναι:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\text{Απ: } \Delta = 1$$

2.144 α) Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

β) Είναι:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

και

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

γ) Εκτελούμε τις πράξεις. Βλέπε και την υπόδειξη στο ερώτημα β).

δ) Ο πρώτος παρονομαστής δίνει:

$$\frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{2(x^2 + 1)}{(x+1)^2}$$

Ο δεύτερος παρονομαστής γίνεται:

$$\frac{(x^3 + x - x^2 - 1) + (x^3 - x + x^2 - 1)}{(x+1)(x^2 + 1)} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x+1)(x^2 + 1)}$$

Ο δεύτερος αριθμητής γίνεται:

$$\frac{(3x^2 + 6x + 3) + (x^2 - 2x + 1)}{(x+1)^2} = \frac{4(x^2 + x + 1)}{(x+1)^2}$$

Αντικαθιστούμε κ.λπ.

2.145 α) Με κατάλληλες πράξεις.

β) Καλύτερα από το β' μέλος στο α' μέλος.

γ) Με βάση το ερώτημα β). Να πάρετε σαν Ε.Κ.Π. το:

$$(x-y)(y-\omega)(\omega-x)$$

και να προσαρμόσετε τα κατάλληλα πρόσρημα στα κλάσματα.

2.146 α) Είναι $\alpha = \frac{2\beta}{3}$ κ.λπ.

β) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, τότε $\alpha = \beta\lambda$ και $\gamma = \delta\lambda$.

Έτσι:

$$\blacklozenge \frac{2\alpha + 3\gamma}{2\beta + 3\delta} = \frac{2\beta\lambda + 3\delta\lambda}{2\beta + 3\delta} = \dots = \lambda$$

$$\blacklozenge \frac{5\alpha - 4\gamma}{5\beta - 4\delta} = \frac{5\beta\lambda - 4\delta\lambda}{5\beta - 4\delta} = \dots = \lambda$$

2.147 Είναι $a = \lambda\beta$, $\beta = \lambda\gamma$ και $\gamma = \lambda\delta$. Έτσι:

$$a\beta\gamma = (\lambda\beta)(\lambda\gamma)(\lambda\delta) \Leftrightarrow a = \lambda^3\delta \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{a}{\delta} = \lambda^3 = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$$

(Προφανώς $a, \beta, \gamma \neq 0$ για να ορίζονται τα κλάσματα.)

2.148 Η αναλογία δίνει:

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{a + \beta + \gamma + \delta}{\beta + \gamma + \delta + \alpha} = 1$$

Άρα $a = \beta = \gamma = \delta$ κ.λπ.

2.149 Έχουμε:

$$a\beta = \gamma\delta \Leftrightarrow \frac{a}{\delta} = \frac{\gamma}{\beta} = \lambda \Leftrightarrow \Leftrightarrow (a = \delta\lambda \text{ και } \gamma = \beta\lambda)$$

Έτσι:

$$A = \frac{\lambda^2\delta^2}{\lambda^2\delta^2 + \lambda^2\beta^2} + \frac{\beta^2}{\beta^2 + \delta^2} = \frac{\delta^2}{\delta^2 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{\beta^2 + \delta^2} = 1$$

Απ: $A = 1$

2.150 Είναι:

$$\frac{a}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\gamma}{6} = \frac{a + \beta + \gamma}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

Απ: 8, 10, 12

2.151 Είναι:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{\omega}{5} = \frac{x + y + \omega}{12} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$

Απ: $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$

2.152 Θέτουμε ρ τους ίσους λόγους. Τότε:

$$\lambda = \rho(\alpha - \beta), \mu = \rho(\beta - \gamma) \text{ και } \nu = \rho(\alpha - \gamma)$$

Άρα:

$$\lambda + \mu = \rho(\alpha - \gamma) = \nu$$

2.153 Θέτουμε $\frac{a}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{\omega} = \lambda$. Συνεπώς:

$$a = \lambda x, \beta = \lambda y, \gamma = \lambda \omega \text{ κ.λπ.}$$

2.154 α) Έστω $a = 2\rho$ και $\beta = 2\kappa$. Τότε:

$$a + \beta = 2(\rho + \kappa) = 2\nu, \nu \in \mathbb{Z}$$

β) Έστω $a = 2\rho + 1$ και $\beta = 2\kappa + 1$. Τότε:

$$a + \beta = 2(\rho + \kappa + 1) = 2\nu, \nu \in \mathbb{Z}$$

γ) Έστω $a = 2\rho$ και $\beta = 2\kappa + 1$. Τότε:

$$a + \beta = 2(\rho + \kappa) + 1 = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{Z}$$

2.155 α) Έστω $a = 2\rho$ και $\beta = 2\kappa$. Τότε:

$$a\beta = 2(2\rho\kappa) = 2\nu, \nu \in \mathbb{Z}$$

β) Έστω $a = 2\rho + 1$ και $\beta = 2\kappa + 1$. Τότε:

$$a\beta = 2(2\rho\kappa) + 2(\rho + \kappa) + 1 = 2(2\rho\kappa + \rho + \kappa) + 1 = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{Z}$$

γ) Έστω $a = 2\rho$ και $\beta = 2\kappa + 1$. Τότε:

$$a\beta = 2[\rho(2\kappa + 1)] = 2\nu, \nu \in \mathbb{Z}$$

2.156 α) Είναι $a = 2\lambda$, οπότε:

$$a^2 = 4\lambda^2 = 2(2\lambda^2) = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$$

δηλαδή άρτιος.

β) Με απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι ο a είναι άρτιος. Τότε και ο a^2 είναι άρτιος, άτοπο.

2.157 α) Είναι:

$$\nu = 2\lambda \text{ ή } \nu = 2\lambda + 1 \text{ με } \lambda \in \mathbb{Z} \text{ κ.λπ.}$$

β) Είναι $a = 2\lambda + 1$, οπότε:

$$a^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 4\lambda(\lambda + 1) + 1 \stackrel{(\omega)}{=} 4 \cdot 2\nu + 1 = 8\nu + 1$$

διότι ο $\lambda(\lambda + 1)$ έχει τη μορφή 2ν , $\nu \in \mathbb{Z}$.

γ) Είναι:

$$a^2 - \beta^2 \stackrel{(\beta)}{=} (8\mu + 1) - (8\nu + 1) = 8(\mu - \nu) = 8\rho = \text{πολ}8 \text{ (αφού } \rho \in \mathbb{Z})$$

2.158 Οι αριθμοί είναι οι:

$$a, \beta = a + 1, \gamma = a + 2, \delta = a + 3$$

α) Είναι:

$$\beta\delta - a\gamma = (a + 1)(a + 3) - a(a + 2) = \dots = 2a + 3 = (2a + 2) + 1 = 2(a + 1) + 1 = 2\mu + 1, \mu \in \mathbb{Z}$$

β) Είναι:

$$\diamond a + \beta + \gamma + \delta = \dots = 4a + 4 + 2 = 4(a + 1) + 2 \neq \text{πολ}4$$

$$\diamond a + \beta + \gamma + \delta = \dots = 2(2a + 3) = \text{πολ}2 \text{ (άρτιος)}$$

γ) Είναι $\beta\gamma - a\delta = 2$.

2.159 Με απαγωγή σε άτοπο: Αν κάποιος αριθμός είναι το μηδέν, τότε το γινόμενο όλων των αριθμών θα είναι ίσο με μηδέν, άτοπο.

2.160 α) Έστω $a = 2\lambda$ ο άρτιος και $\beta = 2\nu + 1$ ο περιττός αριθμός. Τότε:

$$a\beta = 2\lambda(2\nu + 1) = 2[\lambda(2\nu + 1)] = 2\rho$$

όπου $\rho = \lambda(2\nu + 1) \in \mathbb{Z}$.

Άρα ο $a\beta$ είναι άρτιος.

β) Αν ένας τουλάχιστον από τους a, β ήταν άρτιος, τότε ο $a\beta$ θα ήταν άρτιος, άτοπο.

2.161 Με απαγωγή σε άτοπο: Αν όλοι οι αριθμοί είναι άρτιοι, τότε το άθροισμά τους και το γινόμενό τους είναι άρτιος αριθμός, άτοπο.

2.162 α) Έστω ότι ο $\sqrt{3}$ είναι ρητός. Τότε:

$$\sqrt{3} = \frac{\kappa}{\lambda}$$

όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί και $\frac{\kappa}{\lambda}$ ανάγωγο κλάσμα.

Είναι:

$$(\sqrt{3})^2 = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2 \Leftrightarrow 3 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2} \Leftrightarrow \kappa^2 = 3\lambda^2$$

Άρα ο 3 διαιρεί τον κ^2 , οπότε ο 3 (επειδή είναι πρώτος) θα διαιρεί και τον κ . Άρα $\kappa = 3\mu$, οπότε:

$$\kappa^2 = 3\lambda^2 \Leftrightarrow (3\mu)^2 = 3\lambda^2 \Leftrightarrow 9\mu^2 = 3\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 3\mu^2$$

Άρα ο 3 διαιρεί τον λ^2 , οπότε διαιρεί και τον λ . Άρα $\lambda = 3\nu$. Επομένως:

$$\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{3\mu}{3\nu} = \frac{\mu}{\nu}$$

Δηλαδή το $\frac{\kappa}{\lambda}$ δεν είναι ανάγωγο. Άτοπο.

β) Θέτουμε $a + \sqrt{3} = \rho$, όπου ρ ρητός αριθμός. Έστω ακόμη ότι ο a είναι ρητός. Τότε $\sqrt{3} = \rho - a$. Όμως ο $\rho - a$ είναι ρητός ως διαφορά δυο ρητών. Αυτό οδηγεί σε άτοπο, διότι ο $\sqrt{3}$ είναι άρρητος. Τελικά ο a είναι άρρητος.

Ενότητα 3

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Ασκήσεις για εξάσκηση

3.17 α) Είναι:

$$2a + 3\gamma < 2\beta + 3\delta \Leftrightarrow 2a + 3\gamma - 2\beta - 3\delta < 0 \Leftrightarrow 2(a - \beta) + 3(\gamma - \delta) < 0$$

που ισχύει διότι:

- ♦ $a < \beta \Leftrightarrow a - \beta < 0$
- ♦ $\gamma < \delta \Leftrightarrow \gamma - \delta < 0$

β) $2\delta - 3a > 2\gamma - 3\beta \Leftrightarrow 2\delta - 3a - 2\gamma + 3\beta > 0 \Leftrightarrow 2(\delta - \gamma) - 3(a - \beta) > 0$, που ισχύει διότι:

- ♦ $\gamma < \delta \Leftrightarrow \delta - \gamma > 0$
- ♦ $a < \beta \Leftrightarrow a - \beta < 0$

3.18 α) $3(a - 3) > a - 5 \Leftrightarrow 3a - 9 > a - 5 \Leftrightarrow 3a - 9 - a + 5 > 0 \Leftrightarrow 2a - 4 > 0 \Leftrightarrow 2(a - 2) > 0$

που ισχύει διότι:

$$a > 2 \Leftrightarrow a - 2 > 0$$

β) Είναι:

$$\alpha\beta + 2 < 2\beta + \alpha \Leftrightarrow \alpha\beta + 2 - 2\beta - \alpha < 0 \Leftrightarrow \beta(\alpha - 2) - (\alpha - 2) < 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)(\beta - 1) < 0$$

που ισχύει διότι:

- ♦ $\alpha > 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 > 0$
- ♦ $\beta < 1 \Leftrightarrow \beta - 1 < 0$

3.19 α) ♦ $a < \beta \Leftrightarrow a - \beta < 0$

♦ $\beta < \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma < 0$

Άρα:

$$(\alpha - \beta)(\beta - \gamma) > 0 \Leftrightarrow A > 0$$

β) ♦ $\beta < \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma < 0$

$$\diamond \alpha < \gamma \Leftrightarrow \alpha - \gamma < 0$$

$$\diamond \alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0$$

Άρα $B > 0$.

γ) $\diamond \alpha^2 + 1 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\diamond \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$$

Άρα $\Gamma = (\alpha^2 + 1)(\alpha - \beta) < 0$.

δ) $\diamond \alpha^4 + \beta^6 + 2 > 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\diamond \beta < \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma < 0$$

Άρα $\Delta < 0$.

3.20 α) Είναι:

$$\diamond \alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0 \Rightarrow (\beta - \alpha)^2 > 0$$

$$\diamond \beta < \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma < 0 \Rightarrow (\beta - \gamma)^4 > 0$$

Άρα $A = (\beta - \alpha)^2(\beta - \gamma)^4 > 0$.

β) Είναι:

$$\diamond \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0 \Rightarrow (\alpha - \beta)^3 < 0$$

$$\diamond \beta < \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma < 0 \Rightarrow (\beta - \gamma)^5 < 0$$

Άρα $B = (\alpha - \beta)^3(\beta - \gamma)^5 > 0$.

γ) Είναι:

$$\diamond \beta < \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma < 0 \Rightarrow (\beta - \gamma)^{2012} > 0$$

$$\diamond \alpha < \gamma \Leftrightarrow \gamma - \alpha > 0 \Rightarrow (\gamma - \alpha)^{2014} > 0$$

Άρα $\Gamma = (\beta - \gamma)^{2012}(\gamma - \alpha)^{2014} > 0$.

δ) Είναι:

$$\diamond \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0 \Rightarrow (\alpha - \beta)^{2000} > 0$$

$$\diamond \beta < \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma < 0 \Rightarrow (\beta - \gamma)^{2013} < 0$$

Άρα $\Delta = \frac{(\alpha - \beta)^{2000}}{(\beta - \gamma)^{2013}} < 0$.

3.21 α) Είναι:

$$\diamond \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$$

$$\diamond \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 < 0$$

Άρα $A > 0$.

β) Είναι:

$$\diamond \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 < 0$$

$$\diamond 1 < \beta \Leftrightarrow 1 - \beta < 0$$

$$\diamond \alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0$$

Άρα $B > 0$.

γ) Είναι:

$$\diamond \alpha^2 + 1 > 0 \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\diamond 1 < \beta \Leftrightarrow \beta - 1 > 0$$

Άρα $\Gamma > 0$.

δ) Είναι:

$$\diamond \alpha^4 \geq 0, \beta^8 \geq 0, \text{ οπότε } \alpha^4 + \beta^8 + 2 > 0$$

$$\diamond \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$$

$$\diamond \alpha < 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha > 0$$

Άρα $\Delta < 0$.

3.22 α) Για να είναι $5\alpha - 3 < 5\beta - 3$, αρκεί να ισχύει:

$$(5\alpha - 3) - (5\beta - 3) < 0 \text{ ή } 5\alpha - 3 - 5\beta + 3 < 0 \text{ ή}$$

$$5\alpha - 5\beta < 0 \text{ ή } 5(\alpha - \beta) < 0 \text{ ή}$$

$$\alpha - \beta < 0 \text{ ή } \alpha < \beta$$

η οποία όμως ισχύει από την υπόθεση.

Άρα ισχύει και η ανισότητα $5\alpha - 3 < 5\beta - 3$.

β) Για να είναι $-2\alpha + 4 > -2\beta + 4$, αρκεί να ισχύει ότι:

$$(-2\alpha + 4) - (-2\beta + 4) > 0 \text{ ή}$$

$$-2\alpha + 4 + 2\beta - 4 > 0 \text{ ή}$$

$$-2\alpha + 2\beta > 0 \text{ ή } -2(\alpha - \beta) > 0 \text{ ή}$$

$$\alpha - \beta < 0 \text{ ή } \alpha < \beta$$

που ισχύει από την υπόθεση.

γ) Για να είναι $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$, αρκεί να ισχύει ότι:

$$\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} < 0 \text{ ή } 2\left(\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) < 0 \text{ ή}$$

$$2\alpha - (\alpha + \beta) < 0 \text{ ή } 2\alpha - \alpha - \beta < 0 \text{ ή}$$

$$\alpha - \beta < 0 \text{ ή } \alpha < \beta$$

η οποία ισχύει από την υπόθεση.

δ) Για να είναι $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$, αρκεί να ισχύει ότι:

$$2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} < 2\beta \text{ ή } \alpha + \beta < 2\beta \text{ ή } \alpha + \beta - 2\beta < 0 \text{ ή}$$

$$\alpha - \beta < 0 \text{ ή } \alpha < \beta$$

που ισχύει από την υπόθεση.

Άρα ισχύει και η ζητούμενη ανισότητα.

Σχόλιο

Το ερώτημα (α) αποδεικνύεται και κατασκευαστικά, αφού διαδοχικά έχουμε:

$$\alpha < \beta \text{ ή } 5\alpha < 5\beta \text{ ή } 5\alpha - 3 < 5\beta - 3$$

Το ερώτημα (β) αποδεικνύεται επίσης με τον ίδιο τρόπο:

$$\alpha < \beta \text{ ή } -2\alpha > -2\beta \text{ ή } -2\alpha + 4 > -2\beta + 4$$

3.23 α) Είναι $\alpha > 3 > 0$ και $\beta > 4 > 0$. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη.

β) Είναι:

$$\alpha > 3 \text{ ή } 3 - \alpha < 0 \text{ και } \beta > 4 \text{ ή } 4 - \beta < 0$$

Άρα $(3 - \alpha)(4 - \beta) > 0$.

γ) Αφού $\alpha > 3$, θα είναι $\alpha + 1 > 3 + 1 = 4$. Επίσης $\beta > 4$, οπότε $\beta + 1 > 4 + 1 = 5$. Άρα:

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) > 4 \cdot 5 = 20$$

δ) Αρκεί:

$$\alpha\beta + 12 - 4\alpha - 3\beta > 0 \text{ ή } \alpha(\beta - 4) - 3(\beta - 4) > 0 \text{ ή}$$

$$(\alpha - 3)(\beta - 4) > 0$$

που ισχύει, διότι $\alpha > 3$ και $\beta > 4$.

3.24 α) Είναι $-\alpha > -\beta > 0$, οπότε:

$$\frac{1}{-\alpha} < \frac{1}{-\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

β) Θα είναι $-\alpha > -\beta > 0$ και $-x > -y > 0$. Άρα:

$$(-\alpha)(-x) > (-\beta)(-y) \text{ ή } \alpha x > \beta y$$

3.25 α) Από την υπόθεση έχουμε:

$$1 < x < 3 \text{ και } 2 < y < 5$$

Επομένως προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$1 + 2 < x + y < 3 + 5 \text{ ή } 3 < x + y < 8$$

β) Έχουμε $1 < x < 3$ και $2 > 0$. Επομένως:

$$2 \cdot 1 < 2x < 2 \cdot 3 \text{ ή } 2 < 2x < 6$$

Ισχύει όμως ότι:

$$2 < y < 5$$

Προσθέτοντας τις δύο αυτές ανισότητες κατά μέλη παίρνουμε:

$$2 + 2 < 2x + y < 6 + 5 \text{ ή } 4 < 2x + y < 11$$

γ) Έχουμε $2 < y < 5$, οπότε $-2 > -y > -5$, δηλαδή:

$$-5 < -y < -2$$

Αλλά $1 < x < 3$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο τελευταίων ανισοτήτων παίρνουμε:

$$-5 + 1 < -y + x < -2 + 3 \text{ ή}$$

$$-4 < x - y < 1$$

3.26 α) Είναι $2 < \alpha < 4$ και $1 < \beta < 3$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι:

$$2 + 1 < \alpha + \beta < 4 + 3 \Leftrightarrow 3 < \alpha + \beta < 7$$

β) Είναι $1 < \beta < 3$, οπότε πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της ανισότητας με -1 προκύπτει ότι:

$$(-1) \cdot 1 > (-1)\beta > (-1) \cdot 3 \Leftrightarrow -1 > -\beta > -3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 < -\beta < -1$$

Υπενθυμίζουμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε τα μέλη μιας ανισότητας με έναν αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανισότητας.

γ) Είναι $2 < \alpha < 4$ και $-3 < -\beta < -1$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$2 - 3 < \alpha - \beta < 4 - 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - \beta < 3$$

Σημειώνουμε ότι δεν αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.

δ) Είναι $2 < \alpha < 4$, οπότε πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της ανισότητας με 2 προκύπτει ότι:

$$2 \cdot 2 < 2\alpha < 2 \cdot 4 \Leftrightarrow 4 < 2\alpha < 8$$

Υπενθυμίζουμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε τα μέλη μιας ανισότητας με έναν θετικό αριθμό η φορά της ανισότητας δεν αλλάζει.

ε) Είναι $1 < \beta < 3$, οπότε πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της ανισότητας με -3 προκύπτει ότι:

$$(-3) \cdot 1 > (-3)\beta > (-3) \cdot 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 > -3\beta > -9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -9 < -3\beta < -3$$

στ) Είναι $4 < 2\alpha < 8$ και $-9 < -3\beta < -3$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι:

$$4 - 9 < 2\alpha - 3\beta < 8 - 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -5 < 2\alpha - 3\beta < 5$$

ζ) Είναι $0 < 2 < \alpha < 4$ και $0 < 1 < \beta < 3$, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι:

$$2 \cdot 1 < \alpha\beta < 4 \cdot 3 \Leftrightarrow 2 < \alpha\beta < 12$$

Υπενθυμίζουμε ότι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο ανισότητες με την ίδια φορά κατά μέλη μόνο όταν όλοι οι όροι είναι θετικοί αριθμοί (ή μηδέν).

η) Επειδή δεν μπορούμε να διαιρέσουμε κατά μέλη ανισότητες ακολουθούμε την επόμενη διαδικασία.

Είναι $1 < \beta < 3$, οπότε:

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{\beta} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{\beta} < 1 \quad (1)$$

Ακόμη:

$$2 < \alpha < 4 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{3} \cdot 2 < \frac{1}{\beta} \cdot \alpha < 1 \cdot 4 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < \frac{\alpha}{\beta} < 4$$

θ) Είναι:

♦ $4 < 2\alpha < 8$ και $1 < \beta < 3$, οπότε:

$$4 + 1 < 2\alpha + \beta < 8 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 < 2\alpha + \beta < 11 \quad (3)$$

♦ $-1 < \alpha - \beta < 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -1 + 2 < \alpha - \beta + 2 < 3 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \alpha - \beta + 2 < 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{\alpha - \beta + 2} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{\alpha - \beta + 2} < 1 \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (3) και (4):

$$\frac{1}{5} \cdot 5 < \frac{1}{\alpha - \beta + 2} \cdot (2\alpha + \beta) < 11 \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{2\alpha + \beta}{\alpha - \beta + 2} < 11$$

3.27 α) Έχουμε:

♦ $2 \leq \alpha \leq 4 \quad (1)$

♦ $-4 \leq \beta \leq -3 \Leftrightarrow 8 \geq -2\beta \geq 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6 \leq -2\beta \leq 8 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$2 + 6 \leq \alpha - 2\beta \leq 4 + 8 \Leftrightarrow 8 \leq \alpha - 2\beta \leq 12$$

β) Έχουμε:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \Leftrightarrow 2^2 \leq \alpha^2 \leq 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq \alpha^2 \leq 16 \quad (3)$$

Επίσης πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$2 \cdot 6 \leq \alpha(-2\beta) \leq 4 \cdot 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 \leq -2\alpha\beta \leq 32 \quad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$4 + 12 \leq \alpha^2 - 2\alpha\beta \leq 16 + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 \leq \alpha^2 - 2\alpha\beta \leq 48$$

3.28 α) Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες:

$$2 \leq x \leq 3 \text{ και } 1 \leq y \leq 2$$

προκύπτει ότι:

$$2 + 1 \leq x + y \leq 3 + 2 \Leftrightarrow 3 \leq x + y \leq 5$$

β) Έχουμε:

♦ $2 \leq x \leq 3 \xrightarrow{+2} 4 \leq 2x \leq 6 \quad (1)$

♦ $1 \leq y \leq 2 \xrightarrow{(-3)} -3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$4 - 6 \leq 2x - 3y \leq 6 - 3 \Leftrightarrow -2 \leq 2x - 3y \leq 3$$

γ) Έχουμε:

♦ $2 \leq x \leq 3 \quad (3)$

♦ $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1 \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3$$

3.29 α) Έχουμε:

♦ $3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow -3 \geq -x \geq -5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -5 \leq -x \leq -3 \quad (1)$$

♦ $-2 \leq y \leq -1 \quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$-5 - 2 \leq y - x \leq -3 - 1 \Leftrightarrow -7 \leq y - x \leq -4$$

β) Έχουμε:

♦ $3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 3^2 \leq x^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 9 \leq x^2 \leq 25 \quad (3)$$

♦ $-2 \leq y \leq -1 \Leftrightarrow 2 \geq -y \geq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 \leq -y \leq 2 \Leftrightarrow 1^2 \leq (-y)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq y^2 \leq 4 \quad (4)$$

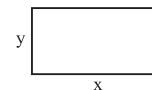
Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$9 + 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25 + 4 \Leftrightarrow 10 \leq x^2 + y^2 \leq 29$$

3.30 α), β) Εφαρμόζουμε με προσοχή τις ιδιότητες των ανισοτήτων. Βλέπε και τις προηγούμενες ασκήσεις.

3.31 α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x + 2y$$



Έχουμε:

♦ $4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14 \quad (1)$

♦ $2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 6 \quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$8 + 4 \leq 2x + 2y \leq 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \leq \Pi \leq 20$$

β) Η περίμετρος του νέου ορθογωνίου είναι:

$$\Pi' = 2(x-1) + 2 \cdot 3y = 2x - 2 + 6y$$

Έχουμε:

♦ $4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6 \leq 2x - 2 \leq 12 \quad (3)$$

♦ $2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18 \quad (4)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$6 + 12 \leq 2x - 2 + 6y \leq 12 + 18 \Leftrightarrow 18 \leq \Pi' \leq 30$$

3.32 α) Παρατηρούμε ότι:

$$BZ = \Delta\Gamma + \Delta E = 2y$$

και

$$EZ = AB - \Gamma\Delta = x - y$$

Άρα η περίμετρος είναι:

$$\Pi = AB + BZ + ZE + E\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma A =$$

$$= x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y$$

β) Έχουμε:

♦ $5 < x < 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16 \quad (1)$

♦ $1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8 \quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$14 < 2x + 4y < 24 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3.33 \alpha)} \quad A - B &= x^2 - xy - (xy - y^2) = \\ &= x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 = \\ &= (x - y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή $A - B \geq 0 \Leftrightarrow A \geq B$.

$$\begin{aligned} \mathbf{\beta)} \quad A - B &= \alpha^3 - \beta^3 - (\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta) = \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - \alpha\beta(\beta - \alpha) = \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + \alpha\beta(\alpha - \beta) = \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha\beta) = \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

διότι:

♦ $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$

♦ $(\alpha + \beta)^2 \geq 0$

Δηλαδή $A - B \leq 0 \Leftrightarrow A \leq B$.

$$\begin{aligned} \mathbf{\gamma)} \quad A - B &= \frac{\alpha - 4}{\beta} + \frac{4}{\alpha\beta} - \left(\frac{4 - \beta}{\alpha} - \frac{4}{\alpha\beta} \right) = \\ &= \frac{\alpha - 4}{\beta} + \frac{4}{\alpha\beta} - \frac{4 - \beta}{\alpha} + \frac{4}{\alpha\beta} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 4) + 4 - \beta(4 - \beta) + 4}{\alpha\beta} = \\ &= \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 4 - 4\beta + \beta^2 + 4}{\alpha\beta} = \\ &= \frac{\alpha^2 - 4\alpha + (\beta - 2)^2}{\alpha\beta} \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα $A - B \leq 0 \Leftrightarrow A \leq B$.

$$\begin{aligned} \mathbf{\delta)} \quad A - B &= (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2) = \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 = \\ &= -\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = -(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ &= -(\alpha - \beta)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή $A - B \leq 0 \Leftrightarrow A \leq B$.

$$\begin{aligned} \mathbf{\epsilon)} \quad A - B &= \alpha^2 + 2\beta + 1 - (2\alpha - 1 - \beta^2) = \\ &= (\alpha - 1)^2 + (\beta^2 + 2\beta + 1) = \\ &= (\alpha - 1)^2 + (\beta + 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή $A - B \geq 0 \Leftrightarrow A \geq B$.

3.34 Είναι:

$$\mathbf{\alpha)} \quad A - B = \dots = \frac{-2\alpha\beta(\alpha - \beta)}{\alpha^3 + \beta^3} < 0, \text{ οπότε } A < B.$$

$$\diamond A - \Gamma = \dots = \frac{2\alpha\beta(\beta - \alpha)}{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)} < 0, \text{ \acute{o}\pi\omicron\tau\epsilon } A < \Gamma.$$

$$\diamond B - \Gamma = \dots = \frac{2\alpha^2\beta^2(\alpha - \beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3)} > 0, \text{ \acute{o}\pi\omicron\tau\epsilon } B > \Gamma.$$

Άρα $A < \Gamma < B$.

3.35 α) Έχουμε:

$$\alpha^3 < \alpha \iff \alpha^3 - \alpha < 0 \iff \alpha(\alpha^2 - 1) < 0 \iff \iff \alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1) < 0$$

που ισχύει, διότι:

- ♦ $\alpha > 0$
- ♦ $\alpha < 1 \iff \alpha - 1 < 0$
- ♦ $\alpha > 0 \iff \alpha + 1 > 1$, άρα $\alpha + 1 > 0$

β) Παρατηρούμε ότι:

- ♦ $0 < \alpha < 1 \iff 0^3 < \alpha^3 < 1^3 \iff 0 < \alpha^3 < 1$
- ♦ $\alpha < 1 \iff \frac{1}{\alpha} > 1$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$$

3.36 Είναι:

$$3\alpha = 4\beta \text{ ή } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{3} > 1, \text{ άρα } \alpha > \beta$$

Όμοια:

$$4\beta = 5\gamma \text{ ή } \frac{\beta}{\gamma} = \frac{5}{4} > 1, \text{ άρα } \beta > \gamma$$

Άρα $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, δηλαδή $\alpha > \beta > \gamma$ ή τελικά:

$$\gamma < \beta < \alpha$$

3.37 α) Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τους αριθμούς α και β ως δύναμη με την ίδια βάση.

Επειδή $4 = 2^2$ και $8 = 2^3$, θα είναι:

$$\diamond \alpha = (2^6 \cdot 4^8)^5 = [2^6(2^2)^8]^5 = (2^6 \cdot 2^{16})^5 = (2^{6+16})^5 = (2^{22})^5 = 2^{5 \cdot 22} = 2^{110}$$

$$\diamond \beta = (8^5 \cdot 4^7)^4 = [(2^3)^5(2^2)^7]^4 = (2^{15} \cdot 2^{14})^4 = (2^{15+14})^4 = (2^{29})^4 = 2^{4 \cdot 29} = 2^{116}$$

Είναι λοιπόν $\alpha = 2^{110}$ και $\beta = 2^{116}$, οπότε $\alpha < \beta$.

β) Θα γράψουμε τους α και β ως δυνάμεις με τον ίδιο εκθέτη.

- ♦ $\beta = 2^{121} - 2^{120} - 2^{119} = 2^{119}(2^2 - 2 - 1) = 2^{119}$
- ♦ $\alpha = 5^{51} = 5^{3 \cdot 17} = (5^3)^{17} = 125^{17}$

$$\diamond \beta = 2^{119} = 2^{7 \cdot 17} = 128^{17}$$

Επειδή $125 < 128$, θα είναι και $\alpha < \beta$.

γ) Είναι:

$$\diamond \alpha = 2^{65} = 2^2 \cdot 2^{63} = 4(2^3)^{21} = 4 \cdot 8^{21}$$

$$\diamond \beta = 5^{22} - 125^7 = 5^{22} - (5^3)^7 = 5^{22} - 5^{21} = 5^{21}(5 - 1) = 4 \cdot 5^{21}$$

Επειδή $8 > 5$, θα είναι και $8^{21} > 5^{21}$.

Άρα $4 \cdot 8^{21} > 4 \cdot 5^{21}$, δηλαδή $\alpha > \beta$.

3.38 α) - δ) Φέρνουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και καταλήγουμε σε τέλειο τετράγωνο.

3.39 α) Είναι ισοδύναμη με την:

$$(\alpha + \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Είναι ισοδύναμη με την:

$$(\alpha - 3\beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

γ) Είναι:

$$2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

δ) Είναι:

$$(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 \geq 4(\alpha x + \beta y) \text{ ή } (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + (y^2 - 2\beta y + \beta^2) \geq 0 \text{ ή } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

3.40 α) Αρκεί:

$$2(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2) \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta$.

β) Αρκεί:

$$4(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - 3(\alpha + \beta)^2 \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta$.

3.41 α) Είναι:

$$\alpha^3 - \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha - \beta) \text{ ή } (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha - \beta) \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta) \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2) \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Είναι:

$$\alpha^3 - \beta^3 > (\alpha - \beta)^3 \text{ ή}$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - (\alpha - \beta)^3 > 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)[\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)] > 0 \text{ ή } 3\alpha\beta(\alpha - \beta) > 0$$

που ισχύει, διότι $\alpha - \beta > 0$.

γ) Μετά τις πράξεις παίρνουμε:

$$\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \iff \dots \iff \iff (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

3.42 Και οι δύο παρονομαστές είναι θετικοί.

α) Είναι:

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \leq 1 \text{ ή } 2\alpha \leq \alpha^2 + 1 \text{ ή } \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \text{ ή } (\alpha - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Είναι:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \leq \frac{1}{2} \text{ ή } 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

3.43 α) Είναι:

$$(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4 \text{ ή } 1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 \geq 4 \text{ ή}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \text{ (\alpha\beta > 0) ή } \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Είναι:

$$\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \text{ ή } \alpha^3 + \beta^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 \geq 0 \text{ ή } \alpha^2(\alpha - \beta) - \beta^2(\alpha - \beta) \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2) \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta) \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

3.44 α) Είναι ισοδύναμη με την:

$$(\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Είναι ισοδύναμη με την:

$$(\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

3.45 α) Είναι:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Καταλήγουμε στην:

$$3(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Καταλήγουμε στην:

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

3.46 α) Εκτελούμε τις πράξεις στο α' μέλος.

β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α) είναι:

$$2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 \geq 0$$

οπότε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha \geq 0 \text{ κ.λπ.}$$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha = \beta = \gamma$, διότι:

$$(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 0$$

μόνο αν:

$$\alpha - \beta = 0 \text{ και } \beta - \gamma = 0 \text{ και } \gamma - \alpha = 0$$

δηλαδή αν $\alpha = \beta = \gamma$.

3.47 α) Είναι:

$$2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha(\beta + \gamma) \text{ ή } 2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma \text{ ή } (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) + (\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma) \geq 0 \text{ ή } (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Είναι:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq \alpha(\beta + \gamma - \alpha) + \beta(\gamma + \alpha - \beta) + \gamma(\alpha + \beta - \gamma) \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma \geq \geq \alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha^2 + \beta\gamma + \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma - \gamma^2 \text{ ή } 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 \geq 0 \text{ ή } 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

3.48 Γίνεται:

α) $(\alpha - 2)^2 + 1 > 0$, που ισχύει.

β) $(\beta + 3)^2 + 2 > 0$, που ισχύει.

γ) $\gamma^2 + (\gamma - 4)^2 > 0$, που ισχύει. (Δεν μπορεί να είναι συγχρόνως $\gamma = 0$ και $\gamma = 4$.)

3.49 α) Κάθε όρος είναι ίσος με το μηδέν.

$$\text{Απ: } \alpha = 2, \beta = -3$$

β) Πρέπει οι βάσεις να είναι ίσες με μηδέν.

$$\text{Απ: } (x, y, \omega, z) = (1, -3, 7, -10)$$

3.50 α) Η ανισότητα γίνεται:

$$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 6y + 9) \geq 0 \iff \iff (x - 5)^2 + (y - 3)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Η ανισότητα γίνεται:

$$(x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + 4\omega^2 - 4y\omega) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - 2\omega)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

3.51 α) Προκύπτει η σχέση:

$$(a + 1)^2 + (\beta + 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $a = \beta = -1$.

β) Προκύπτει η σχέση:

$$(a - 1)^2 + (\beta - 3)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $a = 1$ και $\beta = 3$.

γ) $(a - 2)^2 + (\beta + 3)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν $a = 2$ και $\beta = 3$.

δ) $(a - 1)^2 + (\beta + 2)^2 + (\gamma - 3)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν $a = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 3$.

3.52 α) $a^2 + 1 = 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

β) $a^2 + 9 \leq 6a \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a - 3)^2 \leq 0$$

Όμως $(a - 3)^2 \geq 0$, οπότε από την $(a - 3)^2 \leq 0$, προκύπτει ότι:

$$(a - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

γ) $a^2 + \beta^2 + 2(a + \beta) + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 + \beta^2 + 2a + 2\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 2a + 1) + (\beta^2 + 2\beta + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)^2 + (\beta + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ \beta + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

δ) $a^2 + \beta^2 + 2 = 2(a + \beta) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 + \beta^2 + 2 - 2a - 2\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (\beta^2 - 2\beta + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (\beta - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ \beta - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

ε) $a^2 + \beta^2 + 13 = 2(3\beta - 2a) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 + \beta^2 + 13 = 6\beta - 4a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 4a + 4) + (\beta^2 - 6\beta + 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + 2)^2 + (\beta - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = 0 \\ \beta - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

στ) $(a + 5)^2 + (\beta - 2)^2 = 4(a + \beta + 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 + 10a + 25 + \beta^2 - 4\beta + 4 - 4a - 4\beta - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 6a + 9) + (\beta^2 - 8\beta + 16) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + 3)^2 + (\beta - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3 = 0 \\ \beta - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

ζ) $2a^2 + \beta^2 + 4 \leq 4a\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + \beta^2 + 4 \leq 4a + 2a\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2a\beta + \beta^2) + (a^2 - 4a + 4) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - \beta)^2 + (a - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - \beta = 0 \\ a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \beta \\ a = 2 \end{cases}$$

Άρα $a = \beta = 2$.

η) $a^2 + \beta^2 \leq 4(2\beta - a - 5) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 + \beta^2 \leq 8\beta - 4a - 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \beta^2 - 8\beta + 4a + 20 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 4a + 4) + (\beta^2 - 8\beta + 16) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + 2)^2 + (\beta - 4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + 2)^2 + (\beta - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = 0 \\ \beta - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

θ) $(a + 1)^2 + \beta^2 = 4a - 3(2\beta + 3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 + \beta^2 - 4a + 6\beta + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (\beta^2 + 6\beta + 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (\beta + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ \beta + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

ι) $2a^2 + \beta^2 \leq 3(2a - 3) - 2a\beta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + \beta^2 \leq 6a - 9 - 2a\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + \beta^2 - 6a + 9 + 2a\beta \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + \beta^2 + 2a\beta) + (a^2 - 6a + 9) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + \beta)^2 + (a - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + \beta)^2 + (a - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + \beta = 0 \\ a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -a \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ a = 3 \end{cases}$$

3.53 Η σχέση γράφεται:

$$(a^2 - 2a + 1) + (\beta^2 - 4\beta + 4) + (\gamma^2 - 6\gamma + 9) \leq 0$$

$$(\text{διότι } 14 = 1 + 4 + 9) \text{ ή}$$

$$(a - 1)^2 + (\beta - 2)^2 + (\gamma - 3)^2 \leq 0$$

Άρα:

$$a - 1 = 0, \beta - 2 = 0, \gamma - 3 = 0$$

δηλαδή:

$$a = 1, \beta = 2, \gamma = 3$$

3.54 Είναι:

$$27\beta^2 = 25\beta^2 + 2\beta^2$$

Έχουμε:

$$A = (a^2 - 10a\beta + 25\beta^2) + (2\beta^2 - 8\beta + 8) =$$

$$= (a - 5\beta)^2 + 2(\beta^2 - 4\beta + 4) =$$

$$= (a - 5\beta)^2 + 2(\beta - 2)^2 \geq 0$$

Η ελάχιστη τιμή είναι το 0, για:

$$\beta = 2 \text{ και } a = 5\beta = 10$$

3.55 Προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (\omega - 1)^2 \leq 0$$

$$\text{Απ: } x = 1, y = 1, \omega = 1$$

3.56 Πρέπει $x, y, \omega \geq 0$ (τα κλάσματα είναι μη αρνητικά).

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη:

$$\frac{8(xy\omega)^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+\omega^2)} = xy\omega \quad (1)$$

♦ Αν $xy\omega = 0$, τότε $x = y = \omega = 0$, δηλαδή:

$$(x, y, \omega) = (0, 0, 0)$$

♦ Αν $xy\omega \neq 0$, τότε η (1) γίνεται:

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+\omega^2) = 8xy\omega \quad (2)$$

Αλλά:

$$1+x^2 \geq 2x, \quad 1+y^2 \geq 2y, \quad 1+\omega^2 \geq 2\omega$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για:

$$x = 1, y = 1, \omega = 1$$

Άρα:

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+\omega^2) \geq 8xy\omega \quad (\text{αφού } x, y, \omega > 0)$$

οπότε η (2) ισχύει, μόνο αν:

$$x = y = \omega = 1$$

Σχόλιο

$$\text{Είναι } y = \frac{2x^2}{1+x^2} \leq \frac{2x^2}{2x} = x \text{ και όμοια } \omega \leq y, x \leq \omega,$$

δηλαδή $x \leq \omega \leq y \leq x$. Άρα $x = y = \omega$ κ.λπ.

3.57 Αν πολλαπλασιάσουμε τις δοσμένες σχέσεις με το 4, γίνονται:

$$4a - 4\beta^2 \geq 1, \quad 4\beta - 4\gamma^2 \geq 1, \quad 4\gamma - 4a^2 \geq 1$$

Προσθέτουμε τις τρεις αυτές σχέσεις κατά μέλη και προκύπτει ότι:

$$4a + 4\beta + 4\gamma - 4a^2 - 4\beta^2 - 4\gamma^2 \geq 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4a^2 + 4\beta^2 + 4\gamma^2 - 4a - 4\beta - 4\gamma + 3 \leq 0 \xrightarrow{3=1+1+1} \\ \Leftrightarrow (4a^2 - 4a + 1) + (4\beta^2 - 4\beta + 1) + (4\gamma^2 - 4\gamma + 1) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2a - 1)^2 + (2\beta - 1)^2 + (2\gamma - 1)^2 \leq 0$$

Αλλά η σχέση αυτή μπορεί να ισχύει μόνο αν:

$$\begin{cases} (2a - 1)^2 = 0 \\ (2\beta - 1)^2 = 0 \\ (2\gamma - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 2\beta - 1 = 0 \\ 2\gamma - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

διότι:

$$(2a - 1)^2 \geq 0, \quad (2\beta - 1)^2 \geq 0 \quad \text{και} \quad (2\gamma - 1)^2 \geq 0$$

οπότε:

$$(2a - 1)^2 + (2\beta - 1)^2 + (2\gamma - 1)^2 \geq 0$$

Οι τιμές $a = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$ επαληθεύουν και τις τρεις σχέσεις που μας δόθηκαν. Για παράδειγμα είναι:

$$a - \beta^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

δηλαδή $a - \beta^2 \geq \frac{1}{4}$.

Άρα τελικά οι ζητούμενες τιμές είναι:

$$a = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

3.58 α) Είναι:

$$a^3 - 1 < a^2 - a \Leftrightarrow a^3 - a^2 - 1 + a < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a^2(a-1) + (a-1) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-1)(a^2+1) < 0 \xrightarrow{a^2+1>0} \\ &\Leftrightarrow a-1 < 0 \Leftrightarrow a < 1, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} a + \beta > a\beta + 1 &\Leftrightarrow a + \beta - a\beta - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a(1-\beta) - (1-\beta) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-1)(1-\beta) > 0 \end{aligned}$$

που ισχύει διότι:

$$\begin{aligned} a < 1 &\Leftrightarrow a-1 < 0 \\ 1 < \beta &\Leftrightarrow 1-\beta < 0 \end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} a^3 < a &\Leftrightarrow a^3 - a < 0 \Leftrightarrow a(a^2-1) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a(a-1)(a+1) < 0 \end{aligned}$$

που ισχύει, διότι:

$$a > 0, \quad a < 1 \Leftrightarrow a-1 < 0 \quad \text{και} \quad a+1 > 0$$

3.59 α) Η ζητούμενη γίνεται $(a-1)(1-\beta) > 0$, που ισχύει, διότι $a-1 < 0$ και $1-\beta < 0$.

β) Η ζητούμενη γίνεται $(a+1)(a-1)^2 < 0$, που ισχύει, διότι $a+1 < 0$ και $(a-1)^2 > 0$.

Αποκλείεται να είναι $(a-1)^2 = 0$, δηλαδή $a = 1$, διότι: $a < -1$

3.60 α) Είναι:

$$\begin{aligned} a^3 > 2a^2 - a + 2 \quad \text{ή} \quad a^3 - 2a^2 + a - 2 > 0 \quad \text{ή} \\ a^2(a-2) + (a-2) > 0 \quad \text{ή} \\ (a-2)(a^2+1) > 0 \end{aligned}$$

που ισχύει, διότι $a > 2$ και $a^2+1 > 0$.

β) Είναι:

$$\begin{aligned} a^3 + 2a > a^2 + 2 \quad \text{ή} \quad a^3 + 2a - a^2 - 2 > 0 \quad \text{ή} \\ a^2(a-1) + 2(a-1) > 0 \quad \text{ή} \\ (a^2+2)(a-1) > 0 \end{aligned}$$

που ισχύει, διότι $a > 2 > 1$ και $a^2+2 > 0$.

3.61 Γίνεται:

$$\begin{aligned} 1 - a - \beta + a\beta \geq 0 &\Leftrightarrow (1-a) - \beta(1-a) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-a)(1-\beta) \geq 0, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει αν $a = 1$ ή $\beta = 1$.

3.62 α) Είναι:

$$a^2 - \beta^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 < \beta^2 \xrightarrow{a, \beta > 0} a < \beta$$

Άλλος τρόπος

$$\begin{aligned} a^2 - \beta^2 < 0 &\Leftrightarrow (a-\beta)(a+\beta) < 0 \xrightarrow{a+\beta > 0} \\ &\Leftrightarrow a-\beta < 0 \Leftrightarrow a < \beta \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$\frac{a}{\beta} < \frac{\beta}{\alpha} \xrightarrow{a, \beta > 0} a^2 < \beta^2, \text{ που ισχύει}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} a^3 + a < \beta^3 + \beta &\Leftrightarrow a^3 + a - \beta^3 - \beta < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-\beta)(a^2 + a\beta + \beta^2) + (a-\beta) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-\beta)(a^2 + a\beta + \beta^2 + 1) < 0 \end{aligned}$$

που ισχύει, διότι:

$$\begin{aligned} \diamond a < \beta &\Leftrightarrow a - \beta < 0 \\ \diamond a^2 + a\beta + \beta^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2 + a\beta + \beta^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

Σημείωση

$$\begin{aligned} a^2 + a\beta + \beta^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 2a^2 + 2a\beta + 2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 + (a^2 + 2a\beta + \beta^2) + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 + (a+\beta)^2 + \beta^2 \geq 0, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

Άλλος τρόπος

Είναι:

$$a^3 + a < \beta^3 + \beta \Leftrightarrow a(a^2+1) < \beta(\beta^2+1)$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \diamond 0 < a < \beta \\ \diamond 0 < a < \beta &\Rightarrow a^2 < \beta^2 \Rightarrow a^2 + 1 < \beta^2 + 1 \end{aligned}$$

Άρα $a(a^2+1) < \beta(\beta^2+1)$.

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} \diamond a < \beta &\Rightarrow a^3 < \beta^3 \\ \diamond 0 < a < \beta &\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{\beta} \Rightarrow -\frac{1}{a} < -\frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

Άρα $a^3 - \frac{1}{a} < \beta^3 - \frac{1}{\beta}$.

$$\epsilon) a < \frac{3a+2\beta}{5} < \beta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < \frac{3a+2\beta}{5} \\ \frac{3a+2\beta}{5} < \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5a < 3a+2\beta \\ 3a+2\beta < 5\beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a < 2\beta \\ 3a < 3\beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a < \beta, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau) \diamond \frac{a+\beta}{2} < \frac{a+3\beta}{4} &\Leftrightarrow 2(a+\beta) < a+3\beta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2a+2\beta < a+3\beta \Leftrightarrow a < \beta, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \frac{a+3\beta}{4} < \beta &\Leftrightarrow a+3\beta < 4\beta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a < \beta, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

3.63 α) ♦ $a^2 - a^3 = a^2(1-a)$

$$\diamond \left\{ \begin{array}{l} a^2 \geq 0 \\ a > 1 \Leftrightarrow 1-a < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2(1-a) \leq 0$$

$$\begin{aligned} \beta) a + \beta + a\beta + 1 &= (a+1) + \beta(a+1) = \\ &= (a+1)(\beta+1) > 0 \end{aligned}$$

διότι:

$$\begin{aligned} a > 1 &\Leftrightarrow a+1 > 2 > 0 \\ \beta > 2 &\Leftrightarrow \beta+1 > 3 > 0 \end{aligned}$$

$$\gamma) \diamond a > 1 \Leftrightarrow a-1 > 0$$

$$\diamond \beta > 2 \Leftrightarrow 2-\beta < 0$$

$$\diamond \left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ \beta > 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} a + \beta > 3 \Rightarrow a + \beta - 3 > 0$$

$$\diamond \left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ \beta > 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(\cdot)} a\beta > 2 \Rightarrow a\beta - 2 > 0$$

Άρα $(a-1)(2-\beta)(a+\beta-3)(a\beta-2) < 0$.

3.64 α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} a + \frac{4}{a} \geq 4 &\xrightarrow{a>0} a^2 + 4 \geq 4a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-2)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$a + \frac{4}{a} \geq 4 \quad (1)$$

και ομοίως αποδεικνύουμε ότι:

$$\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\left(a + \frac{4}{a}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$$

3.65 α) Προκύπτει η ισοδύναμη:

$$(a+\beta)(a-\beta) \leq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Προκύπτει η ισοδύναμη:

$$a^3 + \beta^3 \leq a\beta(a+\beta)$$

που ισχύει λόγω του ερωτήματος (α).

3.66 α) Είναι:

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} \geq 2 &\xrightarrow{a>0} a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} \leq -2 &\xrightarrow{a<0} a^2 + 1 \geq -2a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a+1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad \text{και} \quad \beta + \frac{1}{\beta} \geq 2$$

οπότε:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4$$

δ) Είναι:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad \beta + \frac{1}{\beta} \geq 2, \quad \gamma + \frac{1}{\gamma} \geq 2$$

οπότε:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 8$$

3.67 α) Είναι:

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} \geq 2 &\xrightarrow{a>0} a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} a^4 + \frac{1}{a^2} \geq 2a &\xrightarrow{a>0} a^6 + 1 \geq 2a^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^6 - 2a^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a^3 - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} a^4 + \frac{1}{a^2} \geq 2a &\Leftrightarrow a^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} \geq 2a + \frac{2}{a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} \geq 2\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\alpha^4 + \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \geq 4$$

3.68 Είναι:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \quad \text{και} \quad \beta + \frac{1}{\beta} \geq 2$$

Προσθέτουμε κατά μέλη κ.λπ.

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.

3.69 α) Είναι:

$$x + y \geq 2 \quad \text{ή} \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{ή} \\ (x - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x = y = 1$.

β) Αρκεί:

$$\frac{(2+y)+(2+x)}{(2+x)(2+y)} \leq \frac{2}{3} \quad \text{ή}$$

$$3(4+x+y) \leq 2(x+2)(y+2) \quad \text{ή} \\ 2 \leq x+y \quad \text{ή} \quad x+y \geq 2$$

που ισχύει από το ερώτημα (α).

Η ισότητα ισχύει αν $x = y = 1$.

3.70 α) Είναι:

$$\alpha + \beta = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2 - \beta$$

Όμως:

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow 2 - \beta > 0 \Leftrightarrow \beta < 2$$

β) Είναι:

$$\alpha + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 2 - \alpha$$

Όμως:

$$\beta > 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 2$$

γ) Είναι:

$$\alpha\beta \leq 1 \xrightarrow{\alpha+\beta=2} \alpha(2-\alpha) \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\alpha - \alpha^2 \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

δ) Είναι:

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2 \xrightarrow{\alpha+\beta=2} \alpha^2 + (2-\alpha)^2 \geq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 - 4\alpha + \alpha^2 \geq 2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 4\alpha + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Άλλος τρόπος

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2 - 2\alpha\beta \geq 2 \Leftrightarrow 4 - 2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq 1$$

που ισχύει λόγω του ερωτήματος (γ).

ε) Είναι:

$$\alpha^4 + \beta^4 \geq 2 \Leftrightarrow (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 \geq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \geq 2$$

Όμως:

$$\diamond \alpha^2 + \beta^2 \geq 2 \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2)^2 \geq 2^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2)^2 \geq 4 \quad (1) \\ \diamond \alpha\beta \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha\beta \leq 1 \Rightarrow \alpha^2\beta^2 \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow -2\alpha^2\beta^2 \geq -2 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \geq 2$$

Σημείωση

$$\diamond 0 < \alpha < \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2 \\ \diamond \alpha < \beta < 0 \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$$

3.71 α) $\alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 - \alpha$

Όμως:

$$\beta > 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

β) $\alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 - \beta$

Όμως:

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow 1 - \beta > 0 \Leftrightarrow \beta < 1$$

$$\gamma) \alpha\beta \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha(1-\alpha) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha - \alpha^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha - 4\alpha^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 + 4\alpha^2 - 4\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2\alpha - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

δ) Είναι:

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - 2\alpha\beta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - 4\alpha\beta \geq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq 1 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{1}{4}$$

που ισχύει λόγω του ερωτήματος (γ).

Άλλος τρόπος

Είναι:

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 + (1-\alpha)^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2 - 4\alpha + 2\alpha^2 \geq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2\alpha - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

ε) Είναι:

$$\diamond \alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2)^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 \geq \frac{1}{4} \\ \diamond (\alpha^2 - \beta^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 \geq 0 \\ \text{Άρα προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε ότι:} \\ 2\alpha^4 + 2\beta^4 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^4 + \beta^4 \geq \frac{1}{8}$$

στ) Είναι:

$$\diamond \alpha^4 + \beta^4 \geq \frac{1}{8} \Leftrightarrow (\alpha^4 + \beta^4)^2 \geq \frac{1}{64} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^8 + 2\alpha^4\beta^4 + \beta^8 \geq \frac{1}{64} \\ \diamond (\alpha^4 - \beta^4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^8 - 2\alpha^4\beta^4 + \beta^8 \geq 0 \\ \text{Άρα προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε ότι:} \\ 2\alpha^8 + 2\beta^8 \geq \frac{1}{64} \Leftrightarrow \alpha^8 + \beta^8 \geq \frac{1}{128}$$

$$\mathbf{3.72 \alpha)} \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \\ = 1 - 3\alpha\beta \cdot 1 = 1 - 3\alpha\beta$$

β) $\alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 - \alpha$

$$\diamond 4\alpha\beta \leq 1 \Leftrightarrow 4\alpha(1-\alpha) \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha - 4\alpha^2 \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2\alpha - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

$$\gamma) \alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - 2\alpha\beta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - 4\alpha\beta \geq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq 1 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{1}{4} \\ \text{που ισχύει λόγω του ερωτήματος (β).}$$

$$\delta) \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \frac{\beta+1}{\beta} \geq 9 \xrightarrow{\frac{\alpha>0}{\beta>0}} \\ \Leftrightarrow (\alpha+1)(\beta+1) \geq 9\alpha\beta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 \geq 9\alpha\beta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + 1 \geq 8\alpha\beta \Leftrightarrow 8\alpha\beta \leq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{2}{8} \Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{1}{4} \\ \text{που ισχύει λόγω του ερωτήματος (β).}$$

3.73 α) Είναι ισοδύναμη με την:

$$\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \geq \alpha\beta(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Το α' μέλος γράφεται:

$$\left(\frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\beta^2}{2\alpha}\right) + \left(\frac{\beta^2}{2\gamma} + \frac{\gamma^2}{2\beta}\right) + \left(\frac{\gamma^2}{2\alpha} + \frac{\alpha^2}{2\gamma}\right) \geq \\ \geq \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\gamma+\alpha}{2} = \alpha + \beta + \gamma \\ \text{με βάση το ερώτημα (α).}$$

3.74 α) Ισοδύναμη:

$$\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha + \beta) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Το α' μέλος γράφεται:

$$\left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta^2}{\gamma} + \frac{\gamma^2}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\gamma}\right) \geq \\ \geq (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) = 2(\alpha + \beta + \gamma) \\ \text{με βάση το ερώτημα (α).}$$

3.75 α) Μας οδηγεί στην ισοδυναμία:

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Με βάση το ερώτημα (α).

Απ: Όταν $\alpha = \beta$ ή $\alpha = \beta = \gamma$ αντίστοιχα.

3.76 α) Ισοδύναμη:

$$3\alpha^2 - 3\alpha\beta + 3\beta^2 \geq \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \\ \text{που ισχύει.}$$

β) Το ερώτημα (α) δίνει:

$$\frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \geq \frac{\alpha + \beta}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \geq \frac{\alpha + \beta}{3}$$

Όμοια και για τα υπόλοιπα κλάσματα. Προσθέτουμε κατά μέλη. Η ισότητα ισχύει αν $\alpha = \beta = \gamma$.

3.77 α) Αρκεί τελικά $(x - y)^2 \geq 0$, που ισχύει.

β) Γράφεται:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{\omega} + \frac{\omega}{y}\right) + \left(\frac{x}{\omega} + \frac{\omega}{x}\right) \geq 6$$

που ισχύει, διότι:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \text{ κ.λπ.}$$

γ) Κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε στο ερώτημα (β).

δ) Αρκεί:

$$2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2, \text{ που ισχύει}$$

ε) Χρησιμοποιούμε το ερώτημα (δ), οπότε:

$$\frac{y^2 + \omega^2}{y + \omega} \geq \frac{y + \omega}{2}, \quad \frac{\omega^2 + x^2}{\omega + x} \geq \frac{\omega + x}{2}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις τρεις ανισότητες.

3.78 α) Αρκεί:

$$\alpha^2\gamma^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta\gamma \quad \text{ή} \quad (\alpha\gamma - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Όμοια.

γ) Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισότητες:

$$\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\gamma^2} \geq \frac{2\alpha\beta}{\gamma}, \quad \beta^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \geq \frac{2\beta\gamma}{\alpha}, \quad \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \geq \frac{2\gamma\alpha}{\beta}$$

Ασκήσεις για διαγωνισμούς

Δ3.1 α) Ισοδύναμα:

$$(\alpha + \beta)^2 > \gamma^2 \quad \text{ή} \quad \alpha + \beta > \gamma, \text{ που ισχύει}$$

β) Ισοδύναμα:

$$(\alpha - \beta)^2 < \gamma^2 \quad \text{ή} \quad |\alpha - \beta| < \gamma, \text{ που ισχύει}$$

(τριγωνική ανισότητα)

γ) Προσθέτουμε τις:

$$\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta, \quad \beta^2 + \gamma^2 < \alpha^2 + 2\beta\gamma, \\ \gamma^2 + \alpha^2 < \beta^2 + 2\alpha\gamma \quad \text{κ.λπ.}$$

Δ3.2 α) Είναι $\alpha\beta\gamma = 1$, οπότε $\alpha\beta = \frac{1}{\gamma}$.

Αρκεί λοιπόν:

$$\alpha\beta + \gamma \geq 2 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\gamma} + \gamma \geq 2 \quad \text{ή} \quad (\gamma - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Ισχύει:

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \quad \text{και} \quad \gamma^2 + 1 \geq 2\gamma$$

Άρα με πρόσθεση παίρνουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1 \geq 2(\alpha\beta + \gamma)$$

3.79 α) Αρκεί:

$$x^2 - x + 1 - x \geq 0 \quad \text{ή} \quad (x - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Όμοια και τα υπόλοιπα.

β) Πολλαπλασιάζουμε τις ανισότητες στο ερώτημα (α).

3.80 α) Είναι $x^2 + y^2 \geq 2xy$, οπότε:

$$x^2 + 1 \geq 2x > 0, \quad y^2 + 1 \geq 2y > 0, \quad \omega^2 + 1 \geq 2\omega > 0$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη κ.λπ.

Η ισότητα ισχύει αν $x = y = \omega = 1$.

β) Είναι $\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha > 0$ κ.λπ.

Η ισότητα θα ισχύει αν $x = y = \omega = 2$.

3.81 Αφού $\alpha\beta\gamma = 1$, θα είναι:

$$\alpha\beta = \frac{1}{\gamma}, \quad \beta\gamma = \frac{1}{\alpha}, \quad \gamma\alpha = \frac{1}{\beta}$$

Έτσι:

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \\ = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

διότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$ για κάθε $x > 0$.

Το ίσον ισχύει για $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

γ) Αφού $\alpha\beta + \gamma \geq 2$ (από το ερώτημα (α)), παίρνουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1 \geq 2(\alpha\beta + \gamma) \geq 2 \cdot 2 = 4$$

Άρα $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 4 - 1 = 3$.

Δ3.3 Με βάση την ανισότητα $\kappa^2 + \lambda^2 \geq 2\kappa\lambda$, παίρνουμε:

$$\alpha^2 + x^2 \geq 2\alpha x, \quad \beta^2 + y^2 \geq 2\beta y \\ \text{και} \quad \gamma^2 + \omega^2 \geq 2\gamma\omega$$

Προσθέτουμε τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + x^2 + y^2 + \omega^2 \geq 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma\omega \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 + 3 \geq 2(\alpha x + \beta y + \gamma\omega) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma\omega \leq 3$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x = \alpha$, $y = \beta$ και $\omega = \gamma$.

Δ3.4 Σύμφωνα με τη βασική ανισότητα:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

η οποία ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, παίρνουμε:

$$\diamond \quad \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 \geq 2\alpha^2\beta^2$$

$$\diamond \quad \gamma^4 + \delta^4 = (\gamma^2)^2 + (\delta^2)^2 \geq 2\gamma^2\delta^2$$

Έτσι:

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 \geq 2\alpha^2\beta^2 + 2\gamma^2\delta^2 \quad (1)$$

Αλλά:

$$2\alpha^2\beta^2 + 2\gamma^2\delta^2 = 2[(\alpha\beta)^2 + (\gamma\delta)^2] \geq 2[2(\alpha\beta)(\gamma\delta)]$$

δηλαδή:

$$2\alpha^2\beta^2 + 2\gamma^2\delta^2 \geq 4\alpha\beta\gamma\delta \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2), μεταβατικά, δίνουν:

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 \geq 4\alpha\beta\gamma\delta$$

Στην ανισότητα $x^2 + y^2 \geq 2xy$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = y$. Άρα η ισότητα στη δοσμένη ανισότητα ισχύει μόνο αν $(\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta)$ ή αν $(\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta)$ ή αν $(\alpha = \delta$ και $\beta = \gamma)$.

Δ3.5 Ισχύει ότι $x^2 + x + 1 \geq 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε διαδοχικά $x = \frac{\alpha}{\beta}$, $x = \frac{\beta}{\gamma}$, $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ κ.λπ.

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma$.

Δ3.6 α) Είναι $v \geq 2$, οπότε $v + 1 > 0$ και $v^2 > 0$.

Έτσι:

$$\frac{1}{v^3} < \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} \Leftrightarrow \frac{1}{v^3} < \frac{v+1-v}{v(v+1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{v^3} < \frac{1}{v+1} \Leftrightarrow v^2 > v+1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v^2 - v - 1 > 0 \Leftrightarrow v(v-1) > 1$$

που ισχύει, διότι $v > 1$ και $v - 1 \geq 1$.

β) Στη σχέση:

$$\frac{1}{v^3} < \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} \quad (1)$$

δίνουμε για το v τις τιμές 2, 3, 4, ..., 2014. Έτσι παίρνουμε:

$$\frac{1}{2^3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4^3} < \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{2014^3} < \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη όλες αυτές τις σχέσεις:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2014^3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2015} < \frac{1}{2}$$

Δ3.7 Σύμφωνα με την ανισότητα:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{\omega^2}{\gamma} \geq \frac{(x+y+\omega)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

έχουμε:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1} + \frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1} + \frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1} \geq \\ \geq \frac{[(\alpha+\beta) + (\beta+\gamma) + (\gamma+\alpha)]^2}{(\gamma+1) + (\alpha+1) + (\beta+1)} = \\ = \frac{[2(\alpha+\beta+\gamma)]^2}{\alpha+\beta+\gamma+3} = \frac{4}{1+3} = 1$$

Δ3.8 α) Με ισοδυναμίες.

β) Με βάση την $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ έχουμε:

$$\frac{1}{2\alpha+\beta+\gamma} = \frac{1}{(\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha+\gamma}\right) \leq \\ \leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)\right] = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \text{ κ.λπ.}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma$.

Δ3.9 Επειδή $a^2 = (\alpha^2 + \beta\gamma) - \beta\gamma$, η ανισότητα γράφεται:

$$\left(1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha^2 + \beta\gamma}\right) + \left(1 - \frac{\gamma\alpha}{\beta^2 + \gamma\alpha}\right) + \left(1 - \frac{\alpha\beta}{\gamma^2 + \alpha\beta}\right) \leq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\beta\gamma}{\alpha^2 + \beta\gamma} + \frac{\gamma\alpha}{\beta^2 + \gamma\alpha} + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2 + \alpha\beta} \geq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + 1} + \frac{1}{\frac{\beta^2}{\gamma\alpha} + 1} + \frac{1}{\frac{\gamma^2}{\alpha\beta} + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{\omega+1} \geq 1$$

όπου $xy\omega = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma\alpha} \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} = 1$. Είναι:

$$(xy\omega)(xy\omega) = 1 \Leftrightarrow (xy)(y\omega)(\omega x) = 1$$

οπότε κάποιος από τους xy , $y\omega$ και ωx είναι μικρότερος ή ίσος του 1.

Έστω $xy \leq 1$. Τότε:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq 1$$

αφού αυτή γράφεται:

$$(1+y) + (1+x) \geq (1+x)(1+y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + x + y \geq 1 + x + y + xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy \leq 1, \text{ που ισχύει}$$

Άρα θα ισχύει και:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+\omega} \geq 1$$

Δ3.10 Με πολλαπλασιασμό των:

$$\alpha^3\beta \leq 4\gamma - 3, \quad \beta^3\gamma \leq 4\alpha - 3, \quad \gamma^3\alpha \leq 4\beta - 3$$

παίρνουμε:

$$\alpha^4\beta^4\gamma^4 \leq (4\alpha - 3)(4\beta - 3)(4\gamma - 3) \quad (1)$$

Όμως:

$$\alpha^4 + 3 = (\alpha^4 + 1) + 2 \geq 2\alpha^2 + 2 = 2(\alpha^2 + 1) \geq 4\alpha$$

με ισότητα για $\alpha = 1$.

Άρα:

$$\alpha^4 \geq 4\alpha - 3, \quad \beta^4 \geq 4\beta - 3, \quad \gamma^4 \geq 4\gamma - 3 \quad (2)$$

δηλαδή:

$$\alpha^4\beta^4\gamma^4 \geq (4\alpha - 3)(4\beta - 3)(4\gamma - 3) \quad (3)$$

Οι (1) και (3) δίνουν ότι:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

Σχόλιο

Οι δοσμένες δίνουν ότι:

$$4\alpha - 3 > 0, \quad 4\beta - 3 > 0, \quad 4\gamma - 3 > 0$$

οπότε οι (2) έχουν θετικά και τα δύο μέλη.

Δ3.11 α) Είναι:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50}\right) = \\ &= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100} \end{aligned}$$

β) ♦ $\alpha = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} <$

$$< \frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{51} = \frac{50}{51} < 1$$

♦ $\alpha = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} >$

$$> \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Δ3.12 Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{15} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} = 1$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{31} < \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = 1$$

Προσθέτουμε κατά μέλη κ.λπ.

Δ3.13 Έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (1)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ισοδυναμιών.

Είναι:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \geq 3 + \frac{2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)}{\alpha\beta\gamma} \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\gamma^2} -$$

$$-3 - 2\left(\frac{\alpha^3}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta^3}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right) + \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right) + \left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} + 1\right) -$$

$$-3 - 2\left(\frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} -$$

$$-2 \cdot \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} - 2 \cdot \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} - 2 \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} - 2 \cdot \frac{\alpha^2}{\beta\gamma}\right) + \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} - 2 \cdot \frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\beta^2} - 2 \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\beta\gamma}\right) + \beta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\alpha\gamma}\right) +$$

$$+ \gamma^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\alpha\beta}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)^2 \geq 0$$

που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)^2 = 0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)^2 = 0$$

δηλαδή όταν είναι:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma}, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}$$

Οι σχέσεις αυτές τελικά δίνουν $\alpha = \beta = \gamma$.

Δ3.14 α) Με βάση την $x^2 + y^2 \geq 2xy$ κ.λπ.

β) Με βάση το ερώτημα (α) είναι:

$$K^2 = \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma\alpha}{\beta}\right)^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq$$

$$\geq \frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot \frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\beta\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\gamma\alpha}{\beta} + \frac{\gamma\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha\beta}{\gamma} + 2 \cdot 3 =$$

$$= (\beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2) + 6 = 9$$

Άρα $K \geq 3$, με ισότητα για $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Δ3.15 ♦ Αφού $x \geq \frac{1}{2}$ και $y \geq \frac{1}{2}$ είναι $x + y \geq 1$ και

έτσι:

$$x + y + z \geq 1 + z \Leftrightarrow \frac{1}{1+z} \geq \frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{1+z} \geq \frac{x+y}{x+y+z}$$

Άρα:

$$E(x, y, z) = \frac{x+y}{1+z} + \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y} \geq$$

$$\geq \frac{x+y}{x+y+z} + \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} = 2$$

♦ Είναι:

$$E(x, y, z) =$$

$$= \frac{x}{1+z} + \frac{y}{1+z} + \frac{y}{1+x} + \frac{z}{1+x} + \frac{z}{1+y} + \frac{x}{1+y} \leq$$

$$\leq \frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} + \frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+x} + \frac{z}{z+y} + \frac{x}{x+y} =$$

$$= \left(\frac{x}{x+z} + \frac{z}{x+z}\right) + \left(\frac{y}{y+z} + \frac{z}{y+z}\right) + \left(\frac{y}{y+x} + \frac{x}{y+x}\right) =$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

διότι για παράδειγμα:

$$x + z \leq 1 + z, \quad y + z \leq 1 + z, \quad x + y \leq 1 + x$$

$$x + y \leq 1 + y, \quad y + z \leq 1 + y, \quad z + x \leq 1 + x$$

Δ3.16 α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{15} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} = 1$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{31} < \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = 1$$

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{63} < \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32} = 1$$

$$\frac{1}{64} + \frac{1}{65} + \dots + \frac{1}{127} < \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{64} = 1$$

$$\frac{1}{128} + \frac{1}{129} + \dots + \frac{1}{255} < \frac{1}{128} + \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{128} = 1$$

$$\frac{1}{256} + \frac{1}{257} + \dots + \frac{1}{511} < \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{256} = 1$$

$$\frac{1}{512} + \frac{1}{513} + \dots + \frac{1}{1023} < \frac{1}{512} + \frac{1}{512} + \dots + \frac{1}{512} = 1$$

$$\frac{1}{1024} + \frac{1}{1025} + \dots + \frac{1}{2047} < \frac{1}{1024} + \frac{1}{1024} + \dots + \frac{1}{1024} = 1$$

β) Αφού:

$$x^4 + y^2 \geq 2x^2y > 0 \quad \text{και} \quad y^4 + x^2 \geq 2y^2x > 0$$

παίρνουμε:

$$\frac{1}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2x^2y} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{x}{2x^2y} \quad \text{ή}$$

$$\frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2xy} \quad (1)$$

$$\frac{1}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{2y^2x} \quad \text{ή} \quad \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{y}{2y^2x} \quad \text{ή}$$

$$\frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{2yx} \quad (2)$$

Οι ανισότητες (1) και (2) έχουν την ίδια φορά, οπότε προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2yx} \quad \text{ή}$$

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$$

Για να ισχύει η ισότητα στο ερώτημα (α), πρέπει:

$$x^2 - y = 0 \quad \text{και} \quad y^2 - x = 0$$

Πρέπει επομένως $x^2 = y$ και $y^2 = x$.

Η πρώτη σχέση δίνει:

$$(x^2)^2 = y^2 \quad \text{ή} \quad x^4 = y^2 \quad \text{ή} \quad x^4 = x \quad \text{ή}$$

$$x^4 - x = 0 \quad \text{ή} \quad x(x^3 - 1) = 0 \quad \text{ή}$$

$$x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Η τελευταία σχέση ισχύει μόνο αν $x = 1$. Άρα θα είναι:

$$x = 1 \quad \text{και} \quad y = 1$$

Εναλλακτικά, οι $x^2 = y$, $y^2 = x$ δίνουν:

$$x^3 = y^3, \quad \text{οπότε} \quad x = y$$

Άρα $x = y = 1$.

Αντίστοιχα και για το ερώτημα (β).

Δ3.17 Αρκεί:

$$x^6 + y^6 \geq x^4y^2 + x^2y^4 \quad \text{ή}$$

$$x^4(x^2 - y^2) - y^4(x^2 - y^2) \geq 0 \quad \text{ή}$$

$$(x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2) \geq 0, \quad \text{που ισχύει}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x^2 - y^2 = 0$, δηλαδή αν $x = y$.

Δ3.18 α) Αρκεί τελικά:

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

β) Αρκεί τελικά $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0$, που ισχύει.

γ) Είναι $\alpha^2 + 1^2 \geq 2\alpha$, οπότε:

$$\alpha^2 + 2007\alpha + 1 \geq 2\alpha + 2007\alpha = 2009\alpha$$

Όμοια $\beta^2 + 2007\beta + 1 \geq 2009\beta$. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη.

δ) Αρκεί:

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \beta^4 &\geq 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) \quad \text{ή} \\ (\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2) - 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) &\geq 0 \quad \text{ή} \\ (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) &\geq 0 \quad \text{ή} \\ (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) &\geq 0 \quad \text{ή} \\ (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha - \beta)^2 &\geq 0, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

ΣΤΕΡΓΙΟΥ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ