1 Σύνολα

Θεωρία και εφαρμογές

Α. Η έννοια του συνόλου

Α. α) Ο ορισμός του συνόλου, σύμφωνα με τον G. Cantor, είναι ο εξής:

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα που αποτελούν το σύνολο λέγονται **στοιχεία** ή **μέλη**.

β) Τα σύνολα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού ή λατινικού αλφάβητου. Για παράδειγμα A, B, Q, R, A_1, A_2 κ.λπ.

Β. Έστω ένα σύνολο Α και ένα στοιχείο x του συνόλου αυτού. Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του Α, γράφουμε $\mathbf{x \in A}$, ενώ για να δηλώσουμε ότι το y δεν είναι στοιχείο του Α, γράφουμε $\mathbf{y \notin A}$.

Το σύμβολο «∈» διαβάζεται **«ανήκει»**, ενώ το σύμβολο «∉» διαβάζεται **«δεν ανήκει»**.

Γ. Ορισμένα γνωστά και βασικά σύνολα που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά είναι τα εξής:

- $\mathbb{N}$: το σύνολο των **φυσικών** αριθμών $0, 1, 2, \ldots$
- $\mathbb{Z}$: το σύνολο των **ακέραιων** αριθμών $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $\mathbb{Q}$: το σύνολο των **ρητών** αριθμών.
- $\mathbb{R}$: το σύνολο των **πραγματικών** αριθμών.

Με $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$ και $\mathbb{R}^*$ συμβολίζουμε τα σύνολα που προκύπτουν από τα προηγούμενα, αν εξαιρέσουμε τον αριθμό μηδέν. Έτσι:

- $x \in \mathbb{R}^* \iff x \neq 0$
- $\nu \in \mathbb{N}^* \iff \nu \neq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$
- $\rho \in \mathbb{Q}^* \iff \rho \neq 0$ και $\rho \in \mathbb{Q}$
- $\kappa \in \mathbb{Z}^* \iff \kappa \neq 0$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$

Εφαρμογή 1.1

Να γραφούν συμβολικά οι προτάσεις:

α) Ο αριθμός -7 είναι ακέραιος.

β) Ο αριθμός 5 είναι φυσικός.

γ) Ο αριθμός $\sqrt{3}$ δεν είναι ρητός.

δ) Ο αριθμός $\frac{2}{3}$ είναι πραγματικός.

<u>Λυση</u>

Σύμφωνα με τα προηγούμενα γράφουμε:

α) $-7 \in \mathbb{Z}$ **β)** $5 \in \mathbb{N}$

γ) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ **δ)** $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$

Εφαρμογή 1.2

Ποιες από τις παρακάτω ιδιότητες (προτάσεις) ορίζουν σύνολο;

α) Οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί.

β) Οι μήνες του έτους.

γ) Οι μεγάλοι αριθμοί.

δ) Οι ωραίες κοπέλες του σχολείου.

<u>Λυση</u>

α) Η ιδιότητα «ο πραγματικός αριθμός x είναι αρνητικός» μάς οδηγεί με βεβαιότητα σε συγκεκριμένους αριθμούς, τους αρνητικούς, και έτσι η ιδιότητα αυτή ορίζει σύνολο.

β) Πρόκειται για το σύνολο με στοιχεία τους μήνες του έτους, που είναι οι:

Ιανουάριος, Φεβρουάριος, … , Νοέμβριος, Δεκέμβριος

Έτσι και αυτή η ιδιότητα ορίζει σύνολο.

γ), δ) Ποιος αριθμός είναι μεγάλος και ποιος μικρός; Ποια κοπέλα είναι ωραία και ποια όχι; Δεν υπάρχει συγκεκριμένη απάντηση. Για τον λόγο αυτό η ιδιότητα (γ), όπως και η (δ), δεν ορίζουν σύνολο.

Β. Παράσταση συνόλων

Ένα σύνολο παριστάνεται:

α) Με αναγραφή των στοιχείων του

Έτσι το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ αποτελείται από τους πρώτους 9 θετικούς ακεραίους.

Τονίζουμε ότι:

- Κάθε στοιχείο αναγράφεται μόνο μία φορά.
- Τα στοιχεία ξεχωρίζουν μεταξύ τους με κόμμα (,) .

Σημειώνουμε ότι:

- Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών γράφεται:
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
- Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών γράφεται:
$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}$$

β) Με περιγραφή των στοιχείων του

Αν από ένα σύνολο αναφοράς Ω επιλέξουμε εκείνα τα στοιχεία του που έχουν μια ιδιότητα Ι, τότε δημιουργούμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:

$$\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$$

Για παράδειγμα, το σύνολο των θετικών ακεραίων παριστάνεται με $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

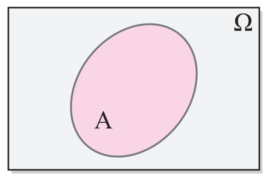
Τα πιο σημαντικά σύνολα είναι:

- $\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ φυσικός αριθμός}\}$
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ ακέραιος}\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{\mu}{\nu}, \text{ με } \mu \in \mathbb{Z},\ \nu \in \mathbb{Z}^*\right\}$

γ) Με διάγραμμα Venn

Τα διαγράμματα Venn αποτελούν μια απλή εποπτική παράσταση των συνόλων, η οποία είναι συχνά πολύ χρήσιμη. Σύμφωνα με το διάγραμμα Venn:

- Το βασικό σύνολο Ω συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου.
- Τα σύνολα που τα στοιχεία τους προέρχονται από το Ω (λέγονται και υποσύνολα του Ω), παριστάνονται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου (σύνολο Α).



Εφαρμογή 1.3

Να παρασταθεί με αναγραφή και περιγραφή των στοιχείων του το σύνολο των ψηφίων του δεκαδικού συστήματος.

Λύση

Τα ψηφία είναι τα $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Επομένως με αναγραφή των στοιχείων τα ψηφία ορίζουν το σύνολο:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Με περιγραφή των στοιχείων το σύνολο Α γράφεται:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\} \quad \text{ή} \quad A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ είναι ψηφίο}\}$$

Εφαρμογή 1.4

Να παρασταθεί με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο:

$$\mathbf{A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+3)(x^2-3x-10) = 0\}}$$

Λύση

Το σύνολο Α αποτελείται από τις λύσεις της εξίσωσης:

$$(x+3)(x^2-3x-10) = 0$$

Όμως:

$$(x+3)(x^2-3x-10) = 0 \iff$$

$$\iff (x+3 = 0 \;\text{ ή }\; x^2-3x-10 = 0) \iff$$

$$\iff (x = -3 \;\text{ ή }\; x = -2 \;\text{ ή }\; x = 5)$$

διότι η εξίσωση 2ου βαθμού $x^2-3x-10=0$ έχει ρίζες τις:

$$x_1 = -2 \quad \text{και} \quad x_2 = 5$$

Άρα $A = \{-3, -2, 5\}$.

> Για τη λύση εξισώσεων της μορφής $A(x)\cdot B(x) = 0$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα:
> $\alpha\cdot\beta = 0 \iff (\alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0)$

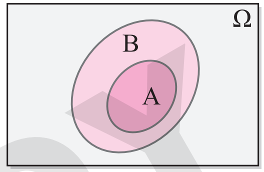
> - $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
> - $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$
> - $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Γ. Υποσύνολο συνόλου

Α. Δύο σύνολα Α και Β λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Γράφουμε τότε ότι $A = B$.

> Έτσι, όταν δύο σύνολα Α και Β είναι ίσα, τότε:
> - Κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.
> - Κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α.

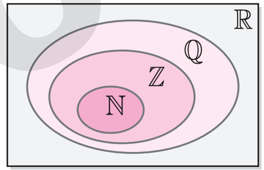
Β. α) Έστω δύο σύνολα Α και Β.



> Λέμε ότι το Α είναι **υποσύνολο** του Β, και γράφουμε:
> $$A \subseteq B$$
> όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

β) Για τα γνωστά μας σύνολα ισχύει ότι:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$



Η σχέση αυτή φαίνεται πιο καλά στο διπλανό διάγραμμα Venn.

γ) Για τα υποσύνολα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

> - $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο Α.
> - Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.
> - Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

Γ. Το σύνολο, το οποίο δεν έχει καθόλου στοιχεία λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με $\varnothing$ ή $\{\,\}$.

Αξίζει να τονίσουμε ότι για κάθε σύνολο Α είναι $\varnothing \subseteq A$. Επομένως το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Εφαρμογή 1.5

Δίνονται τα σύνολα:

- $\mathbf{A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 3\}}$
- $\mathbf{B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2-4)(x^2-x)(x+1) = 0\}}$

α) Να γραφούν τα σύνολα Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους.

β) Να αποδειχθεί ότι $A \subseteq B$.

Λύση

α) Επειδή $x \in \mathbb{Z}$, δηλαδή ο x είναι ακέραιος και $-1 \leq x < 3$, θα είναι:

$$x = -1 \;\text{ ή }\; x = 0 \;\text{ ή }\; x = 1 \;\text{ ή }\; x = 2$$

Επομένως $A = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Ας γράψουμε τώρα το B με αναγραφή των στοιχείων του. Για να λύσουμε την εξίσωση:

$$(x^2-4)(x^2-x)(x+1)=0$$

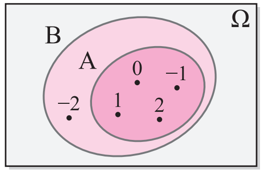
παίρνουμε χωριστά τον κάθε παράγοντα:

Αν $\theta > 0$ τότε:
$x^2=\theta \iff \left(x=\sqrt{\theta} \text{ ή } x=-\sqrt{\theta}\right)$

- $x^2-4=0 \iff x^2=4 \iff$
  $\iff (x=2 \text{ ή } x=-2)$
- $x^2-x=0 \iff x(x-1)=0 \iff$
  $\iff (x=0 \text{ ή } x=1)$
- $x+1=0 \iff x=-1$

Άρα $B=\{-2,-1,0,1,2\}$.

β) Για να είναι $A\subseteq B$, πρέπει κάθε στοιχείο του A να είναι και στοιχείο του B. Πράγματι αυτό συμβαίνει, όπως δείχνει και το διπλανό διάγραμμα του Venn. Επομένως το A είναι υποσύνολο του B, δηλαδή $A\subseteq B$.



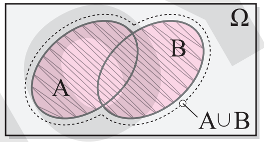
Δ. Πράξεις με σύνολα

Έστω Ω ένα βασικό σύνολο και A, B υποσύνολα του Ω. Με τα σύνολα A και B μπορούμε να κάνουμε τις εξής πράξεις:

α) Ένωση $A\cup B$

Είναι $\mathbf{A\cup B=\{x\in\Omega \mid x\in A \text{ ή } x\in B\}}$.

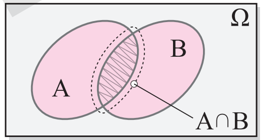
Έτσι, η ένωση δύο συνόλων αποτελείται από τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των συνόλων αυτών.



β) Τομή $A\cap B$

Είναι $\mathbf{A\cap B=\{x\in\Omega \mid x\in A \text{ και } x\in B\}}$.

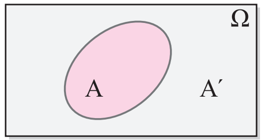
Έτσι, η τομή δύο συνόλων αποτελείται μόνο από τα κοινά στοιχεία των συνόλων αυτών.



γ) Συμπλήρωμα A'

Είναι $\mathbf{A'=\{x\in\Omega \mid x\notin A\}}$.

Έτσι, το συμπλήρωμα του A αποτελείται από τα στοιχεία του Ω τα οποία δεν ανήκουν στο A.



Για παράδειγμα, αν $\Omega=\mathbb{Z}$ και $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x \text{ άρτιος}\}$, τότε:

$$A'=\{x\in\mathbb{Z} \mid x \text{ όχι άρτιος}\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x \text{ περιττός}\}$$

δηλαδή το A' είναι το σύνολο των περιττών ακέραιων αριθμών.

Εφαρμογή 1.6

Δίνονται τα σύνολα:

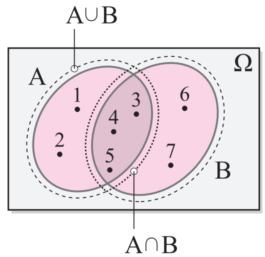
$$\mathbf{A=\{1,2,3,4,5\} \quad και \quad B=\{3,4,5,6,7\}}$$

Να οριστούν τα σύνολα:

α) $A\cup B$ **β) $A\cap B$**

Να παρασταθούν τα $A\cup B$, $A\cap B$ με διάγραμμα Venn.

Λύση



α) Η ένωση $A\cup B$ των συνόλων A, B αποτελείται από τα **κοινά και μη κοινά** στοιχεία των συνόλων αυτών. Άρα:

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

β) Η τομή $A\cap B$ των συνόλων A, B αποτελείται μόνο από τα **κοινά** στοιχεία των A και B. Επομένως:

$$A\cap B=\{3,4,5\}$$

Ε. Συνεπαγωγή - Ισοδυναμία

Α. Αν P, Q είναι δύο προτάσεις, τότε η πρόταση:

$$\mathbf{P \Longrightarrow Q}$$

λέγεται **συνεπαγωγή**. Λέμε στην περίπτωση αυτή ότι η πρόταση P συνεπάγεται την Q.

Η πρόταση $P \Longrightarrow Q$ διαβάζεται επίσης και ως:

« Αν P, τότε Q »

Η πρόταση P λέγεται **υπόθεση** της συνεπαγωγής $P \Longrightarrow Q$ και η Q λέγεται **συμπέρασμα**. Η συνεπαγωγή $P \Longrightarrow Q$, αποδίδεται με τις ταυτόσημες εκφράσεις:

- η πρόταση Q είναι **αναγκαία συνθήκη** για να ισχύει η P

και

- η πρόταση P είναι **ικανή συνθήκη** για να ισχύει η Q

Αυτό όμως που έχει τη μεγαλύτερη σημασία στην συνεπαγωγή $(P \Longrightarrow Q)$ είναι το ερώτημα «πότε μια συνεπαγωγή είναι αληθής;».

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η συνεπαγωγή $P \Longrightarrow Q$ είναι πάντα αληθής, εκτός από την περίπτωση που η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδής πρόταση. Επομένως:

Ο συλλογισμός στον οποίο από αληθή πρόταση συμπεραίνουμε μια ψευδή πρόταση είναι ψευδής, ενώ είναι αληθής σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Αξίζει επίσης να τονίσουμε ότι οι συλλογισμοί στους οποίους από ψευδή υπόθεση συμπεραίνουμε μια άλλη ψευδή ή αληθή πρόταση, θεωρείται αληθής.

Έτσι, για παράδειγμα, οι προτάσεις «Αν $2>5$, τότε $10>6$» και «Αν $3>7$, τότε $1>5$» είναι αληθείς προτάσεις (εννοούμε τις συνεπαγωγές και όχι το συμπέρασμα των συνεπαγωγών), διότι και στις δύο αυτές προτάσεις οι υποθέσεις «$2>5$» και «$3>7$» είναι ψευδείς προτάσεις.

Έστω ότι η συνεπαγωγή $P \Longrightarrow Q$ είναι αληθής. Σε αυτή την περίπτωση:
- Αν η P είναι αληθής, τότε θα είναι αληθής και η Q.
- Αν η Q είναι ψευδής, τότε και η P είναι ψευδής.

Β. Από δύο προτάσεις P και Q μπορούμε να δημιουργήσουμε μια νέα πρόταση που τη λέμε **ισοδυναμία** και τη συμβολίζουμε με $\mathbf{P \Longleftrightarrow Q}$.

Η ισοδυναμία είναι μια αληθής πρόταση στις εξής δύο περιπτώσεις:
- Όταν οι προτάσεις P και Q είναι και οι δύο αληθείς.
- Όταν οι προτάσεις P και Q είναι και οι δύο ψευδείς.

Στις άλλες περιπτώσεις η ισοδυναμία $P \Longleftrightarrow Q$ είναι ψευδής.

Την πρόταση $P \Longleftrightarrow Q$ τη διαβάζουμε ορισμένες φορές και ως **«P αν και μόνο αν Q»**.

Ας τονίσουμε επίσης ότι:
- Αν $P \Longleftrightarrow Q$, τότε ($P \Longrightarrow Q$ και $Q \Longrightarrow P$).
- Αν ($P \Longrightarrow Q$ και $Q \Longrightarrow P$), τότε $P \Longleftrightarrow Q$.

Για να ισχύει λοιπόν μια ισοδυναμία $P \Longleftrightarrow Q$, πρέπει και αρκεί η P να συνεπάγεται την Q και η Q να συνεπάγεται την P.

Για παράδειγμα, οι προτάσεις P: «$\alpha=\beta$» και Q: «$\alpha+\gamma=\beta+\gamma$» είναι ισοδύναμες, διότι η P συνεπάγεται την Q και η Q συνεπάγεται την P, αφού:

«Αν $\alpha=\beta$, τότε $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$» και αντιστρόφως, «αν $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, τότε $\alpha=\beta$»

Για τον λόγο αυτόν γράφουμε $P \Longleftrightarrow Q$, δηλαδή ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha=\beta \Longleftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$$

Εφαρμογή 1.7

Να εξεταστεί για κάθε τιμή των μεταβλητών τους ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς.

α) $\alpha^2=16 \Longrightarrow \alpha=4$ **β)** $\alpha\neq 3 \Longrightarrow \alpha^2\neq 9$

γ) $\alpha>2 \Longrightarrow \alpha^2>4$ **δ)** $x<3 \Longrightarrow x^2<9$

Λύση

α) Η συνεπαγωγή είναι ψευδής. Αν $\alpha=-4$, η υπόθεση $(\alpha^2=16)$ είναι αληθής, ενώ το συμπέρασμα $\alpha=4$ είναι ψευδής πρόταση (αφού $\alpha=-4$).

β) Η συνεπαγωγή είναι ψευδής, αφού για $\alpha=-3$ η υπόθεση είναι αληθής $(-3\neq 3)$, ενώ το συμπέρασμα είναι ψευδής πρόταση $(\alpha^2=(-3)^2=9)$.

γ) Η συνεπαγωγή είναι αληθής. Αφού $\alpha>2$, θα είναι $\alpha>0$ και έτσι από την $\alpha>2$ παίρνουμε ότι $\alpha^2>4$.

δ) Η συνεπαγωγή είναι ψευδής. Για παράδειγμα, η υπόθεση $x<3$ είναι αληθής για $x=-4$, ωστόσο $x^2=(-4)^2=16>9$, που σημαίνει ότι το συμπέρασμα $x^2<9$ είναι ψευδής πρόταση.

Εφαρμογή 1.8

Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω ισοδυναμίες είναι αληθείς και ποιες ψευδείς.

α) $\alpha^2=4 \Longleftrightarrow (\alpha=2$ ή $\alpha=-2)$ **β)** $\alpha\beta=0 \Longleftrightarrow (\alpha=0$ ή $\beta=0)$

γ) $\alpha>\beta \Longleftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$ **δ)** $2<1 \Longleftrightarrow 5<3$

ε) $\alpha>2 \Longleftrightarrow \alpha^2>4$

Λύση

α) Η πρόταση $\alpha^2=4 \Longleftrightarrow (\alpha=2$ ή $\alpha=-2)$ είναι αληθής, διότι:

$$\alpha^2=4 \Longrightarrow (\alpha=2 \text{ ή } \alpha=-2) \quad \text{και} \quad (\alpha=2 \text{ ή } \alpha=-2) \Longrightarrow \alpha^2=4$$

β) Η πρόταση $\alpha\beta=0 \Longleftrightarrow (\alpha=0$ ή $\beta=0)$ είναι αληθής.

γ) Η πρόταση (ισοδυναμία) $\alpha>\beta \Longleftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$ είναι αληθής.

δ) Αν και οι προτάσεις $2<1$ και $5<3$ είναι ψευδείς, η ισοδυναμία $2<1 \Longleftrightarrow 5<3$ είναι αληθής πρόταση.

ε) Η συνεπαγωγή $\alpha > 2 \Longrightarrow \alpha^2 > 4$ είναι αληθής, ενώ η $\alpha^2 > 4 \Longrightarrow \alpha > 2$ είναι ψευδής. Για παράδειγμα, αν $\alpha = -3$, ισχύει ότι $\alpha^2 > 4$, ενώ δεν ισχύει η $\alpha > 2$, αφού $-3 < 2$. Άρα η ισοδυναμία $\alpha > 2 \Longleftrightarrow \alpha^2 > 4$ είναι ψευδής πρόταση.

Ζ. Η άρνηση μιας πρότασης

Συχνά στα Μαθηματικά είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε την άρνηση μιας πρότασης. Την άρνηση μιας πρότασης P τη διαβάζουμε **«όχι P»** και τη συμβολίζουμε με $\overline{\mathrm{P}}$ ή ακόμα και με **~P**.

P	**όχι P** $(\overline{\mathrm{P}})$
Α	Ψ
Ψ	Α

Στον πίνακα παρατηρούμε ότι αν η P είναι αληθής (Α), τότε η άρνησή της, δηλαδή η όχι P $(\overline{\mathrm{P}})$, είναι ψευδής (Ψ). Ενώ αν η P είναι ψευδής, τότε η άρνησή της είναι αληθής. Αξίζει να επισημάνουμε ορισμένες περιπτώσεις που φαίνονται στη συνέχεια.

Πρόταση	**Άρνηση**
P ή Q	όχι P και όχι Q
P και Q	όχι P ή όχι Q
$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$	P και όχι Q
$\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q}$	P και όχι Q ή Q και όχι P
για κάθε $x \in \mathrm{A}$, ισχύει $\mathrm{P}(x)$	υπάρχει $x \in \mathrm{A}$, ώστε όχι $\mathrm{P}(x)$
υπάρχει $x \in \mathrm{A}$, ώστε $\mathrm{P}(x)$	για κάθε $x \in \mathrm{A}$, ισχύει όχι $\mathrm{P}(x)$

Η άρνηση λοιπόν της πρότασης «κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές» είναι «υπάρχει τρίγωνο που δεν είναι ισοσκελές» και η άρνηση της πρότασης «υπάρχει αριθμός που είναι άρρητος» είναι «κάθε αριθμός είναι ρητός».

Εφαρμογή 1.9

Να γραφεί η άρνηση των παρακάτω ισχυρισμών.

α) Ο αριθμός 2 είναι άρτιος.

β) Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος του 3.

γ) $\boldsymbol{\alpha = 3}$ **ή** $\boldsymbol{\alpha = 5}$**.**

δ) $\boldsymbol{x = 3}$ **και** $\boldsymbol{y \neq 4}$**.**

ε) Κάθε δεκαδικός αριθμός είναι ρητός.

στ) Αν το υ είναι ύψος ενός τριγώνου, τότε είναι και διάμεσος.

Λύση

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως, η άρνηση των δοσμένων προτάσεων διατυπώνεται ως εξής:

α) «Ο αριθμός 2 δεν είναι άρτιος», δηλαδή «ο αριθμός 2 είναι περιττός».

β) «Ο αριθμός α είναι μικρότερος ή ίσος του 3».

γ) «$\alpha \neq 3$ και $\alpha \neq 5$». Ας σημειώσουμε με έμφαση, ότι ο σύνδεσμος «ή» γίνεται «και».

δ) «$x \neq 3$ ή $y = 4$». Σημειώνουμε ότι στην άρνηση ο σύνδεσμος «και» γίνεται «ή».

ε) «Υπάρχει δεκαδικός αριθμός, που δεν είναι ρητός», δηλαδή «υπάρχει δεκαδικός αριθμός, που είναι άρρητος».

στ) «Το υ είναι ύψος του τριγώνου, αλλά δεν είναι διάμεσος». Θυμίζουμε ότι η άρνηση της «$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$» είναι «P και όχι Q».

Η. Μέθοδοι απόδειξης

Η1. Μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής

Η μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής στηρίζεται στην ισοδυναμία:

$$(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \Longleftrightarrow (\overline{\mathrm{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathrm{P}})$$

Αν λοιπόν θέλουμε να αποδείξουμε μια συνεπαγωγή $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ και η συνεπαγωγή αυτή έχει δυσκολίες, προσπαθούμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

$$\text{όχι Q} \Longrightarrow \text{όχι P} \quad (\overline{\mathrm{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathrm{P}})$$

Αν για παράδειγμα έχουμε την πρόταση Α: «$\alpha = \beta \Longrightarrow \gamma = \delta$», σύμφωνα με τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής η πρόταση Α είναι ισοδύναμη με την πρόταση:

$$\mathrm{B}: «\gamma \neq \delta \Longrightarrow \alpha \neq \beta»$$

Με το ίδιο σκεπτικό έχουμε ότι:

$$«\alpha^2 = 4 \Longrightarrow (\alpha = 2 \text{ ή } \alpha = -2)» \Longleftrightarrow «(\alpha \neq 2 \text{ και } \alpha \neq -2) \Longrightarrow \alpha^2 \neq 4»$$

Εφαρμογή 1.10

Να βρεθεί μια ισοδύναμη πρόταση με την εξής: «Αν δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές».

Λύση

Μια ισοδύναμη πρόταση με τη συνεπαγωγή $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ είναι η «όχι $\mathrm{Q} \Longrightarrow$ όχι P», δηλαδή $\overline{\mathrm{Q}} \Longrightarrow \overline{\mathrm{P}}$.

Άρα μια ισοδύναμη πρόταση με την προηγούμενη είναι η εξής:

«Αν ένα τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες του ανά δύο είναι άνισες».

Η2. Μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο

Η μέθοδος αυτή είναι τεράστιας σημασίας σε όλα τα επίπεδα των Μαθηματικών και χρησιμοποιούνταν συχνά από τους Αρχαίους Έλληνες.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, αν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση (ισχυρισμό) Ρ, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

- Υποθέτουμε ότι η πρόταση Ρ δεν ισχύει. Αφού δεν ισχύει η πρόταση Ρ, θα ισχύει η άρνησή της $\overline{\text{P}}$ (όχι Ρ).
- Με τη βοήθεια της $\overline{\text{P}}$ και άλλων γνωστών προτάσεων, προσπαθούμε ακολουθώντας λογικά και ορθά επιχειρήματα, να καταλήξουμε σε μια αντίφαση, δηλαδή σε **άτοπο**.
- Έχοντας καταλήξει σε άτοπο, συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει η άρνηση της Ρ, δηλαδή η $\overline{\text{P}}$, οπότε αναγκαστικά θα ισχύει η Ρ.

Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει μια πρόταση, δηλαδή ότι ισχύει η άρνησή της, και με αληθείς προτάσεις φτάσουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίφαση με αυτό που γνωρίζουμε, τότε λέμε ότι οδηγηθήκαμε σε **άτοπο**. Αυτή είναι η μέθοδος της **απαγωγής σε άτοπο**.

- Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο για την απόδειξη της συνεπαγωγής $\text{P} \Longrightarrow \text{Q}$, δεχόμαστε ως αληθή την Ρ και υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η Q. Στη συνέχεια προσπαθούμε να καταλήξουμε σε άτοπο.

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

$$\alpha^2 < 9 \Longrightarrow \alpha < 3$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ισχύει η $\alpha^2 < 9$ και δεν ισχύει η $\alpha < 3$. Αφού δεν ισχύει η $\alpha < 3$, θα ισχύει η $\alpha \geq 3$. Αλλά τότε, σύμφωνα με τις ιδιότητες της διάταξης, θα ισχύει και $\alpha^2 \geq 3^2$, δηλαδή $\alpha^2 \geq 9$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι $\alpha^2 < 9$. Άρα πραγματικά ισχύει ότι:

$$\alpha^2 < 9 \Longrightarrow \alpha < 3$$

Εφαρμογή 1.11

Αν ο αριθμός α είναι ρητός και ο αριθμός β είναι άρρητος, τότε ο αριθμός $\alpha + \beta$ είναι άρρητος.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, ότι δηλαδή ο $\alpha + \beta$ δεν είναι άρρητος. Επομένως ο αριθμός $\alpha + \beta$ είναι ρητός. Τότε όμως και ο αριθμός $(\alpha + \beta) - \alpha = \beta$ είναι ρητός, διότι η διαφορά δύο ρητών είναι ρητός αριθμός. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι από την υπόθεση ο αριθμός β είναι άρρητος.

Άρα ο αριθμός $\alpha + \beta$ είναι αναγκαστικά άρρητος.

Εφαρμογή 1.12

Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι ακέραιοι, να αποδειχθεί ότι ο αριθμός:

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

είναι άρτιος.

Απόδειξη

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Έστω ότι ο αριθμός $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$ είναι περιττός. Τότε όμως όλοι οι παράγοντες $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$, $\gamma + \alpha$ θα είναι περιττοί (διότι αν κάποιος ήταν άρτιος, τότε και το γινόμενο θα ήταν άρτιος). Έτσι το άθροισμα των τριών αυτών αριθμών, δηλαδή ο αριθμός:

$$(\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

θα πρέπει να είναι περιττός, διότι το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών είναι πάντα περιττός. Όμως ο αριθμός $2(\alpha + \beta + \gamma)$ είναι άρτιος, αφού έχει τη μορφή 2λ, όπου $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$ και ο λ είναι ακέραιος. Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο.

Άρα ο αριθμός $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$ είναι άρτιος.

Σχόλιο

Ανάμεσα στους αριθμούς α, β, γ υπάρχουν ή δύο τουλάχιστον που είναι άρτιοι ή δύο τουλάχιστον που είναι περιττοί. Το άθροισμα όμως των δύο άρτιων ή περιττών αυτών αριθμών είναι άρτιος και έτσι το γινόμενο $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$ είναι άρτιος.

Θυμίζουμε ότι αν ένας τουλάχιστον παράγοντας ενός γινομένου ακέραιων αριθμών είναι άρτιος, τότε το γινόμενο είναι άρτιος αριθμός.

Η3. Η μέθοδος των ισοδυναμιών

Συχνά, όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση Ρ, προσπαθούμε με διαδοχικούς μετασχηματισμούς να καταλήξουμε σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό Q, που είναι όμως αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και η αρχική πρόταση είναι αληθής.

Αν λοιπόν θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \iff$$
$$\iff \alpha^3+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2 \iff$$
$$\iff \alpha^3+\beta^3=\alpha^3+\beta^3$$

Η τελευταία όμως πρόταση είναι αληθής, οπότε και η αρχική πρόταση (ταυτότητα) είναι αληθής.

Ασκήσεις για εξάσκηση

1.13 **α)** Πώς διαβάζονται οι εκφράσεις $x \in A$ και $x \notin A$;

β) Με ποιους τρόπους παριστάνεται ένα σύνολο Α;

γ) Πότε δύο σύνολα λέγονται ίσα;

δ) Πότε ένα σύνολο Α λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου Β και πώς συμβολίζουμε το γεγονός αυτό;

ε) Ποιο σύνολο λέγεται κενό και πώς συμβολίζεται;

στ) Πώς ορίζεται η τομή και η ένωση δύο συνόλων και πώς το συμπλήρωμα ενός συνόλου Α; Να κάνετε τα σχετικά διαγράμματα Venn.

1.14 Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λανθασμένοι (Λ).

α) Η ιδιότητα «οι κρύες νύχτες του Δεκέμβρη του έτους 2004» ορίζει σύνολο.

β) Για να δηλώσουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{5}$ δεν είναι ρητός, γράφουμε $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

γ) Ισχύει ότι:

$$5 \in \mathbb{N},\quad -3 \in \mathbb{Z},\quad \frac{7}{2} \in \mathbb{Q},\quad 0{,}9999\ldots \in \mathbb{Q},$$
$$\sqrt{5} \notin \mathbb{N},\quad -7 \notin \mathbb{N}$$

δ) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

ε) Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

στ) Το σύνολο $\{\varnothing\}$ είναι κενό σύνολο.

ζ) Υπάρχει σύνολο που ως στοιχείο περιέχει και τον εαυτό του.

η) Ισχύει ότι $\{\ \} \subseteq \varnothing$.

θ) Ισχύει ότι:

- $A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$
- $A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$

ι) Για δύο τυχαία σύνολα Α και Β ισχύει ότι:

$$A \cup B \subseteq A \quad \text{και} \quad B \subseteq A \cap B$$

1.15 Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα που ακολουθούν:

α) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2+x-6)(x^2-9)(x^2+4)=0\}$

β) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2-3x-10)(x^4-2x^2+1)=0\}$

Να βρείτε το σύνολο $A \cap B$ και να το γράψετε με περιγραφή.

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

1.16 Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

α) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{δεν ορίζεται η παράσταση}\\ K = \dfrac{x-1}{x^2-2x-3}\end{array} \right\}$

β) $B = \left\{ \alpha \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{ο αριθμός } K = \dfrac{\alpha^2-5}{\alpha}\\ \text{είναι ακέραιος}\end{array} \right\}$

1.17 Δίνεται το σύνολο:

$$A = \left\{ \nu \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{3\nu+4}{2} \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{με} \quad \nu \le 5$$

Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Α.

1.18 Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 7-|x-2| \ge 3\} \quad \text{και}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2|+1 > 5\}$$

Να βρείτε το σύνολο $A \cap B$ και να το γράψετε με περιγραφή.

1.19 Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{1, 3, 5, 6\} \quad \text{και} \quad B = \{2, 3, 4, 6, 7\}$$

Να βρείτε τα σύνολα:

α) $A \cap B$ **β)** $A \cup B$

1.20 Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

α) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2-1)(x+2)(x-3)=0\}$

β) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1|+2|1-x^2|=0\}$

1.21 Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2-4)(x+1)(x^3-64)=0\}$$

και

$$B = \{y \in \mathbb{R} \mid (y-2)(y^2-9)(y^2-16)=0\}$$

Να βρείτε τα σύνολα:

α) $A \cup B$ **β)** $A \cap B$

Συμπληρωματικές ασκήσεις

1.22 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \le x \le 10\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \le x < 2\}$

$\Gamma = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ άρτιος και } x < 15\}$

$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathbb{N} \mid x \text{ λύση της εξίσωσης} \\ x^2+x-2=0 \end{array} \right\}$

$E = \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathbb{N} \mid x \text{ λύση της εξίσωσης} \\ x^2+3x+2=0 \end{array} \right\}$

1.23 Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

α) $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ **β)** $B = \{1, 3, 5, \ldots, 31\}$

γ) $\Gamma = \{\mu, \alpha, \theta, \eta, \tau, \iota, \kappa\}$

δ) $\Delta = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, \ldots, 100\}$

1.24 Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{-3, 0, 3\}, \quad B = \{-3, 3\}$$
$$\Gamma = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \quad \Delta = \{0, 1, 2, 3\}$$

καθώς και τα σύνολα:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ λύση της εξίσωσης } x^2 = 9\}$$
$$Y = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \le x \le 3\}$$

α) Να βρείτε ποια από τα παραπάνω σύνολα είναι ίσα μεταξύ τους.

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους και με διαγράμματα Venn τα σύνολα:

i) $A \cup B$ **ii)** $A \cap B$

iii) $\Gamma \cap \Delta$ **iv)** $A \cap \Delta$

1.25 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα που ακολουθούν:

α) $A=\{(x, y)\mid x, y\in\mathbb{N} \text{ και } x+y=5\}$

β) $B=\{(x, y)\mid x, y\in\mathbb{N} \text{ και } y-x=2\}$

1.26 Δίνεται το σύνολο:

$$\Omega=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

Θεωρούμε τα σύνολα:

$$A=\{x\in\Omega\mid x<7\} \quad \text{και}$$
$$B=\{x\in\Omega\mid x>3\}$$

α) Να παραστήσετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους.

β) Να κάνετε το διάγραμμα Venn για τα σύνολα A και B.

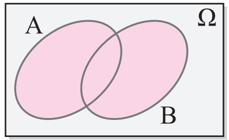
γ) Να βρείτε τα σύνολα:

$$A\cup B,\ A\cap B,\ A',\ B',\ A\cap B',\ A'\cap B,$$
$$A'\cap B',\ A'\cup B'$$

δ) Να επαληθεύσετε τις σχέσεις:

$$(A\cup B)'=A'\cap B' \quad \text{και} \quad (A\cap B)'=A'\cup B'$$

1.27 Στο διπλανό διάγραμμα Venn να σημειώσετε ποιο μέρος αντιπροσωπεύουν τα σύνολα:

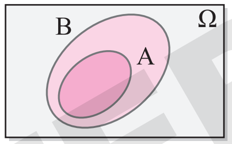


α) $A\cup B$ **β)** $A\cap B$ **γ)** $(A\cup B)'$

δ) A' **ε)** B' **στ)** $A\cap B'$

ζ) $A'\cap B$ **η)** $(A\cap B')\cup(A'\cap B)$

1.28 Δίνονται τα σύνολα A, B με $A\subseteq B$. Με τη βοήθεια των διαγραμμάτων Venn να αποδείξετε ότι:



α) $A\cap B=A$ **β)** $A\cup B=B$

γ) $A\cap B'=\varnothing$ **δ)** $B'\subseteq A'$

1.29 Θεωρούμε τα σύνολα:

$$A=\left\{\begin{matrix}\text{οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου}\\ \text{που παίζουν ποδόσφαιρο}\end{matrix}\right\}$$

$$B=\left\{\begin{matrix}\text{οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου}\\ \text{που παίζουν μπάσκετ}\end{matrix}\right\}$$

Σε ποιο σύνολο ανήκει ένας μαθητής που:

α) παίζει και μπάσκετ και ποδόσφαιρο;

β) παίζει τουλάχιστον ένα από τα δύο αθλήματα;

γ) παίζει μπάσκετ και δεν παίζει ποδόσφαιρο;

δ) παίζει ποδόσφαιρο και δεν παίζει μπάσκετ;

ε) δεν παίζει κανένα από τα δύο αθλήματα;

στ) παίζει μόνο μπάσκετ ή μόνο ποδόσφαιρο;

1.30 Δίνονται τα σύνολα:

$$A=\{\text{μαθητές ενός γυμνασίου}\},$$
$$B=\{\text{παίκτες μιας ομάδας ποδοσφαίρου}\}$$

Τι συμπεραίνετε για εκείνον που ανήκει σε καθένα από τα παρακάτω σύνολα;

α) $A\cup B$ **β)** $A\cap B$ **γ)** A'

δ) B' **ε)** $A'\cap B$ **στ)** $A\cap B'$

ζ) $A'\cap B'$ **η)** $(A\cup B)'$

1.31 Δίνονται τα σύνολα:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ \begin{matrix}\text{το κλάσμα } K=\dfrac{x-1}{x^2-3x-4}\\ \text{δεν ορίζεται}\end{matrix}\right\} \quad \text{και}$$

$$B=\{x\in\mathbb{R}\mid (x^2-1)(x^2-5x+4)=0\}$$

Να αποδείξετε ότι $A\subseteq B$.

1.32 Δίνονται τα σύνολα:

$$A=\left\{x\in\mathbb{N}^*\ \middle|\ \frac{x+10}{x}\in\mathbb{N}^*\right\} \quad \text{και}$$

$$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid (x^2+4)(x^2-6x+5)=0\}$$

α) Να ορίσετε τα σύνολα:

i) $A\cap B$ **ii)** $A\cup B$

β) Να εξετάσετε αν $A\subseteq B$ ή $B\subseteq A$.

1.33 Να εξετάσετε αν οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ) για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α, β, γ.

α) $\alpha=3 \Longrightarrow \alpha^2=9$ **β)** $\alpha^2=2\alpha \Longrightarrow \alpha=2$

γ) $\beta^2\neq 3\beta \Longrightarrow \beta\neq 3$ **δ)** $\gamma\neq 5 \Longrightarrow \gamma^2\neq 25$

ε) $\alpha\neq 3 \Longleftrightarrow \alpha^2\neq 9$ **στ)** $\beta^2\neq 4 \Longrightarrow \beta\neq -2$

ζ) $\alpha\neq 4 \Longrightarrow \alpha^2\neq 16$ **η)** $\alpha^2\neq 25 \Longrightarrow \alpha\neq 5$

1.34 Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς (Α) και ποιοι ψευδείς (Ψ) για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α, β, γ.

α) $\alpha>3 \Longrightarrow \alpha^2>9$

β) $\beta<4 \Longrightarrow \beta^2<16$

γ) $\gamma^2<25 \Longrightarrow \gamma<5$

δ) $\alpha^2>25 \Longleftrightarrow \alpha>5$

ε) $(\alpha>2 \text{ και } \beta>3) \Longrightarrow \alpha\beta>6$

στ) $(\beta<4 \text{ και } \gamma<5) \Longrightarrow \beta\gamma<20$

ζ) $(\alpha\neq 2 \text{ και } \beta\neq 3) \Longrightarrow \alpha\beta\neq 6$

η) $(\alpha\neq 2 \text{ και } \beta\neq 3) \Longrightarrow \alpha+\beta\neq 5$

1.35 Να εξετάσετε αν οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ) για κάθε τιμή των αριθμών α, β, γ.

α) $(\alpha-3)^2>0$ και $(\alpha+1)^2>0$

β) $\beta\neq 5 \Longleftrightarrow \beta^2\neq 25$

γ) $\alpha\beta=0 \Longleftrightarrow (\alpha=0 \text{ ή } \beta=0)$

δ) $\beta\gamma\neq 0 \Longleftrightarrow (\beta\neq 0 \text{ και } \gamma\neq 0)$

ε) $(\alpha>0 \text{ και } \beta>0) \Longleftrightarrow \alpha\beta>0$

στ) $(\gamma^2=9 \text{ και } \gamma<0) \Longleftrightarrow \gamma=-3$

ζ) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$

η) $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)^2$

1.36 Να αντιστοιχίσετε καθέναν από τους ισχυρισμούς της ομάδας Α με τον ισοδύναμό του ισχυρισμό της ομάδας Β.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1. $x(x-3)=0$	**α.** $x=-6$ ή $x=6$
2. $x(x-5)\neq 0$	**β.** $x=3$
3. $x^2=36$	**γ.** $x=2$
4. $x^2=9$ και $x>0$	**δ.** $x\neq 0$ και $x\neq 5$
5. $x(x-4)=0$ και $x(x+1)=0$	**ε.** $x=3$ ή $x=0$
6. $\lvert x-2\rvert=0$	**στ.** $x=0$

1.37 Να διατυπώσετε την άρνηση των παρακάτω προτάσεων.

α) Κάθε ακέραιος αριθμός είναι άρτιος.

β) Δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α με:

$$\alpha^2=-4$$

γ) Υπάρχει αριθμός α με $\alpha>2$.

δ) Για κάθε α, β ισχύει ότι $\alpha=2$ και $\beta=4$.

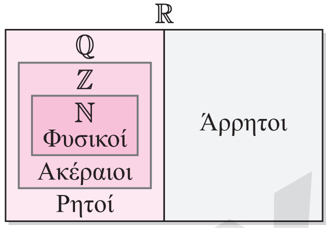
ε) Υπάρχει ακέραιος αριθμός που διαιρεί τον 7.

2 Οι πραγματικοί αριθμοί: Πράξεις και ιδιότητες

Θεωρία και εφαρμογές

Α1. Οι πραγματικοί αριθμοί

Οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά του λυκείου λέγονται πραγματικοί. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$. Οι πραγματικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο μεγάλα σύνολα:



- Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών.
- Το σύνολο των άρρητων αριθμών.

Ρητοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β είναι ακέραιοι αριθμοί με $\beta \neq 0$.

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός και αντιστρόφως: Κάθε δεκαδικός αριθμός ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός είναι ρητός, δηλαδή μπορεί να πάρει την κλασματική μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\beta \neq 0$.

Παραδείγματα:

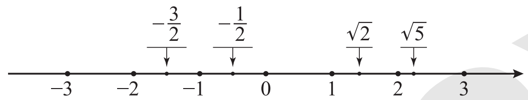
- Οι αριθμοί $3,\ -7,\ \frac{2}{9},\ -\frac{3}{5}$ είναι ρητοί.
- Οι αριθμοί:

i) 0,52 ii) 2,7131 iii) −6,4252525

είναι ρητοί.

- Οι αριθμοί 0,3333… και 2,728282828… είναι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί, οπότε είναι ρητοί.
- Οι αριθμοί $\sqrt{2},\ \sqrt{7},\ -\sqrt{7}$, 1,010010001… , είναι άρρητοι.

Θυμίζουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν σε έναν άξονα, που λέγεται άξονας των πραγματικών αριθμών.



Εφαρμογή 2.1

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

α) -7 **β)** $+10$ **γ)** $\frac{3}{8}$ **δ)** $-\frac{7}{13}$ **ε)** $\sqrt{7}$ **στ)** $-\sqrt{13}$

ζ) $\sqrt{25}$ **η)** $-\sqrt{144}$ **θ)** 0,2222… **ι)** 2,353535… **ια)** 3,4151515…

Λύση

α) Ο αριθμός -7 είναι ρητός και μάλιστα είναι ακέραιος. Ας παρατηρήσουμε ότι:

$$-7 = \frac{-7}{1}$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha = -7$ και $\beta = 1$.

β) Ο αριθμός $+10$ είναι ρητός και μάλιστα είναι φυσικός (αλλά και ακέραιος).

γ) Ο αριθμός $\frac{3}{8}$ είναι ρητός και μάλιστα θετικός.

δ) Ο αριθμός $-\frac{7}{13}$ είναι ρητός και μάλιστα αρνητικός.

ε), στ) Οι αριθμοί $\sqrt{7}$ και $-\sqrt{13}$ είναι άρρητοι αριθμοί, διότι οι αριθμοί 7 και 13 δεν είναι τετράγωνα φυσικών αριθμών.

ζ), η) Επειδή $\sqrt{25} = 5$ και $-\sqrt{144} = -\sqrt{12^2} = -12$, οι αριθμοί $\sqrt{25}$ και $-\sqrt{144}$ είναι ρητοί.

θ) Ο αριθμός $x = 0{,}2222\ldots$ είναι περιοδικός δεκαδικός αριθμός (με περίοδο 2), οπότε είναι ρητός. Μπορούμε να γράψουμε:

$$x = 0{,}222\ldots = 0{,}\overline{2} = \frac{2}{9}$$

ι) Ο αριθμός:

$$x = 2{,}353535\ldots$$

έχει περίοδο 35, οπότε είναι ρητός. Μπορούμε να γράψουμε:

$$x = 2{,}\overline{35} = 2 + \frac{35}{99} = \frac{233}{99}$$

Μετατροπή περιοδικού σε κλάσμα

- $0{,}\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{9}$
- $0{,}\alpha\overline{\beta} = \frac{\alpha\beta - \alpha}{90}$
- $0{,}\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_3} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2}{900}$
- $0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\overline{\alpha_4} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3}{9000}$
- $0{,}\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_3\alpha_4\alpha_5} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 - \alpha_1\alpha_2}{99900}$

Η παύλα δείχνει την περίοδο.

ια) Ο αριθμός $x = 3{,}4151515\ldots$ είναι περιοδικός δεκαδικός αριθμός με περίοδο 15. Είναι:

$$x = 3{,}4\overline{15} = \frac{3415-34}{990} = \frac{3381}{990}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι στον παρονομαστή βάζουμε τόσα «9», όσα ψηφία έχει η περίοδος και στο τέλος τόσα μηδενικά, όσα είναι τα ψηφία από την υποδιαστολή μέχρι την περίοδο.

Μπορούμε λοιπόν αντιστοίχως να γράψουμε:

- $7{,}2567567\ldots = 7{,}\overline{2567} =$

  $= \dfrac{72567-72}{9990} = \dfrac{72495}{9990}$

- $2{,}456121212\ldots = 2{,}\underbrace{456}_{3\ \text{ψηφία}}\overline{12} =$

  $= \dfrac{245612-2456}{99\underbrace{000}_{3\ \text{ψηφία}}} = \dfrac{243156}{99000}$

Γενικός τύπος

$$\alpha,\underbrace{\beta_1\beta_2\ldots\beta_\rho}_{\rho}\,\underbrace{\overline{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_\nu}}_{\nu} = \frac{\alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_\rho\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_\nu - \alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_\rho}{\underbrace{999\ldots9}_{\nu}\,\underbrace{000\ldots0}_{\rho}}$$

Α2. Πράξεις - Ιδιότητες στο $\mathbb{R}$

Α. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζεται η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός. Με τη βοήθεια αυτών ορίζεται η αφαίρεση και η διαίρεση.

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος αριθμού	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

- Ο αριθμός 0 λέγεται ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το 1 ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, αφού:

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha \quad \text{και} \quad \alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$$

για κάθε πραγματικό αριθμό α.

- Η αφαίρεση και η διαίρεση στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζονται ως εξής:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta) \quad \text{και} \quad \alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta},\ \beta\neq 0$$

Β. α) Στα δύο μέλη μιας ισότητας μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό:

$$\alpha=\beta \iff \alpha+\gamma=\beta+\gamma$$

Η ιδιότητα αυτή λέγεται **ιδιότητα της διαγραφής για την πρόσθεση**.

β) Τα δύο μέλη μιας ισότητας μπορούμε να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό:

$$\text{Αν } \gamma\neq 0, \text{ τότε } \alpha=\beta \iff \alpha\gamma=\beta\gamma$$

Η ιδιότητα:

$$\alpha\gamma=\beta\gamma \implies \alpha=\beta,\ \text{όπου } \gamma\neq 0$$

λέγεται **ιδιότητα της διαγραφής για τον πολλαπλασιασμό**.

Επειδή δεν υπάρχει διαίρεση με το 0, τονίζουμε ότι στη διαγραφή πρέπει ο διαγραφόμενος παράγοντας να είναι διάφορος του μηδενός.

γ) Το γινόμενο δύο ή περισσότερων πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς αυτούς είναι ίσος με το μηδέν:

$$\alpha\beta=0 \iff (\alpha=0 \text{ ή } \beta=0)$$

Από την ιδιότητα αυτή παίρνουμε ότι:

$$\alpha\beta\neq 0 \iff (\alpha\neq 0 \text{ και } \beta\neq 0)$$

Εφαρμογή 2.2

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\mathbf{A=-(\alpha-2\beta)-[-(-2\alpha+\beta)+2(\beta-2\alpha)]}$

β) $\mathbf{B=-2(3\beta-\alpha)-[3(2\alpha-\beta)-2(\beta+2\alpha)-1]}$

γ) $\mathbf{\Gamma=2(-\alpha+\beta+\gamma)-[3(\beta-\gamma)+2(\gamma-\alpha)+3\gamma]}$

Λύση

α) Απαλείφουμε τις παρενθέσεις από μέσα προς τα έξω:

$$\begin{aligned} A &= -(\alpha-2\beta)-\left[-(-2\alpha+\beta)+2(\beta-2\alpha)\right]= \\ &= -\alpha+2\beta-\left[+2\alpha-\beta+2\beta-4\alpha\right]= \\ &= -\alpha+2\beta-2\alpha+\beta-2\beta+4\alpha=\alpha+\beta \end{aligned}$$

β) Ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράφει το σχόλιο, εκτελώντας τις πράξεις με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\begin{aligned} B &= -2(3\beta-\alpha)-\left[3(2\alpha-\beta)-2(\beta+2\alpha)-1\right]= \\ &= -6\beta+2\alpha-\left[6\alpha-3\beta-2\beta-4\alpha-1\right]= \\ &= -6\beta+2\alpha-6\alpha+3\beta+2\beta+4\alpha+1=1-\beta \end{aligned}$$

γ)
$$\begin{aligned} \Gamma &= 2(-\alpha+\beta+\gamma)-\left[3(\beta-\gamma)+2(\gamma-\alpha)+3\gamma\right]= \\ &= -2\alpha+2\beta+2\gamma-\left[3\beta-3\gamma+2\gamma-2\alpha+3\gamma\right]= \\ &= -2\alpha+2\beta+2\gamma-3\beta+3\gamma-2\gamma+2\alpha-3\gamma=-\beta \end{aligned}$$

> Για την απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων πρέπει να έχουμε υπόψιν τα εξής:
>
> **1.** Ισχύει ότι:
> $$-(\alpha-\beta)=-\alpha+\beta \quad \text{και}$$
> $$(\alpha-\beta)=\alpha-\beta$$
> Έτσι, για να παραλείψουμε μια παρένθεση που μπροστά έχει το σύμβολο $(-)$, αλλάζουμε το πρόσημο όλων των όρων που περιέχονται σε αυτή.
>
> **2.** Αν υπάρχουν παρενθέσεις, αγκύλες ή άγκιστρα, τότε η εξαγωγή των παρενθέσεων γίνεται –εφόσον είναι δυνατόν– από μέσα προς τα έξω.

Εφαρμογή 2.3

Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $A=\dfrac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{3}{4}}\cdot\dfrac{\frac{11}{5}}{\frac{4}{3}}$ **β)** $B=\left(2-\dfrac{3-\frac{5}{2}}{2+\frac{1}{2}}\right):\left(4-\dfrac{3+\frac{2}{3}}{3-\frac{4}{3}}\right)$

Λύση

α) $A=\dfrac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{3}{4}}\cdot\dfrac{\frac{11}{5}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{\frac{3+2}{3}}{\frac{8+3}{4}}\cdot\dfrac{3\cdot 11}{4\cdot 5}=\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{11}{4}}\cdot\dfrac{3\cdot 11}{4\cdot 5}=$

$=\dfrac{4\cdot 5}{3\cdot 11}\cdot\dfrac{3\cdot 11}{4\cdot 5}=\dfrac{4\cdot 5\cdot 3\cdot 11}{3\cdot 11\cdot 4\cdot 5}=1$

β) Επειδή οι όροι της παράστασης Β είναι επίσης αριθμητικές παραστάσεις, είναι προτιμότερο να απλοποιήσουμε ξεχωριστά τον αριθμητή από τον παρονομαστή. Έχουμε:

- $2-\dfrac{3-\frac{5}{2}}{2+\frac{1}{2}}=2-\dfrac{\frac{3\cdot 2-5}{2}}{\frac{2\cdot 2+1}{2}}=2-\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=2-\dfrac{1\cdot 2}{2\cdot 5}=$

  $=2-\dfrac{1}{5}=\dfrac{10-1}{5}=\dfrac{9}{5}$

> **Σύνθετο κλάσμα**
>
> - $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\dfrac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$
> - $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma}=\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{1}}=\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}$
> - $\dfrac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}}=\dfrac{\frac{\alpha}{1}}{\frac{\beta}{\gamma}}=\dfrac{\alpha\gamma}{\beta}$
> - $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\dfrac{\alpha}{\beta}:\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\delta}{\gamma}$

- $4-\dfrac{3+\frac{2}{3}}{3-\frac{4}{3}}=4-\dfrac{\frac{3\cdot 3+2}{3}}{\frac{3\cdot 3-4}{3}}=4-\dfrac{\frac{11}{3}}{\frac{5}{3}}=4-\dfrac{11\cdot 3}{3\cdot 5}=4-\dfrac{11}{5}=\dfrac{20-11}{5}=\dfrac{9}{5}$

Άρα θα είναι:

$$B=\frac{9}{5}:\frac{9}{5}=1$$

Εφαρμογή 2.4

Δίνεται ο αριθμός $A(x)=(x-1)(2-x)(6+2x)$.

α) Για ποιες τιμές του x είναι $A(x)=0$;

β) Να βρεθούν οι τιμές του x, ώστε $A(x)\neq 0$.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του x, ώστε ο $A(x)$ να έχει αντίστροφο.

Λύση

α) Για να είναι ένα γινόμενο μηδέν, πρέπει και αρκεί ένας τουλάχιστον από τους παράγοντές του να είναι ίσος με μηδέν. Επομένως:

$$\begin{aligned} &A(x)=0 \iff \\ &\iff (x-1)(2-x)(6+2x)=0 \iff \\ &\iff (x-1=0 \ \text{ή}\ 2-x=0 \ \text{ή}\ 6+2x=0) \iff \\ &\iff (x=1 \ \text{ή}\ x=2 \ \text{ή}\ 2x=-6) \iff \\ &\iff (x=1 \ \text{ή}\ x=2 \ \text{ή}\ x=-3) \end{aligned}$$

> **Βασική ιδιότητα**
>
> - $\alpha\beta=0 \iff$
> $\iff (\alpha=0 \ \text{ή}\ \beta=0)$
> - $\alpha\beta\gamma=0 \iff$
> $\iff (\alpha=0 \ \text{ή}\ \beta=0 \ \text{ή}\ \gamma=0)$
>
> Για να είναι λοιπόν ένα γινόμενο ίσο με μηδέν, αρκεί ένας τουλάχιστον από τους παράγοντές του να είναι ίσος με το μηδέν.

β) Για να είναι ένα γινόμενο διάφορο του μηδενός, πρέπει και αρκεί κάθε παράγοντάς του να είναι διαφορετικός από το μηδέν. Έτσι:

$$\begin{aligned} &A(x)\neq 0 \iff (x-1)(2-x)(6+2x)\neq 0 \iff \\ &\iff (x-1\neq 0 \ \text{και}\ 2-x\neq 0 \ \text{και}\ 6+2x\neq 0) \iff \\ &\iff (x\neq 1 \ \text{και}\ x\neq 2 \ \text{και}\ x\neq -3) \end{aligned}$$

> - Για να έχει ένας αριθμός α αντίστροφο, πρέπει $\alpha\neq 0$.
> - Για να είναι $\alpha\beta=0$ πρέπει:
> $\alpha=0 \ \text{ή}\ \beta=0$
> - Ισχύει ότι:
> $\alpha\beta\neq 0 \iff (\alpha\neq 0 \ \text{και}\ \beta\neq 0)$

Είναι προφανές ότι η απάντηση μπορεί να δοθεί αμέσως, από τη στιγμή που έχει απαντηθεί το πρώτο ερώτημα.

γ) Για να έχει ένας αριθμός αντίστροφο, πρέπει αυτός να είναι διαφορετικός από το μηδέν. Επομένως ο $A(x)$ έχει αντίστροφο, μόνο αν:

$$x\neq 1 \quad \text{και} \quad x\neq 2 \quad \text{και} \quad x\neq -3$$

Β. Ιδιότητες των δυνάμεων

Α. α) Έστω α ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας φυσικός αριθμός. Τότε ορίζουμε:

$$\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu-\text{παράγοντες}}=\alpha^{\nu}$$

Ο α λέγεται **βάση** και ο ν **εκθέτης** της δύναμης α^{ν}.

β) Ισχύει επιπλέον ότι:

- $\alpha^0=1$, όπου $\alpha\neq 0$
- $\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$, όπου $\alpha\neq 0$

γ) Αν $\alpha=\beta$, τότε $\alpha^{\kappa}=\beta^{\kappa}$ για κάθε ακέραιο αριθμό κ. (Αν ο κ είναι αρνητικός, τότε πρέπει $\alpha,\beta\neq 0$.)

δ) Για τη δύναμη ενός κλάσματος ισχύει η ιδιότητα:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$$

Β. α) Οι σημαντικότερες ιδιότητες για τις δυνάμεις με **ακέραιο εκθέτη** είναι οι παρακάτω:

- $\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$
- $\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu-\nu}$
- $(\alpha\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}\beta^{\nu}$, $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
- $(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\nu}$

β) Υπενθυμίζουμε ότι:

$$(-\alpha)^{2\nu}=\alpha^{2\nu}\quad\text{και}\quad(-\alpha)^{2\nu+1}=-\alpha^{2\nu+1}$$

Για παράδειγμα:

- $(-2)^4=2^4=16$, διότι ο εκθέτης 4 είναι άρτιος
- $(-2)^5=-2^5=-32$, διότι ο εκθέτης 5 είναι περιττός

Αξίζει να τονίσουμε ότι $-\alpha^{2\nu}\neq(-\alpha)^{2\nu}$.

Για παράδειγμα είναι:

$$-2^4=-16\quad\text{και}\quad(-2)^4=16$$

Γ. Μια δύναμη μπορεί να αλλάζει θέση από τον αριθμητή στον παρονομαστή ενός κλάσματος ή αντίστροφα, αρκεί να αλλάζουμε το πρόσημο του εκθέτη της δύναμης:

$$\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{-\lambda}}=\alpha^{\kappa}\beta^{\lambda}\quad\text{ή}\quad\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{-\lambda}}=\frac{1}{\alpha^{-\kappa}\beta^{-\lambda}}\quad\text{ή}\quad\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{-\lambda}}=\frac{\beta^{\lambda}}{\alpha^{-\kappa}}$$

Εφαρμογή 2.5

Να γραφούν ως μία δύναμη οι παραστάσεις:

α) $A=\dfrac{8^7\cdot 32^4}{4^6\cdot 16^6}$ **β)** $B=\dfrac{9^6\cdot 27^5}{81^6}$

γ) $\Gamma=\dfrac{54^3\cdot 52^9}{26^9\cdot 2^3}$ **δ)** $\Delta=\dfrac{(4^{-2})^{-3}(8^{-3})^{-5}}{(16^{-4})^2(32^{-3})^{-4}}$

Λύση

α) Είναι:

$$A=\frac{8^7\cdot 32^4}{4^6\cdot 16^6}=\frac{(2^3)^7(2^5)^4}{(2^2)^6(2^4)^6}=\frac{2^{21}\cdot 2^{20}}{2^{12}\cdot 2^{24}}=\frac{2^{41}}{2^{36}}=2^5$$

β) Είναι:

$$B=\frac{9^6\cdot 27^5}{81^6}=\frac{(3^2)^6(3^3)^5}{(3^4)^6}=\frac{3^{12}\cdot 3^{15}}{3^{24}}=\frac{3^{27}}{3^{24}}=3^3$$

γ) Είναι:

$$\Gamma=\frac{54^3\cdot 52^9}{26^9\cdot 2^3}=\frac{54^3}{2^3}\cdot\frac{52^9}{26^9}=\left(\frac{54}{2}\right)^3\left(\frac{52}{26}\right)^9=27^3\cdot 2^9=$$
$$=(3^3)^3\cdot 2^9=3^9\cdot 2^9=(3\cdot 2)^9=6^9$$

δ) Είναι:

$$\Delta=\frac{(4^{-2})^{-3}(8^{-3})^{-5}}{(16^{-4})^2(32^{-3})^{-4}}=\frac{4^6\cdot 8^{15}}{16^{-8}\cdot 32^{12}}=\frac{(2^2)^6(2^3)^{15}}{(2^4)^{-8}(2^5)^{12}}=\frac{2^{12}\cdot 2^{45}}{2^{-32}\cdot 2^{60}}=\frac{2^{57}}{2^{28}}=2^{29}$$

Εφαρμογή 2.6

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=[(\alpha^2\beta^3)^{-2}(\alpha\beta^3)^4]:(\alpha^3:\beta^{-1})^{-3}\quad\text{και}\quad B=\frac{(\alpha^2\beta)^3(\alpha\beta^2)^{-2}(\beta^{-2})^3}{(\alpha\beta^3)^{-3}(\alpha^2\beta^4)^2(\beta^{-3})^3}$$

με $\alpha=2017$ και $\beta=2017^{-1}$.

Να αποδειχθεί ότι $A=1$ και $B=1$.

Λυση

Θα εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων. Είναι:

- $A = [(\alpha^2\beta^3)^{-2}(\alpha\beta^3)^4] : (\alpha^3 : \beta^{-1})^{-3} = [(\alpha^{-4}\beta^{-6})(\alpha^4\beta^{12})] : (\alpha^{-9} : \beta^3) =$

  $= (\alpha^{-4+4}\cdot\beta^{-6+12}) : (\alpha^{-9}\cdot\beta^{-3}) = (\alpha^0\beta^6)(\alpha^9\beta^3) = \alpha^9\beta^{6+3} =$

  $= \alpha^9\beta^9 = (\alpha\beta)^9 = (2017\cdot 2017^{-1})^9 = 1^9 = 1$

- $B = \dfrac{(\alpha^2\beta)^3(\alpha\beta^2)^{-2}(\beta^{-2})^3}{(\alpha\beta^3)^{-3}(\alpha^2\beta^4)^2(\beta^{-3})^3} = \dfrac{\alpha^6\beta^3\cdot\alpha^{-2}\beta^{-4}\cdot\beta^{-6}}{\alpha^{-3}\beta^{-9}\cdot\alpha^4\beta^8\cdot\beta^{-9}} = \dfrac{\alpha^4\beta^{-7}}{\alpha\beta^{-10}} =$

  $= \alpha^3\beta^{-7+10} = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = (2017\cdot 2017^{-1})^3 = 1^3 = 1$

Εφαρμογή 2.7

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 25^8\cdot 8^4$ και $\beta = (5^2)^3(4^3)^2$. Πόσα μηδενικά έχουν στο τέλος οι αριθμοί αυτοί;

Λυση

α) Για να βρούμε πόσα μηδενικά έχει στο τέλος ο αριθμός $\alpha = 25^8\cdot 8^4$, αρκεί να γράψουμε τον α στη μορφή $\beta\cdot 10^\nu$, όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$ και β ένας αριθμός που το τελευταίο ψηφίο του δεν είναι μηδέν.

Στην περίπτωση αυτή, που είναι δηλαδή $\alpha = \beta\cdot 10^\nu$, ο α τελειώνει σε ν μηδενικά. Είναι λοιπόν:

$$\alpha = 25^8\cdot 8^4 = (5^2)^8(2^3)^4 = 5^{16}\cdot 2^{12} = 5^4\cdot 5^{12}\cdot 2^{12} = 5^4(5\cdot 2)^{12} = 5^4\cdot 10^{12} = 625\cdot 10^{12}$$

Επομένως ο α τελειώνει σε 12 μηδενικά.

β) Για τον αριθμό $\beta = (5^2)^3(4^3)^2$ παρατηρούμε ότι:

$$\beta = (5^2)^3(4^3)^2 = 5^6\cdot 4^6 = (5\cdot 4)^6 = 20^6 = (2\cdot 10)^6 = 2^6\cdot 10^6 = 64\cdot 10^6$$

Άρα ο β τελειώνει σε 6 μηδενικά. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι:

$$\beta = 5^6\cdot 4^6 = 5^6(2^2)^6 = 5^6\cdot 2^{12} = 5^6\cdot 2^6\cdot 2^6 = (5\cdot 2)^6\cdot 2^6 = 2^6\cdot 10^6 = 64\cdot 10^6$$

Γ. Ταυτότητες

Α. α) Οι ταυτότητες είναι ισότητες που χρησιμοποιούνται για τη γρηγορότερη εκτέλεση πράξεων ή απλοποίηση παραστάσεων. Υπάρχει ένα μεγάλο πλήθος ταυτοτήτων και καθένας μπορεί να δημιουργήσει μία ακόμα. Οι πιο χρήσιμες όμως από αυτές είναι οι επόμενες:

- $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$
- $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$, $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

β) Σε ορισμένες περιπτώσεις χρήσιμες είναι και οι ταυτότητες:

- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2 + 2\alpha\beta$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta)$
- $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$
- $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2]$ *(Ταυτότητα Euler)*
- $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

Β. Ενώ οι προηγούμενες ταυτότητες ισχύουν για κάθε τιμή των μεταβλητών τους, υπάρχουν και ταυτότητες που ισχύουν όταν οι μεταβλητές τους υπόκεινται σε περιορισμούς. Τέτοιες ταυτότητες λέγονται «υπό συνθήκη». Από τις ταυτότητες υπό συνθήκη αξίζει να γνωρίζουμε τις εξής:

- Αν $\alpha+\beta+\gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.
- Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, τότε $\alpha+\beta+\gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$.

Εφαρμογή 2.8

Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες:

α) $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2 - 1) = 2$

β) $(\alpha+2\beta)^2 - (2\alpha-\beta)^2 - 3(\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta) = 2\alpha\beta$

γ) $(\alpha+2)^3 + (\alpha-2)^3 - 2\alpha(\alpha^2 + 10) = 4\alpha$

δ) $2(\alpha+\beta+\gamma)^2 - (\alpha+\beta)^2 - (\beta+\gamma)^2 - (\gamma+\alpha)^2 = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

Λυση

Για να αποδείξουμε μια ταυτότητα που έχει τη μορφή $A = B$, ακολουθούμε συνήθως έναν από τους εξής τρόπους:

- Ξεκινάμε από το α΄ μέλος και καταλήγουμε στο β΄ μέλος.
- Ξεκινάμε από το β΄ μέλος και καταλήγουμε στο α΄ μέλος.
- Υπολογίζουμε ξεχωριστά το κάθε μέλος και οδηγούμαστε στο ίδιο αποτέλεσμα Γ.
- Εργαζόμαστε συγχρόνως με ισοδυναμίες στην ισότητα $A = B$ και καταλήγουμε σε μία σχέση που ισχύει.

α) Εκτελούμε τις πράξεις στο α΄ μέλος:

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2-2(\alpha^2+\beta^2-1)=$$
$$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-2\alpha^2-2\beta^2+2=2$$

Οι υπόλοιποι όροι απλοποιούνται στην αναγωγή.

β) $(\alpha+2\beta)^2-(2\alpha-\beta)^2-3(\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta)=$
$=(\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2)-(4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2)-3\beta^2+3\alpha^2-6\alpha\beta=$
$=\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-4\alpha^2+4\alpha\beta-\beta^2-3\beta^2+3\alpha^2-6\alpha\beta=$
$=8\alpha\beta-6\alpha\beta=2\alpha\beta$

γ) $(\alpha+2)^3+(\alpha-2)^3-2\alpha(\alpha^2+10)=$
$=(\alpha^3+3\alpha^2\cdot 2+3\alpha\cdot 2^2+2^3)+(\alpha^3-3\alpha^2\cdot 2+3\alpha\cdot 2^2-2^3)-2\alpha^3-20\alpha=$
$=(\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+8)+(\alpha^3-6\alpha^2+12\alpha-8)-2\alpha^3-20\alpha=$
$=24\alpha-20\alpha=4\alpha$

δ) Επειδή $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$, παίρνουμε:

$$2(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2-(\beta+\gamma)^2-(\gamma+\alpha)^2=$$
$$=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)-(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2)-(\gamma^2+2\gamma\alpha+\alpha^2)=$$
$$=2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+4\alpha\beta+4\beta\gamma+4\gamma\alpha-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2-\beta^2-2\beta\gamma-\gamma^2-\gamma^2-2\gamma\alpha-\alpha^2=$$
$$=2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

Εφαρμογή 2.9

Αν $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1007$, να αποδειχθεί ότι:

$$2(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2-(\beta+\gamma)^2-(\gamma+\alpha)^2=2014$$

Λυση

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο μέλος μπορούν να γίνουν πολλές και ουσιαστικές πράξεις, όχι όμως και στο δεύτερο. Ξεκινάμε λοιπόν από το πρώτο μέλος. Είναι:

$$2(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2-(\beta+\gamma)^2-(\gamma+\alpha)^2=$$
$$=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)-(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2)-(\gamma^2+2\gamma\alpha+\alpha^2)=$$
$$=2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+4\alpha\beta+4\beta\gamma+4\gamma\alpha-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2-\beta^2-2\beta\gamma-\gamma^2-\gamma^2-2\gamma\alpha-\alpha^2=$$
$$=2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2\cdot 1007=2014$$

Επομένως η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Δ. Παραγοντοποίηση

Η παραγοντοποίηση μιας παράστασης, δηλαδή η μετατροπή της σε γινόμενο παραγόντων, έχει ξεχωριστή σημασία στην Άλγεβρα και γίνεται συνήθως με τους επόμενους τρόπους:

Α. Με κοινό παράγοντα

- $3x^2-6xy=3x(x-2y)$
- $-2x^4y+4x^3y^2-6x^2y=-2x^2y(x^2-2xy+3)$

Αν ο κοινός παράγοντας έχει πρόσημο πλην (−), τότε τα πρόσημα όλων των όρων της παρένθεσης αλλάζουν.

Β. Με ομάδες

- $\alpha x-\alpha y-2\beta x+2\beta y=\alpha(x-y)-2\beta(x-y)=(x-y)(\alpha-2\beta)$
- $(\alpha^2-2\alpha\beta)(x-1)+\beta^2x-\beta^2=(\alpha^2-2\alpha\beta)(x-1)+\beta^2(x-1)=$
  $=(x-1)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=(x-1)(\alpha-\beta)^2$

Τονίζουμε ότι η ομαδοποίηση γίνεται άλλοτε παίρνοντας το ίδιο πλήθος όρων και άλλοτε διαφορετικό πλήθος όρων στην κάθε ομάδα.

Γ. Με χρήση ταυτοτήτων

α) Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων:

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

παίρνουμε:

- $x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$
- $(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)=(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2$

β) Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα της διαφοράς κύβων:

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

έχουμε:

- $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$
- $27x^3 - y^3 = (3x)^3 - y^3 = (3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

γ) Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα του αθροίσματος κύβων:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

προκύπτει:

- $8x^3 + y^6 = (2x)^3 + (y^2)^3 = (2x + y^2)(4x^2 - 2xy^2 + y^4)$
- $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2)$

δ) Λαμβάνοντας υπόψη τις ταυτότητες του τέλειου τετραγώνου:

$$\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2$$

και του τέλειου κύβου:

$$\alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)^3$$

έχουμε:

- $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
- $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$
- $25x^4 + 10x^2 + 1 = (5x^2)^2 + 2 \cdot 5x^2 + 1 = (5x^2 + 1)^2$
- $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$

Δ. Με τη μικτή μέθοδο

α) Με διάσπαση ενός ή περισσότερων όρων.

- $\alpha^4 + 4\beta^4 - 5\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + 4\beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - 2\beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 =$
  $= (\alpha^2 - 2\beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 - 2\beta^2 + \alpha\beta)$

β) Με προσθαφαίρεση κάποιου όρου.

- $\alpha^4 + 4\beta^4 = \alpha^4 + 4\beta^4 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + 2\beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 =$
  $= (\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta)(\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta)$

Για την κατανόηση και την εμπέδωση των παραπάνω περιπτώσεων προτείνουμε στους μαθητές τη μελέτη των λυμένων θεμάτων και τη λύση των προτεινόμενων ασκήσεων.

Εφαρμογή 2.10

Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α) $A = \alpha^2 - 4\beta^2$ **β)** $B = x^3 - 8y^3$ **γ)** $\Gamma = \omega^6 + 27$

δ) $\Delta = x^4 - 8x^2 + 16$ **ε)** $E = x^4 - 9x^2 + 4(9 - x^2)$ **στ)** $K = x^4 + x^2 + 1$

Λυση

Θα χρησιμοποιήσουμε τις βασικές μεθόδους που περιγράψαμε στα σχόλια.

α) $A = \alpha^2 - 4\beta^2 = \alpha^2 - (2\beta)^2 = (\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta)$

β) $B = x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

γ) $\Gamma = \omega^6 + 27 = (\omega^2)^3 + 3^3 = (\omega^2 + 3)(\omega^4 - 3\omega^2 + 9)$

δ) $\Delta = x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2)^2 - 2x^2 \cdot 4 + 4^2 = (x^2 - 4)^2 = [(x-2)(x+2)]^2 =$
$= (x-2)^2(x+2)^2$

ε) $E = x^4 - 9x^2 + 4(9 - x^2) = x^2(x^2 - 9) - 4(x^2 - 9) = (x^2 - 9)(x^2 - 4) =$
$= (x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$

στ) $K = x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 =$
$= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

Εφαρμογή 2.11

Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α) $A = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32$ **β)** $B = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$

γ) $\Gamma = \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4$ **δ)** $\Delta = \alpha^4 + 4\beta^4$

Λυση

α) Θα χωρίσουμε τους όρους της παράστασης σε ομάδες. Επειδή υπάρχουν 4 όροι, επιχειρούμε να τους πάρουμε ανά δύο:

$$A = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 = x^3(x^2 - 4) - 8(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^3 - 8)$$

Όμως:

- $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$, με βάση την ταυτότητα:
$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$
- $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$, με βάση την ταυτότητα:
$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

Άρα $A = (x-2)^2(x+2)(x^2 + 2x + 4)$.

β) Ο χωρισμός σε ομάδες των δύο όρων δε φέρνει αμέσως αποτέλεσμα. Για τον λόγο αυτό χωρίζουμε την παράσταση σε δύο ομάδες των τριών όρων. Έτσι παίρνουμε:

$$B = (x^5 - 2x^4 + x^3) + (x^2 - 2x + 1) = x^3(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1) =$$
$$= (x^2 - 2x + 1)(x^3 + 1) = (x - 1)^2(x^3 + 1^3) =$$
$$= (x - 1)^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

γ) Στο ερώτημα αυτό τα πράγματα είναι πιο σύνθετα. Με προσεκτική παρατήρηση διαπιστώνουμε ότι αν είχαμε $\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4$, τότε η παράσταση θα ήταν το τέλειο τετράγωνο $(\alpha^2 + \beta^2)^2$. Για να συμβεί όμως αυτό πρέπει να έχουμε $2\alpha^2\beta^2$ και όχι $\alpha^2\beta^2$. Για τον λόγο αυτό προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $\alpha^2\beta^2$ και παίρνουμε:

$$\Gamma = \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + (\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2) + \beta^4 = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \alpha^2\beta^2 =$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$$

δ) Θα προσθέσουμε και θα αφαιρέσουμε κατάλληλο όρο:

$$\Delta = \alpha^4 + 4\beta^4 = (\alpha^2)^2 + (2\beta^2)^2 = (\alpha^2)^2 + (2\beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 =$$
$$= (\alpha^2 + 2\beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta)(\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta)$$

Άλλος τρόπος

Από την βοηθητική ταυτότητα:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

παίρνουμε:

$$\Delta = \alpha^4 + 4\beta^4 = (\alpha^2)^2 + (2\beta^2)^2 =$$
$$= (\alpha^2 + 2\beta^2)^2 - 2\alpha^2 \cdot 2\beta^2 =$$
$$= (\alpha^2 + 2\beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + 2\beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 =$$
$$= (\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta)(\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta)$$

Χρήσιμες ταυτότητες

- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

Ε1. Πεδίο ορισμού ρητής παράστασης

Α. Η διαίρεση με το μηδέν είναι αδύνατη. Για τον λόγο αυτό το μηδέν (0) είναι ο μόνος αριθμός που δεν έχει αντίστροφο. Αν κατά λάθος διαιρέσουμε με 0, θα καταλήξουμε σε αδιέξοδο.

Ένα κλάσμα $K = \frac{\alpha}{\beta}$ είναι στην πραγματικότητα η διαίρεση $\alpha : \beta$. Για να έχει λοιπόν νόημα το Κ, πρέπει $\beta \neq 0$.

Β. Αν μια παράσταση έχει ως όρους ένα ή περισσότερα κλάσματα, τότε πρέπει να θέσουμε περιορισμούς. Οι περιορισμοί αυτοί προκύπτουν αν απαιτήσουμε κάθε παρονομαστής (ακόμα και αν είναι παρονομαστής σε παρονομαστή) να είναι διάφορος του μηδενός.

Γ. Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\alpha\beta\gamma \neq 0 \iff (\alpha \neq 0 \;\text{ και }\; \beta \neq 0 \;\text{ και }\; \gamma \neq 0)$$

Επομένως για να είναι ένα γινόμενο διάφορο από το μηδέν, πρέπει **κάθε** όρος να είναι διάφορος από το μηδέν. Για παράδειγμα είναι:

$$2x(x - 1)(x + 3) \neq 0 \iff (x \neq 0 \;\text{ και }\; x \neq 1 \;\text{ και }\; x \neq -3)$$

Επίσης, από προηγούμενη τάξη, γνωρίζουμε ότι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \;\text{ με }\; \alpha \neq 0 \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\ \quad\text{και} \\ x_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \end{cases}, \;\text{ όπου }\; \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \;\text{ με }\; \Delta \geq 0$$

Με τους παραπάνω τύπους βρίσκουμε τις λύσεις κάθε εξίσωσης β΄ βαθμού, αρκεί να είναι $\Delta \geq 0$.

Δ. Συχνά, για να βρούμε πότε μια παράσταση Α(x) είναι διαφορετική από το μηδέν, βρίσκουμε πρώτα πότε αυτή είναι ίση με το μηδέν (λύνοντας την εξίσωση $A(x) = 0$) και τις τιμές που προκύπτουν τις απορρίπτουμε.

Αυτό σημαίνει ότι $A(x) \neq 0$ ακριβώς για κάθε τιμή του x που είναι διαφορετική από τις τιμές για τις οποίες είναι $A(x) = 0$.

Εφαρμογή 2.12

Δίνεται η παράσταση $A(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - x} - \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$.

Να βρεθούν οι τιμές του x, ώστε:

α) να ορίζεται η παράσταση Α(x),

β) $A(x) = \dfrac{4}{(x - 1)(x + 2)}$.

Λυση

α) Για να ορίζεται μια παράσταση που περιέχει κλάσματα, πρέπει όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι από το μηδέν.

Θέτουμε λοιπόν τους περιορισμούς:

$$x^2 - x \neq 0 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad x^2 - 4 \neq 0 \quad (2)$$

Όμως:

- $x^2 - x \neq 0 \iff x(x-1) \neq 0 \iff (x \neq 0 \text{ και } x - 1 \neq 0) \iff (x \neq 0 \text{ και } x \neq 1)$
- $x^2 - 4 \neq 0 \iff x^2 - 2^2 \neq 0 \iff (x-2)(x+2) \neq 0 \iff$
  $\iff (x - 2 \neq 0 \text{ και } x + 2 \neq 0) \iff (x \neq 2 \text{ και } x \neq -2)$

Επομένως για να ορίζεται η παράσταση Α, πρέπει:

$$x \neq 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq -2$$

Οι παραπάνω περιορισμοί γράφονται και με τη μορφή $x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 1, 2\}$.

β) Το κλάσμα $\dfrac{4}{(x-1)(x+2)}$ ορίζεται για $x \neq 1$ και $x \neq -2$, τιμές για τις οποίες ορίζεται και η παράσταση $A(x)$. Έτσι:

$$A(x) = \frac{4}{(x-1)(x+2)} \iff \frac{x+2}{x(x-1)} - \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{(x-1)(x+2)}$$

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π., που είναι το $x(x-1)(x-2)(x+2)$, και παίρνουμε:

$$(x-2)(x+2)^2 - x(x-1)^2 = 4x(x-2) \iff$$
$$\iff (x-2)(x^2+4x+4) - x(x^2-2x+1) = 4x^2 - 8x \iff$$
$$\iff x^3 + 4x^2 + 4x - 2x^2 - 8x - 8 - x^3 + 2x^2 - x = 4x^2 - 8x \iff$$
$$\iff 3x = 8 \iff x = \frac{8}{3}$$

Η τιμή αυτή είναι δεκτή, διότι δεν αντιτίθεται σε κανέναν περιορισμό.

Ε2. Ασκήσεις με αναλογίες

Α. α) Μια ισότητα ανάμεσα σε δύο κλάσματα $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ λέγεται αναλογία. Εννοείται ότι τα παραπάνω κλάσματα ορίζονται, δηλαδή $\beta \neq 0$ και $\delta \neq 0$.

β) Οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών είναι:

- $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma, \ \beta\delta \neq 0$
- $\dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta} \iff \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}, \ \beta\gamma\delta \neq 0$
- $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \iff \dfrac{\alpha+\beta}{\beta} = \dfrac{\gamma+\delta}{\delta}, \ \beta\delta \neq 0$
- $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \iff \dfrac{\alpha}{\beta+\alpha} = \dfrac{\gamma}{\delta+\gamma}, \ \beta\delta(\beta+\alpha)(\delta+\gamma) \neq 0$
- Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$, τότε $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}, \ \beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$

Β. Αν στα δεδομένα μιας άσκησης δίνεται μια αναλογία ή μια σχέση της μορφής:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

τότε ακολουθούμε τα επόμενα βήματα:

1. Θέτουμε $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\varepsilon}{\zeta} = \lambda$.

2. Γράφουμε $\dfrac{\alpha}{\beta} = \lambda \iff \alpha = \lambda\beta, \ \dfrac{\gamma}{\delta} = \lambda \iff \gamma = \lambda\delta, \ \dfrac{\varepsilon}{\zeta} = \lambda \iff \varepsilon = \lambda\zeta$.

3. Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των α, γ και ε στις δοσμένες σχέσεις της άσκησης και μετά τις απλοποιήσεις καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Εφαρμογή 2.13

Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \neq 1$, να αποδειχθεί ότι:

α) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2+\delta^2} = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ **β)** $\dfrac{(\alpha-\beta)^4}{(\gamma-\delta)^4} = \dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\gamma^4+\delta^4}$

Λύση

Επειδή έχουμε την αναλογία $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$, θέτουμε $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \lambda$. Έτσι προκύπτει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \lambda \iff \alpha = \lambda\beta \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta} = \lambda \iff \gamma = \lambda\delta$$

α) Είναι:

- $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2+\delta^2} = \dfrac{(\lambda\beta)^2+\beta^2}{(\lambda\delta)^2+\delta^2} = \dfrac{\lambda^2\beta^2+\beta^2}{\lambda^2\delta^2+\delta^2} = \dfrac{\beta^2(\lambda^2+1)}{\delta^2(\lambda^2+1)} = \dfrac{\beta^2}{\delta^2} \qquad (1)$
- $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = \dfrac{(\lambda\beta)\beta}{(\lambda\delta)\delta} = \dfrac{\lambda\beta^2}{\lambda\delta^2} = \dfrac{\beta^2}{\delta^2} \qquad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε τη ζητούμενη ισότητα.

β) Είναι:

- $\dfrac{(\alpha-\beta)^4}{(\gamma-\delta)^4} = \dfrac{(\lambda\beta-\beta)^4}{(\lambda\delta-\delta)^4} = \dfrac{[\beta(\lambda-1)]^4}{[\delta(\lambda-1)]^4} = \dfrac{\beta^4(\lambda-1)^4}{\delta^4(\lambda-1)^4} = \dfrac{\beta^4}{\delta^4} \quad (3),$ διότι $\lambda \neq 1$

- $\dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\gamma^4+\delta^4}=\dfrac{(\lambda\beta)^4+\beta^4}{(\lambda\delta)^4+\delta^4}=\dfrac{\beta^4(\lambda^4+1)}{\delta^4(\lambda^4+1)}=\dfrac{\beta^4}{\delta^4}$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{(\alpha-\beta)^4}{(\gamma-\delta)^4}=\dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\gamma^4+\delta^4}$, η οποία είναι και η προς απόδειξη σχέση.

Ζ1. Απλοποίηση κλασμάτων

α) Για να απλοποιήσουμε έναν όρο από τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος, πρέπει:

- Ο όρος αυτός να είναι διάφορος από το μηδέν.
- Ο όρος αυτός να είναι παράγοντας και στον αριθμητή και στον παρονομαστή.

Επομένως είναι:

- $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ και $\dfrac{\alpha^2\beta}{\alpha\beta^2\gamma}=\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma\neq 0)$
- $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x}{x+1}$, όπου $x\neq 1$ και $x\neq -1$

β) Υπενθυμίζουμε ότι $\alpha\beta\neq 0 \iff (\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0)$.

γ) Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα, πρέπει πρώτα να παραγοντοποιήσουμε τους όρους του, δηλαδή τον αριθμητή και τον παρονομαστή.

Προσοχή

Είναι $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}\neq\dfrac{\beta}{\gamma}$ και $\dfrac{\alpha\beta+\gamma}{\alpha}\neq\beta+\gamma$.

Εφαρμογή 2.14

Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

α) $\mathbf{A=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}}$ **β)** $\mathbf{B=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}}$

Λύση

α) Είναι:

$$A=\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{x^2-3^2}{x^2-3x}=$$
$$=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}$$

Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα:
- Παραγοντοποιούμε τους όρους του, δηλαδή τον αριθμητή και τον παρονομαστή.
- Διαγράφουμε σε αριθμητή και παρονομαστή μόνο τους κοινούς όρους.

Για να ορίζεται το κλάσμα A πρέπει $x\neq 0$ και $x\neq 3$. Έτσι:

$$A=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x}$$

β) Είναι $B=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}$. Για να ορίζεται το κλάσμα B πρέπει:

$$(x-2)(x+2)\neq 0 \iff (x\neq 2 \text{ και } x\neq -2)$$

Επομένως $B=\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x-2}{x+2}$.

Παρατηρήσεις

i) Αν η παραγοντοποίηση των όρων ενός κλάσματος είναι επίπονη, παραγοντοποιούμε πρώτα ξεχωριστά τους όρους αυτούς και τους αντικαθιστούμε στη συνέχεια.

ii) Οι περιορισμοί είναι προτιμότερο να γράφονται τη στιγμή που οι όροι του κλάσματος έχουν τη μορφή γινομένου, χωρίς ωστόσο αυτό να αποτελεί απαράβατο κανόνα.

Εφαρμογή 2.15

Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

α) $\mathbf{A=\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}+1}{\frac{\alpha^2}{\beta^2}-1}}$ **β)** $\mathbf{B=\dfrac{\frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{\frac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha}}}}$

Λύση

α) Το A είναι σύνθετο κλάσμα, του οποίου ο αριθμητής είναι η παράσταση $\lambda=\dfrac{\alpha}{\beta}+1$ και ο παρονομαστής είναι η παράσταση $\mu=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-1$. Επειδή οι παραστάσεις λ και μ δεν είναι κλάσματα, εκτελούμε τις πράξεις:

- $\lambda=\dfrac{\alpha}{\beta}+1=\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{1}{1}=\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}$
- $\mu=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-1=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{1}{1}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}=\dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\beta^2}$

Επομένως:

$$A=\frac{\frac{\alpha}{\beta}+1}{\frac{\alpha^2}{\beta^2}-1}=\frac{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}{\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\beta^2}}=\frac{\beta^2(\alpha+\beta)}{\beta(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=\frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

Οι περιορισμοί για να ορίζεται το κλάσμα A είναι:

$$\beta\neq 0,\quad \alpha\neq\beta \quad\text{και}\quad \alpha\neq -\beta$$

Σε περίπτωση που θέλουμε να απλοποιήσουμε σύνθετο κλάσμα, είναι προτιμότερο να παίρνουμε αριθμητή και παρονομαστή ξεχωριστά και να εκτελούμε πρώτα εκεί τις δυνατές πράξεις, παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις.

β) Το Β είναι σύνθετο κλάσμα, του οποίου ο αριθμητής είναι η παράσταση $\dfrac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{\beta}}$ και ο παρονομαστής είναι η παράσταση $\dfrac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha}}$. Είναι:

- $1-\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta-\alpha}{\beta}$ και $1-\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}$
- $\dfrac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}=\dfrac{\frac{\alpha}{1}}{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}=\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} \qquad (1)$
- $\dfrac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha}}=\dfrac{\beta}{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \qquad (2)$

Άρα:

$$B=\dfrac{\dfrac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{\dfrac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha}}}\overset{(1),(2)}{=\!=}\dfrac{\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}}{\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}}=\dfrac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\beta-\alpha)\alpha\beta}=\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=\dfrac{\alpha-\beta}{-(\alpha-\beta)}=-1$$

Για να ορίζεται το κλάσμα Β πρέπει να τεθούν οι περιορισμοί $\beta\neq 0$, $\alpha\neq 0$ και $\alpha\neq\beta$.

Ζ2. Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση κλασμάτων

- Για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων βασιζόμαστε στις ιδιότητες:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{A\Gamma}{B\Delta},\quad A\cdot\frac{B}{\Gamma}=\frac{AB}{\Gamma}$$

- Για τη διαίρεση κλασμάτων βασιζόμαστε στις ιδιότητες:

$$\frac{A}{B}:\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{A}{B}\cdot\frac{\Delta}{\Gamma},\quad \frac{A}{B}:\Gamma=\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{\Gamma}=\frac{A}{B\Gamma}$$

Εφαρμογή 2.16

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\mathbf{A=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}\cdot\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta}{\alpha^2+\alpha\beta}}$ **β)** $\mathbf{B=\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x}}$

γ) $\mathbf{\Gamma=\dfrac{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}}$

Λύση

α) $A=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}\cdot\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta}{\alpha^2+\alpha\beta}=$

$=\dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)^2}\cdot\dfrac{\alpha(\alpha-\beta)}{\alpha(\alpha+\beta)}=$

$=\dfrac{\alpha(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)}{\alpha(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)}=1$

- $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$
- $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$
- $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$

β) $B=\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}\cdot\dfrac{x(x-2)}{x(x+2)}=\dfrac{x(x-2)^2(x+2)}{x(x-2)^2(x+2)}=1$

γ) $\Gamma=\dfrac{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}=$

- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$=\dfrac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\alpha\beta}=$

$=\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=1$

αφού όλοι οι παράγοντες στον αριθμητή και στον παρονομαστή διαγράφονται.

Εφαρμογή 2.17

Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α) $\mathbf{\dfrac{x^3-9x}{x^2-3x}:\dfrac{x^2+6x+9}{x-3}}$ **β)** $\mathbf{\dfrac{(x-2)^2-9}{(x+3)^2-4}:\dfrac{x^2-10x+25}{x^2+10x+25}}$

Λύση

α) $\dfrac{x^3-9x}{x^2-3x}:\dfrac{x^2+6x+9}{x-3}=\dfrac{x(x^2-9)}{x^2-3x}\cdot\dfrac{x-3}{x^2+6x+9}=$

$=\dfrac{x(x-3)(x+3)}{x(x-3)}\cdot\dfrac{x-3}{(x+3)^2}=\dfrac{x-3}{x+3}$

β) $\dfrac{(x-2)^2-9}{(x+3)^2-4}:\dfrac{x^2-10x+25}{x^2+10x+25}=\dfrac{(x-2-3)(x-2+3)}{(x+3-2)(x+3+2)}\cdot\dfrac{x^2+10x+25}{x^2-10x+25}=$

$=\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x+1)(x+5)}\cdot\dfrac{(x+5)^2}{(x-5)^2}=\dfrac{x+5}{x-5}$

Ζ3. Πρόσθεση - Αφαίρεση κλασμάτων

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε κλάσματα, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές των κλασμάτων.
- Απλοποιούμε τα κλάσματα, όπου αυτό είναι δυνατόν.
- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και κάνουμε ομώνυμα.
- Εκτελούμε στον αριθμητή που δημιουργείται όλες τις δυνατές πράξεις.
- Εξετάζουμε αν το τελικό κλάσμα απλοποιείται.

Εφαρμογή 2.18

Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{x^2+1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x-1}$ **β)** $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{1}{x+1}$

γ) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{2}{x^3-x}$

Λύση

α) $$\frac{x^2+1}{x^2-x}-\frac{2}{x-1}=\overset{1}{\frac{x^2+1}{x(x-1)}}-\overset{x}{\frac{2}{x-1}}=$$
$$=\frac{x^2+1-2x}{x(x-1)}=\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}=\frac{x-1}{x}$$

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.
- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.
- Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και όλες τις δυνατές πράξεις.
- Απλοποιούμε, αν γίνεται, το τελικό κλάσμα.

β) Παραγοντοποιούμε πρώτα τον παρονομαστή:

$$x^2+x=x(x+1)$$

Είναι Ε.Κ.Π. $=x(x-1)(x+1)$, οπότε:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x}-\frac{1}{x+1}=\overset{x(x+1)}{\frac{1}{x-1}}-\overset{x-1}{\frac{1}{x(x+1)}}-\overset{x(x-1)}{\frac{1}{x+1}}=$$
$$=\frac{x(x+1)-(x-1)-x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x-x+1-x^2+x}{x(x-1)(x+1)}=$$
$$=\frac{x+1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x(x-1)}$$

γ) Παραγοντοποιούμε πρώτα τους παρονομαστές.

- $x^2-x=x(x-1)$, $x^2+x=x(x+1)$, $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$
- Ε.Κ.Π. $=x(x-1)(x+1)$
- $$\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2+x}-\frac{2}{x^3-x}=\overset{x+1}{\frac{1}{x(x-1)}}+\overset{x-1}{\frac{1}{x(x+1)}}-\overset{1}{\frac{2}{x(x-1)(x+1)}}=$$

$$=\frac{(x+1)+(x-1)-2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{2x-2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{2(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=$$
$$=\frac{2}{x(x+1)}$$

Εφαρμογή 2.19

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $A=\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}\right):\dfrac{2y}{x^2-y^2}$ **β)** $B=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right):\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2}$

γ) $\Gamma=\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}-x\right)$ **δ)** $\Delta=\dfrac{3\alpha x^3+3\alpha^3x-6\alpha^2x^2}{\alpha x^3-\alpha^3x}:\dfrac{x-\alpha}{x+\alpha}$

Λύση

α) $$A=\left(\overset{x-y}{\frac{1}{x+y}}+\overset{x+y}{\frac{1}{x-y}}\right):\frac{2y}{x^2-y^2}=$$
$$=\frac{(x-y)+(x+y)}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{x^2-y^2}{2y}=$$
$$=\frac{2x}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{2y}=\frac{x}{y}$$

- Παραγοντοποιούμε όσο το δυνατόν περισσότερους όρους.
- Στα αθροίσματα κάνουμε ομώνυμα και πράξεις.
- Ακολουθούμε την προτεραιότητα των πράξεων.
- Παραγοντοποιούμε τους όρους των κλασμάτων και απλοποιούμε όπου είναι δυνατόν.

β) Επειδή:

$$\alpha^2-4\beta^2=(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)$$

παίρνουμε:

$$B=\left(\overset{\alpha-2\beta}{\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}}+\overset{\alpha+2\beta}{\frac{\alpha}{\alpha-2\beta}}\right):\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2}=$$
$$=\frac{\alpha(\alpha-2\beta)+\alpha(\alpha+2\beta)}{(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)}\cdot\frac{\alpha^2-4\beta^2}{2\alpha^2}=$$

$$= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2 + 2\alpha\beta}{(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)} \cdot \frac{(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)}{2\alpha^2} =$$

$$= \frac{2\alpha^2}{(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)} \cdot \frac{(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)}{2\alpha^2} = 1$$

γ) $$\Gamma = \left(\overset{\overbrace{1+x}}{\frac{1+x}{1-x}} - \overset{\overbrace{1-x}}{\frac{1-x}{1+x}}\right)\left(\overset{\overbrace{1}}{\frac{3}{4x}} + \overset{\overbrace{x}}{\frac{x}{4}} - \overset{\overbrace{4x}}{\frac{x}{1}}\right) = \frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{3 + x^2 - 4x^2}{4x} =$$

$$= \frac{(1+2x+x^2) - (1-2x+x^2)}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{3-3x^2}{4x} =$$

$$= \frac{1+2x+x^2-1+2x-x^2}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{3(1-x^2)}{4x} =$$

$$= \frac{4x}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{3(1-x)(1+x)}{4x} = 3$$

δ) Παρατηρούμε ότι:

- $3\alpha x^3 + 3\alpha^3 x - 6\alpha^2 x^2 = 3\alpha x(x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x) = 3\alpha x(x-\alpha)^2$
- $\alpha x^3 - \alpha^3 x = \alpha x(x^2 - \alpha^2) = \alpha x(x-\alpha)(x+\alpha)$

Επομένως παίρνουμε:

$$\Delta = \frac{3\alpha x^3 + 3\alpha^3 x - 6\alpha^2 x^2}{\alpha x^3 - \alpha^3 x} : \frac{x-\alpha}{x+\alpha} = \frac{3\alpha x(x-\alpha)^2}{\alpha x(x-\alpha)(x+\alpha)} \cdot \frac{x+\alpha}{x-\alpha} =$$

$$= \frac{3\alpha x(x-\alpha)^2(x+\alpha)}{\alpha x(x-\alpha)^2(x+\alpha)} = 3$$

Εφαρμογή 2.20

Να αποδειχθεί ότι:

α) $$\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\alpha}}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} = \frac{\alpha+\beta}{4}$$

β) $$\frac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}} + 1 - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}} - x - \dfrac{1}{x-1}} = x$$

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι:

- $\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$
- $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\alpha}} = \dfrac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$

Σε σύνθετα κλάσματα:
- Ξεκινάμε τις πράξεις στους πιο απομακρυσμένους όρους.
- Μετατρέπουμε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά.
- Συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε σε ένα κλάσμα.

- $\overset{\overbrace{\alpha+\beta}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}} - \overset{\overbrace{\alpha-\beta}}{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} = \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} =$

$$= \frac{4\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}$$

Επομένως αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\alpha}}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} = \frac{\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}}{\dfrac{4\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}} = \frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{4\alpha\beta(\alpha-\beta)} = \frac{\alpha+\beta}{4}$$

β) Συμφέρει να κάνουμε χωριστά τις πράξεις όπου παρουσιάζονται σύνθετα κλάσματα:

- $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$
- $\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\dfrac{x}{1}}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{x^2}{x+1}$
- $\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}} + 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1} + \overset{\overbrace{x+1}}{\dfrac{1}{1}} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x^2+x+1-1}{x+1} = \dfrac{x(x+1)}{x+1} = x$
- $1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$
- $\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x}{\dfrac{x-1}{x}} = \dfrac{x^2}{x-1}$
- $\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}} - \dfrac{x}{1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x^2}{x-1} - \overset{\overbrace{x-1}}{\dfrac{x}{1}} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x^2 - x^2 + x - 1}{x-1} = 1$

Επομένως η τιμή του αρχικού σύνθετου κλάσματος είναι $\frac{x}{1} = x$.

Εφαρμογή 2.21

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $$A = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} - \frac{4\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\right) \cdot \frac{\beta^2 - 2\beta\alpha + \alpha^2}{4\alpha\beta} \cdot \frac{\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}$$

β) $$B = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2 + \dfrac{2\beta^2}{1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}} : \frac{3\alpha-\beta}{\alpha+\beta+\dfrac{\alpha-\beta}{1+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}}$$

Λύση

α) Επειδή στην παρένθεση υπάρχουν αφαιρέσεις, θα παραγοντοποιήσουμε πρώτα όλους τους παρονομαστές (εδώ τον τρίτο), θα κάνουμε ομώνυμα και θα εκτελέσουμε τις πράξεις. Έτσι:

$$A=\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}-\frac{4\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\right)\cdot\frac{\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2}{4\alpha\beta}\cdot\frac{\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2-4\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^2}{4\alpha\beta}\cdot\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}=$$

$$=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-4\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\cdot\frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}\cdot\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}=$$

$$=\frac{4\alpha\beta-4\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)}{4\alpha\beta(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{4\alpha(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\cdot\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{4\alpha}=\beta-\alpha$$

Είναι φανερό ότι οι απλοποιήσεις έγιναν με τον περιορισμό ότι:

$$\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0,\quad \alpha\neq\beta\quad \text{και}\quad \alpha\neq-\beta$$

διότι μόνο τότε ορίζονται τα εμφανιζόμενα κλάσματα.

β) Για ευκολία θα απλοποιήσουμε τον κάθε παράγοντα ξεχωριστά. Είναι:

♦ $$\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{2\beta^2}{1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{2\beta^2}{\dfrac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\dfrac{\beta^2(\alpha-\beta)}{\alpha}}=$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)\left(\alpha+\beta+\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta+\dfrac{\beta^2}{\alpha}}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha}}=\frac{\alpha(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=\alpha$$

♦ $$\frac{3\alpha-\beta}{\alpha+\beta+\dfrac{\alpha-\beta}{1+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}}=\frac{3\alpha-\beta}{\alpha+\beta+\dfrac{\alpha-\beta}{\dfrac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}}=\frac{3\alpha-\beta}{\alpha+\beta+\dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{2\alpha}}=$$

$$=\frac{3\alpha-\beta}{\dfrac{2\alpha(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{2\alpha}}=\frac{2\alpha(3\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)(3\alpha-\beta)}=\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$$

Επομένως η παράσταση B γίνεται:

$$B=\alpha:\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}=\alpha\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Είναι φανερό ότι $\alpha\neq\beta$, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\neq 0$, $3\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq-\beta$ και $\alpha\neq 0$.

Διαμάντια από την Άλγεβρα

Οι παρακάτω ασκήσεις προτείνεται να μελετηθούν από μαθητές με ιδιαίτερη κλίση στα μαθηματικά και αφού πρώτα έχουν κατακτήσει τις βασικές γνώσεις που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους.

2.22 **Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha=\beta=\gamma$.**

Λύση

Πρόκειται για μια βασική άσκηση.

Έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0 \iff$$

$$\iff 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha=0$$

(πολλαπλασιάσαμε τους όρους με 2) $\iff$

$$\iff \alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha=0 \iff$$

$$\iff (\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)+(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)+(\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\gamma)=0 \iff$$

$$\iff (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$$

Ισχύει ότι:

- ♦ $\alpha^2=0 \iff \alpha=0$
- ♦ $\alpha^2+\beta^2=0 \iff \alpha=\beta=0$
- ♦ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0 \iff$ $\iff \alpha=\beta=\gamma=0$

Στην τελευταία σχέση έχουμε άθροισμα άρτιων δυνάμεων ίσο με μηδέν. Κάθε όρος οφείλει λοιπόν να ισούται με μηδέν. Έτσι:

$$\begin{Bmatrix}\alpha-\beta=0\\ \beta-\gamma=0\\ \gamma-\alpha=0\end{Bmatrix}\iff\begin{Bmatrix}\alpha=\beta\\ \beta=\gamma\\ \gamma=\alpha\end{Bmatrix}\iff \alpha=\beta=\gamma$$

2.23 **Δίνονται οι αριθμοί $x, y, z\in\mathbb{R}$ με $xy+yz+zx=1$. Να αποδειχθεί ότι:**

α) $\mathbf{x^2+1=(x+y)(x+z)}$

β) $$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε $xy+yz+zx=1$. Έτσι:

$$x^2+1=x^2+(xy+yz+zx)=(x^2+xy)+(yz+zx)=$$

$$=x(x+y)+z(y+x)=(x+y)(x+z)$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$x^2+1=(x+y)(x+z), \quad y^2+1=(y+z)(y+x),$$
$$z^2+1=(z+x)(z+y)$$

Αντικαθιστούμε τους παρονομαστές και παίρνουμε:

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}=$$
$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{xy+xz+yz+yx+zx+zy}{(x+y)(y+z)(z+x)}=$$
$$=\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

2.24 Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α) $\mathbf{A=\alpha(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$

β) $\mathbf{B=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)+2\alpha\beta\gamma}$

Λύση

α) Εκτελούμε αρχικά τις πράξεις και ομαδοποιούμε κατάλληλα:

$$A=\alpha(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=$$
$$=(\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma^2)+(\beta\gamma^2+\alpha\beta\gamma+\alpha^2\beta)+(\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma+\beta^2\gamma)=$$
$$=(\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\alpha\beta\gamma)+(\alpha\gamma^2+\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma)+(\beta\gamma^2+\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma)=$$
$$=\alpha\beta(\beta+\alpha+\gamma)+\alpha\gamma(\gamma+\alpha+\beta)+\beta\gamma(\gamma+\beta+\alpha)=$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

β) $B=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)+2\alpha\beta\gamma=$

$$=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma=$$
$$=\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha)+(\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma)+(\gamma\alpha^2+\alpha\beta\gamma)=$$
$$=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\gamma^2(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\alpha)+\alpha\gamma(\alpha+\beta)=$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\gamma^2+\beta\gamma+\alpha\gamma)=(\alpha+\beta)[(\alpha\beta+\beta\gamma)+(\gamma^2+\alpha\gamma)]=$$
$$=(\alpha+\beta)[\beta(\alpha+\gamma)+\gamma(\gamma+\alpha)]=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)=$$
$$=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

2.25 Αν $\mathbf{\alpha\beta\gamma=1}$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1}=1$$

Λύση

Έχουμε:

$$\alpha\beta\gamma=1 \iff \alpha=\frac{1}{\beta\gamma}$$

διότι $\beta\gamma\neq 0$.

Θα αντικαταστήσουμε την τιμή αυτή του α σε όλους τους όρους της παράστασης:

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1}=\frac{\frac{1}{\beta\gamma}}{\frac{1}{\beta\gamma}\cdot\beta+\frac{1}{\beta\gamma}+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\cdot\frac{1}{\beta\gamma}+\gamma+1}=$$
$$=\frac{\frac{1}{\beta\gamma}}{\frac{\beta+1+\beta\gamma}{\beta\gamma}}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\frac{1}{\beta}+\gamma+1}=\frac{1}{\beta+1+\beta\gamma}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\frac{1+\beta\gamma+\beta}{\beta}}=$$
$$=\frac{1+\beta}{\beta+1+\beta\gamma}+\frac{\beta\gamma}{1+\beta\gamma+\beta}=\frac{1+\beta+\beta\gamma}{1+\beta+\beta\gamma}=1$$

2.26 Αν $\mathbf{\alpha+\beta+\gamma=0}$, να αποδειχθεί ότι:

α) $\mathbf{(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$

β) $\displaystyle\mathbf{\frac{1}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}+\frac{1}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}+\frac{1}{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}=0}$

γ) $\displaystyle\mathbf{\alpha\cdot\frac{\beta^3-\gamma^3}{\beta-\gamma}+\beta\cdot\frac{\gamma^3-\alpha^3}{\gamma-\alpha}+\gamma\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=0}$

Λύση

α) Επειδή $\alpha+\beta+\gamma=0$, παίρνουμε:

$$\alpha+\beta=-\gamma, \quad \beta+\gamma=-\alpha, \quad \gamma+\alpha=-\beta$$

Επομένως το α΄ μέλος γίνεται:

$$(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=(-\gamma)^2+(-\alpha)^2+(-\beta)^2=$$
$$=\gamma^2+\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

β) Επειδή $\alpha+\beta+\gamma=0$, παίρνουμε:

- $\alpha+\beta=-\gamma$, οπότε:

$$(\alpha+\beta)^2=(-\gamma)^2 \iff \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\gamma^2 \iff$$
$$\iff \alpha^2+\beta^2-\gamma^2=-2\alpha\beta$$

- $\beta+\gamma=-\alpha$, οπότε:

$$(\beta+\gamma)^2=(-\alpha)^2 \iff \beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2=\alpha^2 \iff$$
$$\iff \beta^2+\gamma^2-\alpha^2=-2\beta\gamma$$

◆ Όμοια προκύπτει ότι:

$$\gamma^2+\alpha^2-\beta^2=-2\gamma\alpha$$

Το α΄ μέλος λοιπόν γίνεται:

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}+\frac{1}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}+\frac{1}{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}=$$

$$=\frac{1}{-2\alpha\beta}+\frac{1}{-2\beta\gamma}+\frac{1}{-2\gamma\alpha}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=0$$

διότι $\alpha+\beta+\gamma=0$.

γ) Επειδή $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, παίρνουμε:

$$\alpha\cdot\frac{\beta^3-\gamma^3}{\beta-\gamma}+\beta\cdot\frac{\gamma^3-\alpha^3}{\gamma-\alpha}+\gamma\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=$$

$$=\alpha\cdot\frac{(\beta-\gamma)(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)}{\beta-\gamma}+\beta\cdot\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)}{\gamma-\alpha}+\gamma\cdot\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha-\beta}=$$

$$=\alpha(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=$$

$$=(\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma^2)+(\beta\gamma^2+\alpha\beta\gamma+\alpha^2\beta)+(\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma+\beta^2\gamma)=$$

$$=(\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\alpha\beta\gamma)+(\beta\gamma^2+\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma)+(\gamma\alpha^2+\gamma^2\alpha+\alpha\beta\gamma)=$$

$$=\alpha\beta(\beta+\alpha+\gamma)+\beta\gamma(\gamma+\beta+\alpha)+\gamma\alpha(\alpha+\gamma+\beta)=$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0\cdot(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0$$

2.27 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδειχθεί ότι:

α) $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

β) $\dfrac{\alpha^4}{\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}+\dfrac{\beta^4}{\gamma^3+\alpha^3-3\alpha\beta\gamma}+\dfrac{\gamma^4}{\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma}=0$

Λύση

α) Εκτελούμε τις πράξεις στο πρώτο μέλος και παίρνουμε:

$$(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=$$

$$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2)+(\gamma^2+2\gamma\alpha+\alpha^2)=$$

$$=2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \qquad (1)$$

Αλλά η σχέση $\alpha+\beta+\gamma=0$ δίνει:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=0 \iff \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=0 \iff$$

$$\iff 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \qquad (2)$$

Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

β) Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η εξής βασική ταυτότητα:

«Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$»

Επομένως είναι:

$$\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=-\alpha^3,\quad \gamma^3+\alpha^3-3\alpha\beta\gamma=-\beta^3,\quad \alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma=-\gamma^3$$

Άρα το πρώτο μέλος γράφεται:

$$\frac{\alpha^4}{\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta^4}{\gamma^3+\alpha^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma^4}{\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma}=$$

$$=\frac{\alpha^4}{(-\alpha^3)}+\frac{\beta^4}{(-\beta^3)}+\frac{\gamma^4}{(-\gamma^3)}=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

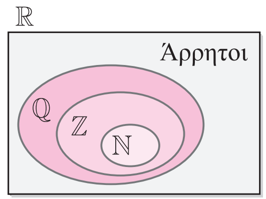
Ιδιότητες φυσικών και ακεραίων

Α. α) Το σύνολο των φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}$, το σύνολο των ακεραίων συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$ και το σύνολο των ρητών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.

β) Για να δηλώσουμε ότι το α είναι στοιχείο ενός συνόλου Α, γράφουμε $\alpha\in A$, ενώ για να δηλώσουμε ότι το α δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α, γράφουμε $\alpha\notin A$. Έτσι:

$$7\in\mathbb{N},\ -3\notin\mathbb{N},\ +8\in\mathbb{Z},\ -10\in\mathbb{Z},\ \frac{9}{8}\notin\mathbb{Z},\ -\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}\ \text{ και }\ \sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$$

γ) Ισχύει ότι:



Το $\mathbb{N}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, το $\mathbb{Z}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{Q}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Β. α) Οι ακέραιοι αριθμοί χωρίζονται σε άρτιους και περιττούς. Οι **άρτιοι** έχουν τη μορφή 2ν, ενώ οι **περιττοί** τη μορφή $2\nu+1$ (ή $2\nu-1$), όπου $\nu \in \mathbb{Z}$.

β) Διαδοχικοί λέγονται οι ακέραιοι που έχουν τη μορφή α, $\alpha+1$, $\alpha+2$ κ.λπ., όπου α είναι κάποιος ακέραιος αριθμός $(\alpha \in \mathbb{Z})$.

Γ. Έστω ένας φυσικός αριθμός α με ψηφία x, y και ω. Αν το ω δηλώνει τις μονάδες, το y τις δεκάδες και το x τις εκατοντάδες, τότε γράφουμε $\alpha = x y \omega$. Για να μη δημιουργείται σύγχυση με το γινόμενο $x y \omega$, γράφουμε $\alpha = \overline{x y \omega}$. Το βασικό ερώτημα είναι:

Πόσες μονάδες έχει ο αριθμός $\overline{x y \omega}$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ο αριθμός α έχει x εκατοντάδες + y δεκάδες + ω μονάδες. Είναι δηλαδή:

$$\overline{x y \omega} = 100x + 10y + \omega \qquad (1)$$

Σύμφωνα με την (1) μπορούμε να γράψουμε:

- $\overline{xy} = 10x + y$, $\quad \overline{x y \omega \varphi} = 1000x + 100y + 10\omega + \varphi$
- $\overline{x y \omega} = 100x + \overline{y \omega} = 100x + 10y + \omega$, $\quad \overline{x y \omega} = 10\overline{xy} + \omega$

Η σχέση (1) αποτελεί το κλειδί για τη λύση ασκήσεων οι οποίες αναφέρονται σε ακέραιους αριθμούς και στα ψηφία τους. Τονίζουμε ότι τα x, y, ω κ.λπ. είναι ψηφία, δηλαδή κάποιοι από τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2.28 Να αποδειχθεί ότι:

α) το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού αριθμού είναι περιττός αριθμός,

β) το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος,

γ) το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι επίσης περιττός.

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι ο α είναι άρτιος και ο β είναι περιττός. Τότε:

$$\alpha = 2\lambda \quad \text{και} \quad \beta = 2\mu + 1$$

όπου λ και μ είναι ακέραιοι αριθμοί. Επομένως:

$$\alpha + \beta = 2\lambda + (2\mu + 1) = 2(\lambda + \mu) + 1 = 2\nu + 1$$

δηλαδή $\alpha + \beta = 2\nu + 1$, όπου (θέσαμε) $\nu = \lambda + \mu$.

Όμως ο $\nu = \lambda + \mu$ είναι ακέραιος και έτσι ο $2\nu + 1$ είναι περιττός. Άρα ο $\alpha + \beta$ είναι περιττός.

β) Έστω α και β δύο περιττοί αριθμοί. Τότε:

$$\alpha = 2\lambda + 1 \quad \text{και} \quad \beta = 2\mu + 1$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$. Επομένως:

$$\alpha + \beta = (2\lambda + 1) + (2\mu + 1) = 2\lambda + 2\mu + 2 = 2(\lambda + \mu + 1) = 2\nu$$

όπου $\nu = \lambda + \mu + 1 \in \mathbb{Z}$.

Επειδή ο $\alpha + \beta$ έχει τη μορφή 2ν, με $\nu \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι ο $\alpha + \beta$ είναι άρτιος.

γ) Έστω α και β δύο περιττοί αριθμοί. Τότε:

$$\alpha = 2\lambda + 1 \quad \text{και} \quad \beta = 2\mu + 1$$

με $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$. Έτσι:

$$\alpha\beta = (2\lambda + 1)(2\mu + 1) = 4\lambda\mu + 2\lambda + 2\mu + 1 = (4\lambda\mu + 2\lambda + 2\mu) + 1 =$$
$$= 2(2\lambda\mu + \lambda + \mu) + 1 = 2\nu + 1$$

όπου $\nu = 2\lambda\mu + \lambda + \mu \in \mathbb{Z}$.

Επομένως ο αβ είναι περιττός, διότι έχει τη μορφή $2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

Φυσική γλώσσα και σύμβολα

Οι επόμενοι πίνακες δείχνουν έναν απλό τρόπο μετάβασης από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική (μαθηματική) γλώσσα και αντιστρόφως.

ΠΙΝΑΚΑΣ Α

Φυσική γλώσσα	Μαθηματική γλώσσα
Άρτιος ακέραιος	2ν, $\nu \in \mathbb{Z}$
Περιττός ακέραιος	$2\nu+1$ ή $2\nu-1$, $\nu \in \mathbb{Z}$
Διαδοχικοί ακέραιοι	α, $\alpha+1$, $\alpha+2$, … με $\alpha \in \mathbb{Z}$ ή …, $\alpha-1$, α, $\alpha+1$, … με $\alpha \in \mathbb{Z}$
Διαδοχικοί άρτιοι	2ν, $2\nu+2$, $2\nu+4$, $2\nu+6$, … με $\nu \in \mathbb{Z}$
Διαδοχικοί περιττοί	$2\nu+1$, $2\nu+3$, $2\nu+5$, $2\nu+7$, … με $\nu \in \mathbb{Z}$
Ρητός αριθμός	$\frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha \in \mathbb{Z}$ και $\beta \in \mathbb{Z}^*$
Ο ακέραιος α διαιρείται με τον ν.	$\alpha = \lambda\nu$ με $\lambda \in \mathbb{Z}$
Ο ακέραιος α δεν διαιρείται με τον ν.	$\alpha = \lambda\nu + \upsilon$ με $0 < \upsilon < \lvert\nu\rvert$ και $\lambda \in \mathbb{Z}$

ΠΙΝΑΚΑΣ Β

Φυσική γλώσσα	Μαθηματική γλώσσα
Ο αριθμός α είναι φυσικός.	$\alpha \in \mathbb{N}$
Ο αριθμός β δεν είναι ακέραιος.	$\beta \notin \mathbb{Z}$
Ο αριθμός γ είναι ρητός.	$\gamma \in \mathbb{Q}$ ή $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha \in \mathbb{Z}$ και $\beta \in \mathbb{Z}^*$
Ο αριθμός x είναι πραγματικός.	$x \in \mathbb{R}$
Ο αριθμός y είναι διάφορος του μηδενός.	$y \in \mathbb{R}^*$ (ή $y \neq 0$)
Ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι μη μηδενικός.	$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ($\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$)
Η πρόταση t ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει η πρόταση r.	$t \Longleftrightarrow r$

2.29 Να αποδειχθεί ότι:

α) το τετράγωνο ενός περιττού ακεραίου α είναι επίσης περιττός αριθμός,

β) αν ο α είναι ακέραιος και ο α^2 είναι άρτιος, τότε και ο α είναι άρτιος.

Λύση

α) Επειδή ο α είναι περιττός, θα ισχύει $\alpha = 2\lambda + 1$, όπου ο λ είναι ακέραιος. Επομένως:

$$\alpha^2 = (2\lambda + 1)^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 2(2\lambda^2 + 2\lambda) + 1 = 2\kappa + 1$$

όπου ο αριθμός $\kappa = 2\lambda^2 + 2\lambda$ είναι ακέραιος. Επειδή ο α^2 έχει τη μορφή:

$$2\kappa + 1 \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

συμπεραίνουμε ότι ο α^2 είναι περιττός.

β) Για να αποδείξουμε ότι και ο α είναι άρτιος, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Έστω λοιπόν ότι ο α δεν είναι άρτιος. Αυτό σημαίνει ότι ο α είναι περιττός. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα, και ο α^2 είναι περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού από την υπόθεση ο α^2 είναι άρτιος.

Ασκήσεις για εξάσκηση

Α. Πράξεις και ιδιότητες στο $\mathbb{R}$

2.30 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $A = (+3) + (-4) + (-2) + (-1) + (+5)$

β) $B = (-10) + (-7) + (+20) + (+10) + (-7)$

γ) $\Gamma = (-7) + (+3) + (-6) + (+8)$

δ) $\Delta = (+5) + (-9) + (-6) + (+8) + (-5)$

2.31 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)$

β) $\left(+\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{7}{15}\right)$

γ) $\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{12}\right)$

δ) $\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{10}\right)+\left(-\frac{1}{20}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$

ε) $\frac{11}{3}+\left(-\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{7}{6}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$

στ) $\frac{5}{9}+\left(+\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{19}{9}\right)+\frac{11}{9}$

2.32 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = -(-3) + (-2) - (-5) - (+4)$

β) $B = -(+8) + (-3) - (-4) - (-1)$

γ) $\Gamma = (-5 + 2) + (7 - 10) - (8 - 6) + (-7 + 5)$

δ) $\Delta = -(-3 - 8) - (4 + 6) + (-2 - 7) - (-8 + 1)$

ε) $E = -[-(-3 + 2) - (-7 + 4 - 2)] + [-(-3) - (-5 + 6)] - (-3 + 5)$

στ) $Z = -[(-3 + 8 - 4) - (-2 + 1)] + [(-5 + 4) - (-2 + 6 + 4)] - (-3 + 1)$

2.33 Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = \left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(+\frac{7}{12}\right)-\left(+\frac{5}{12}\right)$

β) $B = \left(+\frac{6}{7}\right)-\left(-\frac{5}{14}\right)-\left(+\frac{9}{28}\right)-\left(-\frac{3}{28}\right)$

γ) $\Gamma = \left(-\frac{14}{15}\right)-\left(+\frac{11}{20}\right)-\left(-\frac{3}{10}\right)-\left(-\frac{11}{60}\right)$

δ) $\Delta = \left(-\frac{9}{2}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{11}{8}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)$

2.34 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(-3)(+5) + (-4)(-6) - (-2)(-5)$

β) $(-4)(-8) - (-3)(+4) + (+6)(-7)$

γ) $(-1)(-2)(-3) - (-2)(+3)(-4)$

δ) $(-2)(-4)(-5) - (-1)(-3)(+4)(-2)$

ε) $(-4)(-1)(-2) - (-5)(+2) - (-3)(+1)(-1)$

στ) $(-10)(-2)(-3) - (-2)(-3)(-4) - (-3)(-4)(-5)$

2.35 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = -3 + (-7 + 5)(-2) + 4(-2)$

β) $B = -4(-2 + 5)(-7 + 4) - (-3)(-2) - (-1)(-9)(+2)$

γ) $\Gamma = (-4 + 3)(-5 + 4)(-8 + 7) - (-7 + 6)(-7 + 9)(-11 + 10)$

δ) $\Delta = -(-4 + 3)(-7 + 6) - (-9 + 6)(-10 + 12) - (+7 - 6)$

2.36 Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = \frac{5}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}$

β) $B = -\left(-\frac{7}{8}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)$

γ) $\Gamma = -\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{5}{9}\right)$

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

δ) $\Delta=-5\left(-\frac{1}{6}\right)\left(+\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{5}{9}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{24}\right)$

ε) $E=\left(-1-\frac{1}{2}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)\left(-1-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{5}\right)\cdot$

$\cdot\left(-1-\frac{1}{6}\right)(-2)$

στ) $Z=\left(-1+\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(2-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)$

2.37 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(+10):(+2)$ **β)** $(-10):(+5)$

γ) $(+20):(-10)$ **δ)** $(-15):(-5)$

ε) $\left(+\frac{4}{3}\right):\left(+\frac{4}{9}\right)$ **στ)** $\left(-\frac{5}{6}\right):\left(+\frac{15}{12}\right)$

ζ) $\left(-\frac{25}{13}\right):\left(-\frac{50}{26}\right)$ **η)** $\frac{15}{6}:\left(-\frac{10}{18}\right)$

2.38 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A=(-8):(-2)-(-16):(+8)-(+3):(-1)$

β) $B=(-15):(+3)-(+18):(-9)-$
$-(-7):(-4-3)$

γ) $\Gamma=[2(-1)](-2)+[(-15):(-3)]:(-5)$

δ) $\Delta=(-14):(+7)-(-2)-[(-16):(-4)](+3)$

ε) $E=[(-4):(-2)-(-3)]:(-5)-$
$-[-3-(-8):(+4)]$

στ) $Z=-[(-9):(+3)-(-2):(+2)](-1)-$
$-[-(-3-3:3)]$

ζ) $H=(-8):(-4)-[-5:(-4-1)-(-5):5]:(-1)$

η) $\Theta=[(-3)(+2)]:(-1)+[(+12):(-1)]:(+6)-$
$-(-25):(-5)$

2.39 Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A=\dfrac{(-2)-(-3)(+4)}{(-3)-(-4):(-2)}$

β) $B=\dfrac{(-4)(-2)-(-8):(+4)}{(-3):(-1)-(-10):(-2)}$

γ) $\Gamma=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)-3\left(-\frac{7}{3}\right)-\frac{1}{2}:(+3)$

δ) $\Delta=\frac{5}{6}:\left(\frac{7}{2}-2\right)-\frac{1}{2}\left(-3+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{7}{6}\right):(-6)$

ε) $E=1-3\left[5-(-2)(-3)-\frac{1}{2}\right]:\left(\frac{5}{2}-2\right)$

στ) $Z=-\frac{5}{6}:\left(-3+\frac{7}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[-3\left(\frac{1}{2}-1\right)+1\right]-\frac{1}{12}$

ζ) $H=1+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)-\left[\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\left(-\frac{5}{2}\right)$

η) $\Theta=(-2)\left[-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right):\left(+\frac{2}{5}\right)\right]-$
$-\left[-\frac{2}{5}+\left(-\frac{8}{5}\right):\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

2.40 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A=\dfrac{(-2)(+3)+(-15):(-3)+(-3)(-5-2)}{(+20):(-4)-(-5)(-2)-5(-3+4)}$

β) $B=\dfrac{(-18):(+2)-(-8)(+2)-(-2)(6-8)}{(-4)(-2)+(-5):(+5)+2(3-5)}$

γ) $\Gamma=\dfrac{33:(-3)+(-5)(-12)+(-3)(+6)+10+(-1)}{[-8-3(-2)](-7)+3:(-1)-1}$

δ) $\Delta=\dfrac{(-14+17):(-3)+\left(\frac{9}{2}-3\right):\left(-\frac{3}{2}\right)+(-2)}{\left[\left(-2+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{5}{2}\right)\right](-2)-(-5+2):(+3)}$

2.41 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=\dfrac{2-\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}{2+\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}}$ **β)** $B=\dfrac{3+\dfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}{3-\dfrac{1}{3-\frac{1}{3}}}$

γ) $\Gamma=\dfrac{\frac{1}{7}+\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}{1-\frac{1}{7}\cdot\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}$

δ) $\Delta=\left(1-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{2}-1\right)-\dfrac{\frac{3}{4}:\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)}-\left(-\frac{1}{10}\right)$

2.42 **α)** Αν $\alpha=\frac{1}{7}$ και $\beta=\frac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\dfrac{2\beta}{1-\beta^2}}{1-\alpha\cdot\dfrac{2\beta}{1-\beta^2}}=1$$

β) Αν είναι $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{5}$, $\gamma=\frac{1}{8}$ και:

$$A=\frac{\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}+\gamma}{1-\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\cdot\gamma}$$

να αποδείξετε ότι $A=1$.

2.43 Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A=2(3\alpha-2\beta-1)-3(2\alpha-3\beta-2)$

β) $B=-3(\alpha-2\beta+3)+2(3\alpha-3\beta+5)$

γ) $\Gamma=-[-(-2\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)]-(\alpha-2\beta)$

δ) $\Delta=-[-2(\alpha-\beta)-(\beta-\alpha)]-(\alpha-\beta)$

ε) $E=2[3(2-3x)-2(3-2x)]-$
$-5[-2(3-x)+3(x+2)]$

στ) $Z=7-6\{5-4[3-2(1-x)]\}+6(4-8x)$

2.44 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=3\alpha-(\alpha-2\beta)$, όταν $\alpha+\beta=3$

β) $B=2(\alpha-\beta)-3(2\alpha+\beta)+\beta$, όταν $\alpha+\beta=-3$

γ) $\Gamma=7-[-\alpha-(\beta+3)]-[2+(y-x)]$,
όταν $\alpha+\beta=-5$ και $x-y=1$

δ) $\Delta=-x-\alpha+y+\beta-\gamma$,
όταν $x-y=4$ και $\alpha-\beta+\gamma=-2$

ε) $E=-3(\alpha+\beta+\gamma)-4(\beta-\alpha-\gamma)+2(3\alpha-4\gamma)$,
όταν $\alpha-\beta-\gamma=-1$

Β. Οι δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη

2.45 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A=(-3)^2+(-4)^2-(-3)^3+(-1)^{2017}+(-2)^5$

β) $B=(-4)^3-(-3)^3-(-2)^5+(-2)^6-(-5)^2$

γ) $\Gamma=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)-(-3)^2+(-1)^{2018}-(-1)^{2017}$

δ) $\Delta=(-2)^4\cdot 3-(-2)^4+(-5)^2+$
$+[4-(-1)]^2-(-3)^4$

ε) $E=[(-3)^4+(-4)^3]:(-1)^4-(-6)^2:[2(-3)^2]-$
$-(-8+5)^3(-4+3)^7$

στ) $Z=\dfrac{(-1)^7+(-3)^3}{(-5)^1}-\dfrac{(-1)^{18}+(-2)^3+(-1)^{19}}{-(-2)^6:(-4)^2}+$
$+[(-2)^3+1]:(-5)$

2.46 Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A=(-4)^2\cdot 2^{-3}+(-9)^2(-3)^{-3}$

β) $B=(-2)^4(-3)^2(-6)^{-2}+(-5)^2(-2)^5(-10)^{-2}$

γ) $\Gamma=\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\left(-\frac{3}{2}\right)^4\left(-\frac{9}{4}\right)^{-4}(-2^{-1})^{-2}$

δ) $\Delta=\frac{2}{24}\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}-\frac{1}{(-2)^3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}-\frac{1}{(-4)^2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}$

ε) $E=3^{-1}:\left[2^{-1}:\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]+(-0{,}1)^3(0{,}1)^{-1}+10^{-2}$

στ) $Z=\left[\dfrac{(-1)^{10}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{2\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+2^{-1}}\right]+\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}\cdot\dfrac{5}{(-3)^2}$

2.47 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A=x^3+2xy^2+y^3$, όταν $x=-2$, $y=3$

β) $B=\dfrac{x^2-xy^2-5y}{2x^2y-7y}+\dfrac{2x}{y}$, όταν $x=-2$, $y=-1$

γ) $\Gamma=2^{x-4}-6\cdot 4^{x-3}+1^{x-3}-7^{x-1}$, όταν $x=1$

δ) $\Delta=2x^{-2}-2^{-x}+x^x-3(-1)^{-2017}$, όταν $x=-2$

2.48 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις που ακολουθούν:

α) $2^6 \cdot 2^5$ **β)** $4^7 \cdot 8^4$

γ) $3^9 \cdot 3^5$ **δ)** $81^3 \cdot 9^2$

ε) $7^{10} \cdot 7^2 \cdot 7^3$ **στ)** $(-2)^4(-2)^5(-2)^6$

ζ) $3^{10} : 3^5$ **η)** $81^{10} : 27^5$

θ) $\dfrac{(-27)^4(-9)^6}{(-81)^5} \cdot (-1)^{2019}$ **ι)** $\dfrac{16^{10} \cdot 8^6}{32^5(-4)^6}$

2.49 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $12^5 : 3^5$ **β)** $18^7 : 3^7$

γ) $(-16)^{10} : (-4)^{10}$ **δ)** $(-64)^{19} : (-4)^{19}$

ε) $(2^3)^6$ **στ)** $[(-3)^6]^4$

ζ) $[-(-3)^5]^3$

2.50 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $(2^3)^5 : 8^2$ **β)** $(3^4)^5 : 27^3$

γ) $\dfrac{27^4 \cdot 9^5}{81^4}$ **δ)** $(256^2 \cdot 512^4) : 1024^5$

ε) $(2^3 \cdot 2^5)^4 : [(-2)^4(-2)^2]^3$ **στ)** $\dfrac{(-3)^3[(-3)^2]^4}{-81}$

ζ) $\dfrac{(-81)^4(-243)^5}{(-27)^7}$ **η)** $\dfrac{(-5)^4 \cdot 125^{10}}{(-625)^6}$

2.51 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $3^7 \cdot 3^{-2}$ **β)** $2^7 \cdot 2^{-10}$

γ) $4^{-5} \cdot 8^{-6}(-2^3)^{-4}$ **δ)** $(-5^3)(-125)^{-5} \cdot 25^4$

ε) $7^7 : 7^3$ **στ)** $5^{-5} : 5^3$

ζ) $2^{10} : 2^{-14}$ **η)** $\dfrac{(-32)^{-4}(-64)^5}{(-16)^7}$

2.52 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις επόμενες παραστάσεις:

α) $3^{-5} \cdot 2^{-5}$ **β)** $(-6)^{-9}(-5)^{-9}$

γ) $9^{-5} : 3^{-5}$ **δ)** $8^{-4} : 4^{-4}$

ε) $(-0,2)^{-10}(-5)^{-10}$

στ) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-6}\left(\dfrac{100}{9}\right)^{-6}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-6}$ **ζ)** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-7} : \left(\dfrac{9}{16}\right)^{-7}$

η) $\left(\dfrac{25}{4}\right)^{-10} : \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-10}$ **θ)** $(-3^{-5})^5$

ι) $[(-3)^{-5}]^{-2}$

2.53 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \left(-\dfrac{5}{4}\right)^{10}\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-5}\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-3}$

β) $B = \dfrac{4^3(4^{-5})^{-2}}{(-4)^2 \cdot 4^{11}}$

γ) $\Gamma = \dfrac{(-2)^5(-2)^6}{(-2)^4 \cdot 2^{-3} \cdot 2^3}$

δ) $\Delta = \dfrac{(5^{-3})^{-4} \cdot 5^{-11}}{5^5(5^{-2})^{-4} \cdot 5^{-12}}$

ε) $E = \dfrac{(3^6)^2(3^2)^6(-3)^{-20}}{(-3)^2(-3)^3(-3)^{-6}}$

στ) $Z = \dfrac{6^{-2}}{36^{-2}} - \dfrac{15^{-5}}{30^{-5}} - \dfrac{6^{-3}}{12^{-3}}$

2.54 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = (0,25)^{30} \cdot 8^{20}$

β) $B = 12^{2000}(1,5)^{1000} \cdot 6^{-3000}$

2.55 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{18^{10} \cdot 10^{15} \cdot 22^{16}}{55^5 \cdot 33^{11} \cdot 15^{10} \cdot 4^{20}}$

β) $B = \dfrac{527 \cdot 10^{12} - 3,27 \cdot 10^{14}}{5 \cdot 10^{12} + 4,5 \cdot 10^{13}}$

2.56 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $A = \left[\left(\dfrac{\alpha}{\beta^2}\right)^2\left(\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right)^2\right] : (\alpha\beta)^{-2}$

β) $B = \dfrac{(x^{-2}y^3\omega^{-2})^{-3}}{(x^2y^{-3}\omega^2)^3} \cdot \dfrac{(x^{-3}y^2\omega^{-3})^4}{(x^3y^{-2}\omega^3)^{-4}}$

γ) $\Gamma = \left(\dfrac{x^6x^{-2}}{x^3}\right)^2 \cdot \dfrac{x^3 : x^{-2}}{x^5}$

δ) $\Delta = \dfrac{(x^{-3}y)^2(x^{-2})^{-3}}{y^{-2}(y^2x)^3} : \dfrac{x^4y : x^3}{y^5 \cdot x^4}$

ε) $E = \dfrac{[(x^2y)^{-2} : (y^4 : y)] : x}{(x^{-1})^4(y^{-1})^{-2}(x^{-1}y^{-2})^4(x^{-2}y)^{-1}}$

2.57 Να γράψετε ως μία δύναμη τις παραστάσεις:

α) $A = (-0,25)^{15}[(-2)^3]^{13}$

β) $B = (-4)^{60}(-1,25)^{40}$

γ) $\Gamma = (12^{100} \cdot 6^{-149} \cdot 1,5^{50}) : 6^{-3}$

δ) $\Delta = [x^5(xy^2)^3] : (x^{-2} : y)^{-2}$

ε) $E = [(xy^{-1})^2 : (x^3y^7)^{-1}]^{-2} : (x^{-1}y^{-1})^{20}$

2.58 Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παρακάτω παραστάσεων για $x = 0,4$ και $y = -2,5$:

α) $A = [x^5(xy^2)^3] : (x^{-2} : y)^{-2}$

β) $B = [(xy^{-1})^2 : (x^3y^7)^{-1}]^2$

2.59 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = x^2(x^2y^3)^2(x^{-1})^{-3}$, όταν $x^3y^2 = -2$

β) $B = [x^2(xy^2)^3]^3 : [(x^{-2}y^{-3})^{-2}]^3$, όταν $x = -3$

2.60 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = [(x^2y^3)^{-2}(xy^3)^4] : (x^3 : y^{-1})^{-3}$$

για $x = 2017$ και $y = \dfrac{2}{2017}$ και να τη γράψετε ως μία δύναμη με βάση φυσικό αριθμό.

2.61 Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = [(\alpha^2\beta^{-1})^2\alpha^{-2}(\beta^2)^{-3}]^{-1} : \left(\dfrac{\beta^{-2}}{\alpha^4}\right)^{-3}$,
όπου $\alpha = 0,01$ και $\beta = 0,1$

β) $B = \dfrac{\alpha\beta^{-2}(\alpha^{-1}\beta^2)^4(\alpha\beta^{-1})^2}{\alpha^{-2}\beta(\alpha^2\beta^{-1})^3\alpha^{-1}\beta}$,
όπου $\alpha = 10^{-3}$ και $\beta = 10^{-2}$

γ) $\Gamma = [(x^2y^3)^{-2}(xy^3)^4] : (x^3 : y^{-1})^{-3}$,
όπου $x = 2004$ και $y = \dfrac{1}{2004}$

2.62 Δίνεται η παράσταση:

$$A = \left[\frac{\alpha^2\beta\gamma^{25}}{\alpha^{-1}\beta^{13}\gamma^{14}} \cdot \frac{(\alpha^{-1}\beta\gamma^{-2})^2}{(\beta\gamma^{-2})^{-3}}\right]^{-1} : (\alpha^3\beta^{-1}\gamma^3)^{-2}$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \alpha^5\beta^5\gamma^5$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για:

$$\alpha = 10^5,\quad \beta = \frac{1}{100} \quad \text{και} \quad \gamma = 0,001$$

2.63 Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{\alpha^{-43}(\alpha^2\beta^{-5})^3}{(\alpha^{-3}\beta^5)^2} \cdot \left[\dfrac{(\alpha\beta)^2}{\alpha^2\beta^4}\right]^3$

β) $B = \dfrac{\alpha^{-3}\beta(\alpha^2\beta)^2}{(\alpha\beta^{-2})^2\alpha^{-5}\beta^3}$

γ) $\Gamma = \left[\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha^{-1}}\right)^2 \cdot \dfrac{\alpha}{\beta^3}\right] : \left[\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^3\right]$

2.64 Σε πόσα μηδενικά τελειώνουν οι αριθμοί;

α) $7^{100} \cdot 100^7$ **β)** $3^{500} \cdot 500^3$

γ) $8^4 \cdot 25^8$ **δ)** $50^{40} \cdot 40^{50}$

ε) $15^{30} \cdot 30^{15}$ **στ)** $60^{30} \cdot 30^{60}$

ζ) 100^{200^4} **η)** $(-4)^{3000}(-1,25)^{2000}$

2.65 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\alpha = 5^{51} \quad \text{και} \quad \beta = 2^{121} - 4^{60} - 2^{119}$$

Γ. Ταυτότητες

2.66 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = (x + 1)^2 + (x - 1)^2 - 2(x^2 + 1)$

β) $B = (2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 + 2(1 - 4x)$

γ) $\Gamma = (x + 2)^3 + (x - 2)^3 - 2x(12 + x^2)$

δ) $\Delta = (3 - x)^3 - (3 + x)^3 + 2x(x^2 + 27)$

2.67 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $A = (\alpha - 2\beta)^2 - (3\alpha + \beta)^2 -$
$- 2(\alpha - 3\beta)(2\alpha + \beta) - 3(3\beta^2 - 4\alpha^2)$

β) $B = (\alpha + 1)^3 - (\alpha - 1)^3 - (2\alpha + 1)(3\alpha + 2)$

2.68 Να αποδείξετε τις επόμενες ταυτότητες:

α) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

β) $(α^2+β^2)^2-(α^2-β^2)^2-(2αβ)^2=0$

γ) $α(α+3β)^2-β(β+3α)^2=(α-β)^3$

δ) $(α^2+β^2)^3-(α^3-β^3)^2-3α^2β^2(α-β)^2=(2αβ)^3$

ε) $(α^ν+2)^2-(α^ν-3)^2-10(α^ν-1)=5$

στ) $(α^ν-β^ν)^2+(α^ν+β^ν)^2-$
$-2(α^ν-β^ν)(α^ν+β^ν)=4β^{2ν}$

ζ) $(α+β-γ)^2-(α-β+γ)^2-4α(β-γ)=0$

η) $(α+β+γ)^2+(α-β-γ)^2-(α+β-γ)^2-$
$-(α-β+γ)^2=8βγ$

θ) $(α+β)(α^3+β^3)+3αβ(α^2+β^2)+6α^2β^2=$
$=(α+β)^4$

2.69 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α) $(3x+\dots)^2=\dots+\dots+16$

β) $(2x^2-\dots)^2=\dots-8x^2+\dots$

γ) $(3-\dots)^2=\dots-12x+\dots$

δ) $(\dots+\dots)^2=4x^2+8x+\dots$

ε) $(\dots\ \dots\ \dots)^2=4x^2-2x+\dots$

στ) $(x-\dots)^2=\dots-\frac{5}{2}x+\dots$

2.70 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α) $x^3+12x^2+\dots+\dots=(\dots+\dots)^3$

β) $27y^3+27y^2+\dots+\dots=(\dots+\dots)^3$

γ) $8x^3-12x^2+\dots-\dots=(\dots-\dots)^3$

δ) $8x^3-36x^2+\dots-\dots=(\dots-\dots)^3$

ε) $64x^3+\dots+\dots+\dots=(\dots+1)^3$

στ) $\dots-\dots+\dots-8=\left(\frac{1}{2}y\ \dots\ \dots\right)^3$

Ειδικές μορφές ταυτοτήτων

2.71 **α)** Να αποδείξετε ότι:
$$α^2+β^2=(α+β)^2-2αβ$$

β) Αν $α+β=3$ και $αβ=2$, να αποδείξετε ότι:
$$α^2+β^2=5$$

γ) Αν $α+\frac{1}{α}=2$, να αποδείξετε ότι $α^2+\frac{1}{α^2}=2$.

δ) Αν $2α+\frac{3}{α}=5$, να υπολογίσετε την παράσταση $4α^2+\frac{9}{α^2}$.

2.72 **α)** Να αποδείξετε ότι:
$$α^2+β^2=(α-β)^2+2αβ$$

β) Αν $α-β=3$ και $αβ=4$, να αποδείξετε ότι:
$$α^2+β^2=17$$

γ) Αν $α-\frac{1}{α}=3$, να υπολογίσετε την παράσταση:
$$α^2+\frac{1}{α^2}$$

δ) Αν $3α-\frac{1}{α}=2$, να υπολογίσετε την παράσταση:
$$9α^2+\frac{1}{α^2}$$

2.73 **α)** Να αποδείξετε ότι:
$$α^3+β^3=(α+β)^3-3αβ(α+β)$$

β) Αν $α+β=2$ και $αβ=1$, να αποδείξετε ότι:
$$α^3+β^3=2$$

γ) Αν $α+\frac{1}{α}=3$, να υπολογίσετε την παράσταση:
$$α^3+\frac{1}{α^3}$$

δ) Αν $2α+\frac{3}{α}=3$, να υπολογίσετε την παράσταση:
$$8α^3+\frac{27}{α^3}$$

2.74 Αν $α+β=4$ και $αβ=3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις $α^2+β^2$ και $α^3+β^3$.

2.75 Αν $α+β=3$ και $αβ=2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $Α=α^2+β^2$ **β)** $Β=α^3+β^3$

γ) $Γ=α^4+β^4$ **δ)** $Δ=α^6+β^6$

ε) $Ε=α(1+α+α^2)+β(1+β+β^2)$

2.76 Αν $x+\frac{1}{x}=4$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $Α=x^2+\frac{1}{x^2}$ **β)** $Β=x^3+\frac{1}{x^3}$

2.77 Αν $x+\frac{1}{x}=3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $Α=x^2+\frac{1}{x^2}$ **β)** $Β=x^3+\frac{1}{x^3}$

γ) $Γ=x^4+\frac{1}{x^4}$ **δ)** $Δ=x^6+\frac{1}{x^6}$

2.78 Αν $α+\frac{1}{α}=2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $α^2+\frac{1}{α^2}$ **β)** $α^3+\frac{1}{α^3}$

γ) $α^4+\frac{1}{α^4}$ **δ)** $α^5+\frac{1}{α^5}$

ε) $α(1+α+α^2)+\frac{1}{α}\left(1+\frac{1}{α}+\frac{1}{α^2}\right)$

2.79 **α)** Να αποδείξετε ότι:
$$α^3-β^3=(α-β)^3+3αβ(α-β)$$

β) Αν $α-β=3$ και $αβ=4$, να αποδείξετε ότι:
$$α^3-β^3=63$$

γ) Αν $α-\frac{1}{α}=3$, να υπολογίσετε την παράσταση:
$$α^3-\frac{1}{α^3}$$

δ) Αν $3α-\frac{2}{α}=1$, να υπολογίσετε την παράσταση:
$$27α^3-\frac{8}{α^3}$$

2.80 Αν $α-β=2$ και $αβ=3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις $α^2+β^2$ και $α^3-β^3$.

2.81 Αν $α-β=1$ και $αβ=6$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $Α=α^2+β^2$ **β)** $Β=α^3-β^3$

γ) $Γ=α^4+β^4$

δ) $Δ=α(1+α+α^2)-β(1-β+β^2)$

2.82 Αν $x-\frac{1}{x}=3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2+\frac{1}{x^2}$ **β)** $x^3-\frac{1}{x^3}$

γ) $x^4+\frac{1}{x^4}$

2.83 Αν $x-\frac{1}{x}=2$, να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $Α=x^2+\frac{1}{x^2}$ **β)** $Β=x^3-\frac{1}{x^3}$

γ) $Γ=x^4+\frac{1}{x^4}$ **δ)** $Δ=x^5-\frac{1}{x^5}$

2.84 Αν $x-\frac{1}{x}=α$, να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α τις παραστάσεις:

α) $Α=x^2+\frac{1}{x^2}$ **β)** $Β=x^3-\frac{1}{x^3}$

2.85 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

α) 63^3-13^3 είναι πολλαπλάσιο του 50,

β) 85^3+15^3 διαιρείται με το 100,

γ) 3^9+4^9 διαιρείται με το 91,

δ) 10^9-1 διαιρείται με τον αριθμό 999.

2.86 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $Α=(x+1)(x^2-x+1)$

β) $Β=(x-1)(x^2+x+1)$

γ) $Γ=(2x+1)(4x^2-2x+1)$

δ) $Δ=(3x-1)(9x^2+3x+1)$

ε) $Ε=(x^2+2y)(x^4-2x^2y+4y^2)$

στ) $Ζ=(α^2+2)(α^4-2α^2+4)$

2.87 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $Α=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

β) $Β=(x-3)(x+3)(x^2-3x+9)(x^2+3x+9)$

γ) $Γ=(α-β)(α+β)(α^2-αβ+β^2)(α^2+αβ+β^2)$

δ) $Δ=(α^8+1)(α^4+1)(α^2+1)(α+1)(α-1)$

Ταυτότητες με συνθήκη

2.88 Αν $α+β=1$, να αποδείξετε ότι:

α) $α^3+β^3+3αβ=1$

β) $α^3(β+1)-β^3(α+1)=α-β$

2.89 Να αποδείξετε ότι:

α) αν $α-β=2$, τότε:
$$Α=α(α+3)+β(β-3)-2αβ=10$$

β) αν $\alpha^2+\beta^2=1$, τότε:

$$B=(3\alpha-4\alpha^3)^2+(3\beta-4\beta^3)^2=1$$

2.90 Αν $\alpha\beta=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3}{1+\alpha^2}-\frac{\beta^3}{1+\beta^2}=\alpha-\beta$$

2.91 Να αποδείξετε ότι:

α) αν $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε $\alpha=\beta$,

β) αν $\alpha^2+\beta^2+2=2(\alpha+\beta)$, τότε $\alpha=\beta=1$,

γ) αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3=2(\alpha+\beta+\gamma)$, τότε:

$$\alpha=\beta=\gamma=1$$

δ) αν $(\alpha+\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)$, τότε $\alpha=\beta$,

ε) αν $\alpha^3-\beta^3=3\alpha\beta(\alpha-\beta)$, τότε $\alpha=\beta$,

στ) αν $1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}+\frac{\alpha+\beta}{\beta}=5$, τότε $\alpha=\beta$.

2.92 **α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση:

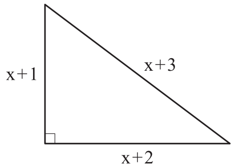
$$A=\left(\frac{2017}{2016}+\frac{2016}{2017}\right)^2-\left(\frac{2017}{2016}-\frac{2016}{2017}\right)^2$$

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

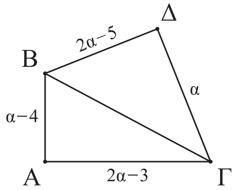
$$(4^{2017}+5^{2016})^2-(4^{2017}-5^{2016})^2$$

έχει 2016 μηδενικά.

2.93 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού ορθογώνιου τριγώνου.



2.94 Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα μήκη των δύο πλευρών δύο τριγώνων. Αν ένα από τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α ή στο Δ, να αποδείξετε ότι και το άλλο τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



2.95 Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει:

$$2(\alpha\beta-\gamma^2)=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

2.96 Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\frac{1999}{2000}+\frac{2000}{1999}\right)^2-\left(\frac{1999}{2000}-\frac{2000}{1999}\right)^2=4$

β) $1{,}3265^2-0{,}3265\cdot 2{,}3265=1$

γ) $3{,}12345^2-2{,}12345\cdot 4{,}12345=1$

Δ. Παραγοντοποίηση

2.97 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $\alpha x-\alpha y-\alpha\omega$

β) $\alpha^2x-2\alpha^2y+3\alpha^2\omega$

γ) $\alpha^2x-4\alpha x+3\alpha x^2$

δ) $\alpha\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma^2-\alpha\beta\gamma$

ε) $6\alpha x^2-4\alpha x^2y+8\alpha xy^2$

στ) $5x^3y^3+10x^2y^3-15x^3y^4$

β) $2x(\alpha+\beta)-4(\beta+\alpha)$

γ) $\alpha(x-y)-\beta(y-x)$

δ) $3(\alpha-\beta)^2+6(\beta-\alpha)$

ε) $(\alpha-2\beta)(x-y)-(2\alpha-\beta)(y-x)$

στ) $x^2(x-3)-2(3x-x^2)$

ζ) $x(x^2+5x)-3(15+3x)$

η) $(x^2+y^2)(x-1)+2xy(1-x)$

2.98 Να κάνετε γινόμενα τις επόμενες παραστάσεις:

α) $2(\alpha-\beta)^2+4(\alpha-\beta)$

2.99 Να κάνετε γινόμενα τις επόμενες παραστάσεις:

α) $(\alpha+\beta)x-(\alpha+\beta)y$

β) $(\alpha-\beta)x+(\beta-\alpha)y$

γ) $(x-y)\alpha^2+\beta^2(y-x)$

δ) $\alpha\beta(xy-\omega)+2(\omega-xy)$

ε) $\alpha(x-y)-2x+2y$

στ) $(x-2)^2-3x+6$

2.100 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $x^2(x-2)+x(2-x)^2$

β) $(\alpha+\beta)(x-y)-(y-x)^2$

γ) $\alpha(x-2)^2+\beta(2-x)^3$

δ) $6(\alpha-\beta)^3-12(\beta-\alpha)^2$

ε) $(x-2)(\alpha+\beta)+(2-x)(\alpha+\beta)^2$

στ) $(2x+y)(\alpha-\beta)+(\beta-\alpha)(x+2y)$

2.101 Να κάνετε γινόμενο τις παραστάσεις:

α) $\alpha x+\beta y+\alpha y+\beta x$

β) $2x^3+3x^2+4x+6$

γ) x^3+x^2-x-1

δ) $2x+2y-\alpha x-\alpha y$

ε) $\alpha x-5y-\alpha y+5x$

στ) $\alpha x-\alpha y-\beta x+\beta y$

ζ) $1-\alpha+\alpha\beta-\alpha^2\beta$

η) $\alpha^2-\alpha-\beta\gamma+\alpha\beta\gamma$

2.102 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2-xy+\omega x-y\omega$

β) $\alpha\beta-1+\alpha-\beta$

γ) $x^2+y\omega-xy-x\omega$

δ) $y\omega-x^2-xy+x\omega$

ε) $\alpha^3-\alpha^2-\alpha+1$

στ) $xy-x\omega-(\omega-y)^2$

2.103 Να κάνετε γινόμενα τις επόμενες παραστάσεις:

α) $x(x-1)-2x+2$

β) $\alpha(x+y)+\beta y+\beta x$

γ) x^3-x^2-4x+4

δ) $x^3-5x^2-4x+20$

ε) $2\alpha-8x-\alpha x+4x^2$

στ) $10\beta-5\alpha-18\beta^2+9\alpha\beta$

2.104 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $(\alpha+\beta)(x+y)-\gamma x-\gamma y$

β) $2\alpha-2-(1-\alpha)^2$

γ) $xy-3y-2x\omega+6\omega$

δ) $(\alpha-\beta)(x+y)-\gamma x-\gamma y$

ε) $\alpha(x-y)-\beta y+\beta x$

στ) $\alpha\beta-\alpha-\beta+1$

2.105 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^2-16 **β)** $4y^2-9$

γ) β^4-1 **δ)** $4\alpha^2\beta^2-25$

ε) $3x^2-12$ **στ)** $-5\alpha^2+20\beta^2$

2.106 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $9x^2-4y^2$ **β)** $25x^2-9$

γ) $4x^2y^4-1$ **δ)** x^4-16

ε) $(x-1)^2-4$ **στ)** $4(y-2)^2-9y^2$

2.107 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $3x^2-12$ **β)** $\alpha^2\beta^2-9$

γ) $4x^2-9y^2$ **δ)** $(x^2-2)^2-49$

ε) x^4-16 **στ)** $\alpha^4\beta^4-1$

ζ) $\alpha^4-\beta^4$ **η)** $16x^4-y^4$

2.108 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x^2-18$ **β)** $3y^4-3$

γ) $\alpha\beta^2-\alpha\gamma^2$ **δ)** $8x^2-50y^2$

ε) $2\alpha^3-2\alpha$ **στ)** $3y^4-3\omega^4$

2.109 Να κάνετε γινόμενα τα τριώνυμα:

α) $A=x^2-4x+3$ **β)** $B=y^2+4y-5$

γ) $\Gamma=\alpha^2-\alpha-6$ **δ)** $\Delta=\beta^2+2\beta-8$

2.110 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^3+1 **β)** x^3-1

γ) x^3+8 **δ)** x^3-8

ε) $8x^3+y^3$ **στ)** $8x^3-27y^3$

ζ) $64\alpha^3+27\beta^3$ **η)** $8\alpha^3-27$

2.111 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $(x-2)^2-16$ **β)** $4(y+2)^2-9$

γ) $8x^3-y^3$ **δ)** $\alpha^3+8\beta^3$

ε) $27x^3-1$ **στ)** $8\alpha^3+\beta^6$

2.112 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $A=x^2-2x+1$ **β)** $B=x^2+6x+9$

γ) $\Gamma=4y^2-4y+1$ **δ)** $\Delta=y^2-8y+16$

ε) $E=x^4-2x^2+1$ **στ)** $Z=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4$

2.113 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $A=4x^2+12xy+9y^2$

β) $B=9\alpha^4-12\alpha^2\beta^3+4\beta^6$

2.114 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $(x+1)^2+2(x+1)+1$

β) $(y+2)^2+4(y+2)+4$

γ) $(\alpha-3)^2-6(\alpha-3)+9$

δ) $2(\alpha+5)^2+20(\alpha+5)+50$

2.115 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1$

β) $y^6+3y^4+3y^2+1$

γ) $(x+1)^3+3(x+1)^2+3(x+1)+1$

δ) $(\alpha+2)^3-3(\alpha+2)^2+3(\alpha+2)-1$

2.116 Να κάνετε γινόμενα τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A=6+\alpha x-2\alpha-3x$

β) $B=x^3-2x^2-9x+18$

γ) $\Gamma=x^2-y^2-2x+1$

δ) $\Delta=\alpha^2-4\gamma^2-2\alpha\beta+\beta^2$

ε) $E=\alpha^4-\gamma^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4$

στ) $Z=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2-2\alpha\beta+2\gamma\delta$

2.117 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $\alpha^2-x^2+\beta^2-4-2\alpha\beta-4x$

β) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-x^2+4x-4$

γ) $4\alpha^2-4\alpha^3+\alpha^4$

δ) $\alpha^3+1+2(\alpha^2-1)+(\alpha+1)^2$

ε) $\alpha^3-1-2(\alpha^2-1)-(\alpha-1)^2$

στ) $x^3-2x^2+x-xy+y$

2.118 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta$

β) $x^2+y^2+2xy-2x-2y$

γ) $x^2-y^2+2\alpha x+\alpha^2$

δ) $x^2-2xy+y^2-\omega^2$

ε) x^2-y^2-6y-9

στ) $9-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$

2.119 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2$

β) x^2-y^2+4x+4

γ) $x^2-y^2-6x+6y$

δ) x^2-x-y^2-y

ε) $\alpha^5+\alpha^4-\alpha-1$

στ) $\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta$

ζ) $x^2+4x+3+\alpha x+3\alpha$

η) $\alpha^4+\beta^4-11\alpha^2\beta^2$

θ) x^4-15x^2+9

2.120 Να παραγοντοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $x^2y^2-4y^2-x^2+4$

β) x^4-1+x^3-x

γ) $x^3(x^2-1)+1-x^2$

δ) $(x^2+9)^2-36x^2$

ε) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta$

στ) $x^2-2xy+y^2-\omega^2$

ζ) $1-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$

η) $y^2-x^2-10y+25$

θ) $2(x-1)(x^2-4)-5(x-1)(x-2)^2$

ι) $(y^2-4)^2-(y+2)^2$

ια) $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2$

ιβ) $(x^2+9)(\alpha^2+4)-(\alpha x+6)^2$

2.121 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\alpha^2(\gamma^4+1)-(\alpha^4+1)\gamma^2$

β) $B=(\alpha^4+\beta^4)\gamma^2-\alpha^2\beta^2(1+\gamma^4)$

γ) $\Gamma=\alpha^2\beta^2(x^2+y^2)+xy(\alpha^4+\beta^4)$

δ) $\Delta=\alpha^2\beta^2(x^2+y^2)-xy(\alpha^4+\beta^4)$

2.122 Να κάνετε γινόμενα τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A=x^4+x^2+1$

β) $B=x^5+x+1$

γ) $\Gamma=x^4+4$

δ) $\Delta=x^4+x^2y^2+y^4$

ε) $E=(x^2+x+2)^2-x^3$

στ) $Z=(1+x-x^2+x^3)^2+x^3$

2.123 Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $A=4(\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta\gamma\delta+\gamma^2\delta^2)-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$

β) $B=\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma-1$

2.124 Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ, με $\widehat{A}=90°$, να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $A=\alpha^2+\gamma^2+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma$

β) $B=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

2.125 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha-\alpha\beta^2-\beta\gamma^2-\gamma\alpha^2$

β) $B=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+3\alpha\beta\gamma$

γ) $\Gamma=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma$

δ) $\Delta=\alpha(x+y)+\beta(y+\omega)+\gamma(\omega+x)+$
$+\beta x+\gamma y+\alpha\omega$

Ε. Απλοποίηση παραστάσεων

2.126 Δίνεται η παράσταση:

$$A(x)=x^3-x^2-4x+4$$

α) Να κάνετε γινόμενο την παράσταση Α.

β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=0$.

2.127 Δίνεται ο αριθμός:

$$\alpha=(x-2)(x-3)$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται ο αντίστροφος του α;

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$B=\frac{(x^2-2x)(3x-x^2)}{(x-2)(x-3)}$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $B=0$.

2.128 Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{(x^2-2x)(x+3)}{x^2+3x}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση Α.

β) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε $A=0$.

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

2.129 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{(1-x^4)(2x-x^2)}{(x^3-4x)(x^3-x)}\cdot\frac{x^2+2x}{x^2+1}$$

και

$$B=\frac{(x-1)(3-x)-(1-x)(5-x)}{1-x^2}\cdot\frac{x+1}{x-4}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β;

β) Να αποδείξετε ότι $A = 1$ και $B = 2$.

2.130 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\dfrac{2\alpha+2\beta}{3\alpha-3\beta}$

β) $B = \dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-4}\cdot\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$

γ) $\Gamma = \dfrac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha+3}\cdot\dfrac{\alpha^2+6\alpha+9}{(\alpha-1)^2}$

δ) $\Delta = \dfrac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}\cdot\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}$

2.131 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{\alpha^2\beta+\alpha\beta}{\alpha\beta-\beta}:\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$

β) $B = \dfrac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}:\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha^3+\beta^3}$

γ) $\Gamma = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

δ) $\Delta = \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-x}$

2.132 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x}$

β) $\dfrac{2x^2+\alpha x-\alpha^2}{x+\alpha}$

γ) $\dfrac{(x^4-1)(x^2-2x)}{(x^3-4x)(x^3-x)}$

δ) $\dfrac{(x-1)(x-3)-(1-x)(x-5)}{x^2-1}$

2.133 Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}\cdot\dfrac{x^2-3x}{x^2+3x}$

β) $B = \dfrac{x^2+x}{x^2-x}\cdot\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{2x+2}{x-1}$

γ) $\Gamma = \dfrac{x^3-x^2-5x+5}{x^3+x^2-5x-5}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

δ) $\Delta = \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$

2.134 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}:\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$

β) $B = \dfrac{x^3-8}{x^3+27}:\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-3x+9}$

γ) $\Gamma = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}:\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}$

δ) $\Delta = \dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}:\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$

2.135 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

β) $B = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

γ) $\Gamma = \dfrac{x^3y-xy^3}{x^3-y^3}$

δ) $\Delta = \dfrac{5\alpha^3-5\beta^3}{10\alpha^2+10\alpha\beta+10\beta^2}$

ε) $E = \dfrac{x-2}{8x^3-27}:\dfrac{\alpha x-2\alpha+\beta x-2\beta}{3-2x}$

2.136 Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $A = \dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-x}\cdot\dfrac{x^2}{x^2-x-2}$

β) $B = \dfrac{x^3-1}{y^2-y+1}\cdot\dfrac{y^3+1}{x-1}\cdot\dfrac{y-1}{x^2+x+1}$

2.137 Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται.

α) $A = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

β) $B = \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-x}$

γ) $\Gamma = \dfrac{x^2-x+2x-2}{x^2-1}$

δ) $\Delta = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x}\cdot\dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2}$

ε) $E = \dfrac{x^3+x^2}{(x+1)^3}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$

στ) $Z = \dfrac{x(x-2)+1}{x^2-3x+2}$

2.138 Να αποδείξετε ότι:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{99^2}\right)=\frac{50}{99}$$

2.139 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{1998^2}\right)\left(1-\frac{1}{1999^2}\right)$$

2.140 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{2\alpha^3-12\alpha^2+18\alpha}{\alpha^2-9}$

β) $\dfrac{(\alpha^2-4)^2-(3\alpha-2)(\alpha+2)^2}{(\alpha^2-4)(\alpha^2-1)}$

γ) $\dfrac{9(2\alpha+1)^2-(4\alpha-1)^2}{4(\alpha^2+4\alpha+4)}$

δ) $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\dfrac{2y}{x+y}-\dfrac{xy}{x^2-y^2}$

ε) $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}\cdot\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}$

στ) $\dfrac{x^4-1+x^3-x}{x^2-2x+1}:\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

ζ) $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$

η) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2-1}}{1-\dfrac{x+1}{x-\frac{1}{x}}}$

2.141 Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2-\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2}{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}\cdot\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha^2-\beta^2)^2}{\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)^2-\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^2}=\alpha^2\beta^2$

β) $\dfrac{\beta x-\beta y+2x-2y}{\beta^2+4\beta+4}\cdot\dfrac{\beta x+\beta y+2x+2y}{x^2-y^2}=1$

γ) $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\dfrac{2y}{x+y}-\dfrac{xy}{x^2-y^2}=1$

δ) $\left[\left(\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^2+3\right):\left(\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2+3\right)\right]:\dfrac{\alpha^3+1}{\alpha^3-1}-\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}=-1$

2.142 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{3\alpha-6\beta}{\alpha+\beta}-\dfrac{5\alpha-6\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{4\alpha-5\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{7\alpha-8\beta}{\alpha-\beta}$

β) $B = \dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}-\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}+\dfrac{2\beta^3-\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}$

γ) $\Gamma = \left[\dfrac{1}{(\mu+\nu)^2}\left(\dfrac{1}{\mu^2}+\dfrac{1}{\nu^2}\right)+\dfrac{2}{(\mu+\nu)^3}\left(\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\nu}\right)\right]\mu^2\nu^2$

δ) $\Delta = \dfrac{x}{\alpha x-2\alpha^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2\alpha x-2\alpha}\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)$

ε) $E = \left(\dfrac{x^2}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{x}{x-y}-1\right)+\left(\dfrac{x^3}{y^3}-1\right)\left(\dfrac{x^2+xy}{x^2+xy+y^2}-1\right)$

2.143 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \left[\left(\alpha+\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)\left(\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\alpha\right)\right]:\dfrac{\alpha^4}{\alpha^2-\beta^2}$

β) $B = \left[\left(\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-4\right)\left(\dfrac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha\beta}\right)\right]:\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha\beta}$

γ) $\Gamma = \left[\dfrac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta+\gamma}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta+\gamma}}\left(1+\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right)\right]:\left[\left(\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}\right)^2\alpha\beta\gamma\right]$

δ) $\Delta = \dfrac{\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)}{\dfrac{(x+y)^2-xy}{(x-y)^2+xy}\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)}\cdot\dfrac{xy}{x-y}$

2.144 Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right):\left[\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)^2\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}+1\right)\right]=\alpha\beta$

β) $(\alpha^3+\beta^3):\left(\alpha-\dfrac{\beta}{1+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}\right)-$

$$-(\alpha^3-\beta^3):\left(\alpha+\dfrac{\beta}{1-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}\right)=2\alpha\beta$$

γ) $\dfrac{1-\alpha-\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}}\cdot\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^3}=1$

δ) $\dfrac{\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2+1)}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\dfrac{3+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}{\frac{x-1}{x+1}+\frac{x^2-1}{x^2+1}}\cdot\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1$

2.145 Να αποδείξετε ότι:

α) $\left[\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)x^2\right]:\left[\left(\dfrac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)\right]=2x$

β) $x^2(y-\omega)+y^2(\omega-x)+\omega^2(x-y)=$
$=-(x-y)(y-\omega)(\omega-x)$

γ) $\dfrac{x^2-3}{(x-y)(x-\omega)}+\dfrac{y^2-3}{(y-\omega)(y-x)}+$
$+\dfrac{\omega^2-3}{(\omega-x)(\omega-y)}=1$

Αναλογίες

2.146 Να αποδείξετε ότι:

α) αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{3}$, τότε $\dfrac{3\alpha+8\beta}{9\alpha+4\beta}=1$,

β) αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$, τότε $\dfrac{2\alpha+3\gamma}{2\beta+3\delta}=\dfrac{5\alpha-4\gamma}{5\beta-4\delta}$.

2.147 Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3=\frac{\alpha}{\delta}$$

2.148 Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\delta}{\alpha}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}=1$$

2.149 Αν $\alpha\beta=\gamma\delta$, όπου α, β, γ, δ είναι αριθμοί διαφορετικοί από το μηδέν, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\gamma^2}+\frac{\beta^2}{\beta^2+\delta^2}$$

2.150 Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν η περίμετρός του είναι 30 και οι πλευρές είναι ανάλογες προς τους αριθμούς:

4, 5 και 6

2.151 Αν οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 3, 4 και 5, να βρείτε τα μέτρα των γωνιών αυτών.

2.152 Αν είναι:

$$\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha \quad\text{και}\quad \frac{\lambda}{\alpha-\beta}=\frac{\mu}{\beta-\gamma}=\frac{\nu}{\alpha-\gamma}$$

να αποδείξετε ότι $\lambda+\mu=\nu$.

2.153 Αν είναι:

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega}\quad\text{και}\quad x+y+\omega\neq 0$$

να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3}{(x+y+\omega)^3}=\frac{\alpha\beta\gamma}{xy\omega}$$

Άρτιοι - Περιττοί ακέραιοι

2.154 Να αποδείξετε ότι:

α) το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος,

β) το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος,

γ) το άθροισμα ενός άρτιου αριθμού και ενός περιττού είναι περιττός.

2.155 Να αποδείξετε ότι:

α) το γινόμενο δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος,

β) το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι περιττός,

γ) το γινόμενο ενός άρτιου αριθμού με έναν περιττό είναι άρτιος.

2.156 Να αποδείξετε ότι:

α) αν ο α είναι άρτιος ακέραιος, τότε και ο α^2 είναι άρτιος,

β) αν ο α^2 είναι περιττός, τότε και ο α είναι περιττός.

2.157 Να αποδείξετε ότι:

α) ο αριθμός $\nu(\nu+1)$ είναι άρτιος για κάθε $\nu\in\mathbb{Z}$,

β) αν ο α είναι περιττός, τότε ο α^2 έχει τη μορφή:

$$8\nu+1$$

γ) αν οι α και β είναι περιττοί, τότε ο $\alpha^2-\beta^2$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

2.158 Δίνονται οι διαδοχικοί ακέραιοι α, β, γ και δ. Να αποδείξετε ότι:

α) ο αριθμός $\beta\delta-\alpha\gamma$ είναι περιττός,

β) ο αριθμός $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ είναι άρτιος, αλλά δε διαιρείται με τον 4,

γ) ο αριθμός $\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{2}$ είναι ακέραιος.

Απαγωγή σε άτοπο

2.159 Να αποδείξετε ότι αν το γινόμενο 5 αριθμών είναι διάφορο του μηδενός, τότε όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι διάφοροι από το μηδέν.

2.160 Να αποδείξετε ότι:

α) το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού αριθμού είναι άρτιος αριθμός,

β) αν το γινόμενο δύο ακεραίων είναι περιττός, τότε και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί.

2.161 Να αποδείξετε ότι όταν το άθροισμα ή το γινόμενο κάποιων ακέραιων αριθμών είναι περιττός, τότε ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι περιττός.

2.162 Να αποδείξετε ότι:

α) ο $\sqrt{3}$ είναι άρρητος,

β) αν ο αριθμός $\alpha+\sqrt{3}$ είναι ρητός, τότε ο α είναι άρρητος.

3 Διάταξη πραγματικών αριθμών

Θεωρία και εφαρμογές

Α1. Ιδιότητες της διάταξης

Α. Η έννοια της διάταξης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι γνωστή από μικρότερες τάξεις. Θυμίζουμε όμως ότι:

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β και γράφουμε $\boldsymbol{\alpha > \beta}$, όταν η διαφορά $\boldsymbol{\alpha - \beta}$ είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε $\boldsymbol{\beta < \alpha}$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:

$$\boldsymbol{\alpha > \beta \iff \alpha - \beta > 0}$$

- Γεωμετρικά, η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β.
- Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\boldsymbol{\alpha \geq \beta}$ και διαβάζουμε **«α μεγαλύτερος ή ίσος του β»**.

Β. Για τη διάταξη των πραγματικών αριθμών ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

1.
- $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \implies \alpha + \beta > 0$
- $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \implies \alpha + \beta < 0$

2.
- α, β ομόσημοι $\iff \alpha\beta > 0 \iff \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$
- α, β ετερόσημοι $\iff \alpha\beta < 0 \iff \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$

3. $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$
Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$ ή όταν $\alpha = \beta$ αντίστοιχα.

Από την τελευταία ιδιότητα εύκολα προκύπτουν και οι ισοδυναμίες:

$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = 0 \iff (\alpha = 0 \text{ και } \beta = 0)}$$

$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 > 0 \iff (\alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0)}$$

Εφαρμογή 3.1

Αν $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδειχθεί ότι ο αριθμός:

$$\boldsymbol{A = (\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha + \beta - 2\gamma)}$$

είναι αρνητικός.

Λύση

Για να βρούμε το πρόσημο του Α, δηλαδή αν ο Α είναι θετικός ή αρνητικός, θα βρούμε πρώτα το πρόσημο του κάθε παράγοντα ξεχωριστά. Επειδή $\alpha < \beta < \gamma$, θα είναι:

- $\alpha < \beta \iff \alpha - \beta < 0$
- $\gamma > \beta \iff \gamma - \beta > 0$
- $\alpha < \gamma \iff \alpha - \gamma < 0$
- $\alpha < \gamma$ και $\beta < \gamma$, οπότε $\alpha + \beta < 2\gamma \iff \alpha + \beta - 2\gamma < 0$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι παράγοντες $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$ και $\alpha + \beta - 2\gamma$ του Α είναι αρνητικοί, και επειδή το πλήθος τους είναι περιττό, συμπεραίνουμε ότι ο Α είναι αρνητικός αριθμός.

Εφαρμογή 3.2

Να βρεθούν οι αριθμοί α, β στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\boldsymbol{(\alpha - 1)^2 + (\beta + 2)^2 = 0}$

β) $\boldsymbol{\alpha^2 - 4\alpha + \beta^2 + 6\beta + 13 = 0}$

γ) $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 + 25 = 6\alpha - 8\beta}$

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι $\alpha^2+\beta^2=0$, αν και μόνο αν:

$$\alpha=\beta=0$$

Επομένως:

$$(\alpha-1)^2+(\beta+2)^2=0 \iff$$
$$\iff (\alpha-1=0 \ \text{και} \ \beta+2=0) \iff$$
$$\iff (\alpha=1 \ \text{και} \ \beta=-2)$$

Ισχύει ότι:
- $\alpha^2+\beta^2=0 \iff \alpha=\beta=0$
- $\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu}=0 \iff \alpha=\beta=0$
- $\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu}+\gamma^{2\nu}=0 \iff$
  $\iff \alpha=\beta=\gamma=0, \ \nu\in\mathbb{N}^*$

β) Προσπαθούμε τη δοσμένη σχέση να τη γράψουμε στη μορφή $x^2+y^2=0$. Είναι:

$$\alpha^2-4\alpha+\beta^2+6\beta+13=0 \iff$$
$$\iff (\alpha^2-4\alpha)+(\beta^2+6\beta)+4+9=0 \iff$$
$$\iff (\alpha^2-4\alpha+4)+(\beta^2+6\beta+9)=0 \iff$$
$$\iff (\alpha-2)^2+(\beta+3)^2=0 \iff$$
$$\iff (\alpha-2=0 \ \text{και} \ \beta+3=0) \iff (\alpha=2 \ \text{και} \ \beta=-3)$$

Χρήσιμες ταυτότητες
- $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$
- $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$

γ) Εργαζόμαστε όπως και στο προηγούμενο ερώτημα:

$$\alpha^2+\beta^2+25=6\alpha-8\beta \iff \alpha^2+\beta^2+25-6\alpha+8\beta=0 \iff$$
$$\iff (\alpha^2-6\alpha)+(\beta^2+8\beta)+25=0 \iff$$
$$\iff (\alpha^2-2\cdot3\alpha)+(\beta^2+2\cdot4\beta)+9+16=0 \iff$$
$$\iff (\alpha^2-2\cdot3\alpha+9)+(\beta^2+2\cdot4\beta+16)=0 \iff$$
$$\iff (\alpha-3)^2+(\beta+4)^2=0 \iff$$
$$\iff (\alpha-3=0 \ \text{και} \ \beta+4=0) \iff (\alpha=3 \ \text{και} \ \beta=-4)$$

Α2. Διάταξη και πράξεις

Στηριζόμενοι στην ισοδυναμία $\boldsymbol{\alpha>\beta \iff \alpha-\beta>0}$, μπορούμε να αποδείξουμε τις επόμενες ιδιότητες των ανισοτήτων:

1. $(\alpha>\beta \ \text{και} \ \beta>\gamma) \implies \alpha>\gamma$

2.
- $\alpha>\beta \iff \alpha+\gamma>\beta+\gamma$
- Αν $\gamma>0$, τότε $\alpha>\beta \iff \alpha\gamma>\beta\gamma$
- Αν $\gamma<0$, τότε $\alpha>\beta \iff \alpha\gamma<\beta\gamma$

3.
- $(\alpha>\beta \ \text{και} \ \gamma>\delta) \implies \alpha+\gamma>\beta+\delta$
- Για **θετικούς** αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:
  $(\alpha>\beta \ \text{και} \ \gamma>\delta) \implies \alpha\gamma>\beta\delta$

Η ιδιότητα 3 ισχύει και για περισσότερες ανισότητες. Συγκεκριμένα:
- $(\alpha_1>\beta_1 \ \text{και} \ \alpha_2>\beta_2 \ \text{και} \ \ldots \ \text{και} \ \alpha_\nu>\beta_\nu) \implies \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu>\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu$
- Αν, επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι **θετικοί** αριθμοί, τότε:
  $(\alpha_1>\beta_1 \ \text{και} \ \alpha_2>\beta_2 \ \text{και} \ \ldots \ \text{και} \ \alpha_\nu>\beta_\nu) \implies \alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu>\beta_1\beta_2\cdot\ldots\cdot\beta_\nu$

4. Για **θετικούς** αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύουν οι ισοδυναμίες:
- $\alpha>\beta \iff \alpha^\nu>\beta^\nu$
- $\alpha^\nu=\beta^\nu \iff \alpha=\beta$

Αξίζει να επισημάνουμε ότι:
- Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες με την ίδια φορά.
- Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες με θετικούς όρους και την ίδια φορά.
- Όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε μια ανισότητα με έναν αρνητικό αριθμό, τότε η φορά της ανισότητας αλλάζει.
- Αν ο φυσικός αριθμός ν είναι περιττός, τότε $\alpha^\nu<\beta^\nu \iff \alpha<\beta$.
- Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$.
- Όταν πολλαπλασιάζουμε ανισότητες με την ίδια φορά, εξασφαλίζουμε πρώτα ότι όλα τα μέλη είναι θετικοί αριθμοί.

Εφαρμογή 3.3

Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $1<\alpha<2$ και $2<\beta<5$, να αποδειχθεί ότι:

α) $\boldsymbol{3<\alpha+\beta<7}$ **β)** $\boldsymbol{7<3\alpha+2\beta<16}$

γ) $\boldsymbol{0<\beta-\alpha<4}$ **δ)** $\boldsymbol{1<\frac{\beta}{\alpha}<5}$

Λύση

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

α) Είναι $1<\alpha<2$ και $2<\beta<5$.

Προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε:

$$1+2<\alpha+\beta<2+5 \iff 3<\alpha+\beta<7$$

Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$, τότε:
- $\alpha+\gamma<\beta+\delta$
- $\lambda\alpha<\lambda\beta$, αν $\lambda>0$
- $\lambda\alpha>\lambda\beta$, αν $\lambda<0$

β) Επειδή $1 < \alpha < 2$ και $2 < \beta < 5$ παίρνουμε:

$$3\cdot 1 < 3\alpha < 3\cdot 2 \iff 3 < 3\alpha < 6,\quad 2\cdot 2 < 2\beta < 2\cdot 5 \iff 4 < 2\beta < 10$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$3 + 4 < 3\alpha + 2\beta < 6 + 10 \iff 7 < 3\alpha + 2\beta < 16$$

γ) Είναι $1 < \alpha < 2$, οπότε $-2 < -\alpha < -1$. (Πολλαπλασιάσαμε με $-1 < 0$, οπότε η φορά άλλαξε.) Έτσι οι ανισότητες $2 < \beta < 5$ και $-2 < -\alpha < -1$ με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

> Ποτέ δε διαιρούμε, ούτε αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη που έχουν την ίδια φορά.

$$2 + (-2) < \beta - \alpha < 5 - 1 \iff 0 < \beta - \alpha < 4$$

δ) Είναι $1 < \alpha < 2$ και επειδή έχουμε θετικά μέλη, παίρνουμε $\frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1}$.

Αυτή με τη $2 < \beta < 5$, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη (όλοι οι αριθμοί είναι θετικοί) δίνουν:

$$\frac{1}{2}\cdot 2 < \frac{1}{\alpha}\cdot \beta < 1\cdot 5 \iff 1 < \frac{\beta}{\alpha} < 5$$

Εφαρμογή 3.4

Αν $3 < \alpha < 4$ και $2 < \beta < 3$, να αποδειχθεί ότι:

α) $3 < \dfrac{6\alpha + 3\beta}{3\alpha - 2\beta} < 11$ **β)** $-9 < \dfrac{6\alpha + \beta}{3\beta - 4\alpha} < -2$

Λύση

α) Με οδηγό τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος, και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων, προκύπτουν τα παρακάτω.

Είναι $3 < \alpha < 4$ και $2 < \beta < 3$, οπότε:

- $18 < 6\alpha < 24$ και $6 < 3\beta < 9$

Με πρόσθεση των παραπάνω ανισοτήτων παίρνουμε:

$$24 < 6\alpha + 3\beta < 33 \qquad (1)$$

- $9 < 3\alpha < 12$ και $-6 < -2\beta < -4$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$3 < 3\alpha - 2\beta < 8 \iff \frac{1}{3} > \frac{1}{3\alpha - 2\beta} > \frac{1}{8} \iff \frac{1}{8} < \frac{1}{3\alpha - 2\beta} < \frac{1}{3} \qquad (2)$$

Επειδή τα μέλη των ανισοτήτων (1) και (2) είναι θετικά, μπορούμε να τα πολλαπλασιάσουμε, οπότε:

$$24\cdot\frac{1}{8} < \frac{6\alpha + 3\beta}{3\alpha - 2\beta} < 33\cdot\frac{1}{3} \iff 3 < \frac{6\alpha + 3\beta}{3\alpha - 2\beta} < 11$$

β) Εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο.

Α3. Σύγκριση αριθμών

Α. Έστω α και β δύο πραγματικοί αριθμοί. Ισχύει ότι:

- $\alpha > \beta \iff \alpha - \beta > 0$
- $\alpha < \beta \iff \alpha - \beta < 0$

Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο αριθμούς Α και Β ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1ο βήμα

Θεωρούμε τη διαφορά $A - B$ των αριθμών αυτών.

2ο βήμα

Εκτελώντας τις πιθανές πράξεις προσπαθούμε να γράψουμε τη διαφορά $A - B$ σε τέτοια μορφή, ώστε να μπορούμε να συμπεράνουμε αν είναι:

$$A - B \geq 0 \quad \text{ή} \quad A - B \leq 0$$

Έτσι:

- αν $A - B \geq 0$, τότε $A \geq B$,
- αν $A - B \leq 0$, τότε $A \leq B$.

Β. Σε ορισμένες περιπτώσεις, που είναι $A, B > 0$ και οι αριθμοί Α και Β είναι γινόμενα ή δυνάμεις, αντί να θεωρήσουμε τη διαφορά $A - B$ θεωρούμε το πηλίκο $\Pi = \frac{A}{B}$ και το συγκρίνουμε με τη μονάδα. Έτσι:

- αν $\Pi \geq 1$, τότε $A \geq B$,
- αν $\Pi \leq 1$, τότε $A \leq B$.

Εφαρμογή 3.5

Να συγκριθούν οι αριθμοί:

α) $A = (\alpha + \beta)^2$ **και** $B = 4\alpha\beta$ **β)** $A = (\alpha + \beta)^2$ **και** $B = 2(\alpha^2 + \beta^2)$

Σε ποια περίπτωση οι αριθμοί Α και Β είναι ίσοι;

Λύση

α) Για να συγκρίνουμε τους αριθμούς $A = (\alpha + \beta)^2$ και $B = 4\alpha\beta$, θα συγκρίνουμε τη διαφορά $A - B$ με το μηδέν. Είναι:

$$A - B = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$$

Επειδή $A - B \geq 0$, είναι $A \geq B$.

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$(\alpha - \beta)^2 = 0 \iff \alpha - \beta = 0 \iff \alpha = \beta$$

Επομένως οι αριθμοί Α και Β είναι ίσοι, μόνο αν $\alpha = \beta$.

β) Θα θεωρήσουμε τη διαφορά $A - B$ και θα προσπαθήσουμε να διαπιστώσουμε αν είναι $A - B \geq 0$ (οπότε $A \geq B$) ή $A - B \leq 0$ (οπότε $A \leq B$).

Είναι:

$$A - B = (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 =$$
$$= -\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = -(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$$
$$= -(\alpha - \beta)^2 \leq 0 \qquad (1)$$

διότι $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ και έτσι $-(\alpha - \beta)^2 \leq 0$. Είναι λοιπόν $A - B \leq 0$, οπότε $A \leq B$.

Για να είναι $A = B$ πρέπει:

$$A - B = 0 \overset{(1)}{\iff} -(\alpha - \beta)^2 = 0 \iff \alpha = \beta$$

Επομένως οι αριθμοί A και B είναι ίσοι, μόνο αν $\alpha = \beta$.

Εφαρμογή 3.6

Αν $A = \alpha^2 + 2\beta + 1$ και $B = 2\alpha - 1 - \beta^2$, να συγκριθούν οι αριθμοί A και B. Πότε οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι;

Λυση

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε το πρόσημο της διαφοράς $A - B$. Είναι:

$$A - B = (\alpha^2 + 2\beta + 1) - (2\alpha - 1 - \beta^2) = \alpha^2 + 2\beta + 1 - 2\alpha + 1 + \beta^2 =$$
$$= (\alpha^2 - 2\alpha + 1) + (\beta^2 + 2\beta + 1) = (\alpha - 1)^2 + (\beta + 1)^2 \geq 0$$

διότι $(\alpha - 1)^2 \geq 0$ και $(\beta + 1)^2 \geq 0$.

Είναι λοιπόν $A - B \geq 0$, οπότε $A \geq B$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι για να είναι $A = B$, θα πρέπει:

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta + 1)^2 = 0 \iff ((\alpha - 1)^2 = 0 \text{ και } (\beta + 1)^2 = 0) \iff$$
$$\iff (\alpha = 1 \text{ και } \beta = -1)$$

Εφαρμογή 3.7

Να συγκριθούν οι αριθμοί $\alpha = 2^{450}$ και $\beta = 3^{300}$.

Λυση

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων. Είναι:

- $\alpha = 2^{450} = 2^{3 \cdot 150} = (2^3)^{150} = 8^{150}$
- $\beta = 3^{300} = 3^{2 \cdot 150} = (3^2)^{150} = 9^{150}$

Επειδή λοιπόν είναι $8 < 9$, θα είναι και $8^{150} < 9^{150}$, δηλαδή $\alpha < \beta$.

Σημείωση

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ και να το συγκρίνουμε με το 1.

Είναι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2^{450}}{3^{300}} = \frac{(2^3)^{150}}{(3^2)^{150}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{150} < 1, \text{ διότι } \frac{8}{9} < 1$$

Επομένως έχουμε $\alpha < \beta$.

Β. Απόδειξη ανισοτήτων

Α. Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $A > B$ (ή $A < B$ κ.λπ.) χρησιμοποιούμε συνήθως τη **μέθοδο της διαφοράς**. Για τον λόγο αυτό θεωρούμε τη διαφορά $\Delta = A - B$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι $\Delta > 0$ (ή $\Delta < 0$).
Εργαζόμαστε κυρίως με ισοδυναμίες. Προσπαθούμε με πράξεις ή παραγοντοποίηση να φέρουμε την ανισότητα $\Delta > 0$ σε μια μορφή, από την οποία να προκύπτει άμεσα ότι ισχύει.

Β. **α)** Σε ορισμένες περιπτώσεις η απόδειξη ανισοτήτων δεν προκύπτει αν παραγοντοποιήσουμε το πρώτο μέλος (αφού πρώτα φέρουμε σε αυτό όλους τους όρους από το δεύτερο μέλος).
Στις περιπτώσεις αυτές μια χρήσιμη ενέργεια είναι να γράψουμε το πρώτο μέλος ως άθροισμα άρτιων δυνάμεων (για παράδειγμα τετραγώνων) δύο ή περισσότερων παραστάσεων. Με βάση λοιπόν τις προφανείς ανισότητες:

$$A^2 + B^2 \geq 0 \quad \text{και} \quad A^2 + B^2 + \Gamma^2 \geq 0 \qquad (1)$$

αιτιολογούμε και την ισχύ των δοσμένων ανισοτήτων.

β) Σε ειδικές περιπτώσεις, αντί της (1) καταλήγουμε σε μια ανισότητα της μορφής:

$$\kappa A^2 + \lambda B^2 + \mu \Gamma^2 \geq 0 \qquad (2)$$

με $\kappa, \lambda, \mu \geq 0$, η οποία επίσης ισχύει, αφού το πρώτο μέλος είναι άθροισμα μη αρνητικών όρων.
Τονίζουμε ότι η ισότητα στη σχέση (1) ισχύει, μόνο αν καθένας από τους A, B και Γ είναι ίσος με μηδέν. Το ίδιο ισχύει και για την ανισότητα (2), αρκεί οι κ, λ και μ να είναι θετικοί (ή γενικότερα ομόσημοι).

Γ. Σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τις επόμενες βασικές ανισότητες:

- $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

- ♦ $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ για $\alpha > 0$ και $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$ για $\alpha < 0$
- ♦ $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$ και $3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2$

Εφαρμογή 3.8

Να αποδειχθεί ότι $\frac{\alpha^4 + \beta^4}{2} \geq \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Λυση

Είναι:

$$\frac{\alpha^4 + \beta^4}{2} \geq \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) \overset{(2>0)}{\Longleftrightarrow} \alpha^4 + \beta^4 \geq 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \alpha^4 + \beta^4 \geq 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha^2\beta^2 \Longleftrightarrow \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 \geq 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \geq 0 \Longleftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha - \beta)^2 \geq 0$$

Η τελευταία όμως ανισότητα ισχύει, διότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 0 \text{ και } (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Άρα ισχύει και η δοσμένη ανισότητα.

Εφαρμογή 3.9

Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδειχθεί ότι $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λυση

Θα εργαστούμε με ισοδυναμίες. Είναι:

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3 \Longleftrightarrow \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{2} \geq \frac{(\alpha + \beta)^3}{8} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 4(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - (\alpha + \beta)^3 \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha + \beta)[4(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - (\alpha + \beta)^2] \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha + \beta)(4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2) \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha + \beta)(3\alpha^2 - 6\alpha\beta + 3\beta^2) \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 3(\alpha + \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 3(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0$$

η οποία ισχύει, διότι:

$$\alpha + \beta \geq 0 \text{ και } (\alpha - \beta)^2 \geq 0$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$3(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 = 0 \Longleftrightarrow (\alpha + \beta = 0 \text{ ή } \alpha - \beta = 0) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha = -\beta \text{ ή } \alpha = \beta)$$

Αλλά $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, οπότε η σχέση $\alpha + \beta = 0$, δίνει $\alpha = \beta = 0$.

Τελικά πρέπει $\alpha = \beta$.

Εφαρμογή 3.10

Να αποδειχθεί ότι $8\alpha\beta(1 - \alpha\beta) \leq (1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Λυση

Είναι:

$$8\alpha\beta(1 - \alpha\beta) \leq (1 + \alpha^2)(1 + \beta^2) \Longleftrightarrow 8\alpha\beta - 8\alpha^2\beta^2 \leq 1 + \beta^2 + \alpha^2 + \alpha^2\beta^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 9\alpha^2\beta^2 - 8\alpha\beta + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) + (9\alpha^2\beta^2 - 6\alpha\beta + 1) \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + (3\alpha\beta - 1)^2 \geq 0$$

η οποία ισχύει, διότι $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ και $(3\alpha\beta - 1)^2 \geq 0$.

Εφαρμογή 3.11

Να αποδειχθεί ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3 \geq 2(\alpha + \beta + \gamma)$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λυση

Θα εργαστούμε με τη μέθοδο των ισοδυναμιών:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3 \geq 2(\alpha + \beta + \gamma) \Longleftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3 \geq 2\alpha + 2\beta + 2\gamma \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1 + 1 + 1 - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha^2 + 1 - 2\alpha) + (\beta^2 + 1 - 2\beta) + (\gamma^2 + 1 - 2\gamma) \geq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 + (\gamma - 1)^2 \geq 0 \qquad (1)$$

Η τελευταία όμως ανισότητα ισχύει, διότι το πρώτο μέλος είναι άθροισμα άρτιων δυνάμεων.

Η ισότητα $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 + (\gamma - 1)^2 = 0$ ισχύει μόνο όταν:

$$\begin{Bmatrix} \alpha - 1 = 0 \\ \beta - 1 = 0 \\ \gamma - 1 = 0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Παρατήρηση

Τονίζουμε γενικά ότι:

$$\alpha^{2\nu} + \beta^{2\nu} + \gamma^{2\nu} + \ldots + \mu^{2\nu} \geq 0 \quad \text{για κάθε } \nu \in \mathbb{N}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \mu = 0$, δηλαδή όταν όλες οι βάσεις είναι ίσες με μηδέν.

Εφαρμογή 3.12

Αν α και β είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\alpha}{\beta^2} + \dfrac{\beta}{\alpha^2} \geq \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$.

Λύση

Επειδή οι αριθμοί α και β είναι διαφορετικοί από το μηδέν και $\alpha^2\beta^2 > 0$, παίρνουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} \geq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \iff \alpha^2\beta^2\left(\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}\right) \geq \alpha^2\beta^2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \iff$$
$$\iff \alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta \iff (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \geq \alpha\beta(\alpha+\beta) \iff$$
$$\iff (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha+\beta) \geq 0 \iff$$
$$\iff (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta) \geq 0 \iff$$
$$\iff (\alpha+\beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \geq 0 \iff$$
$$\iff (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 \geq 0$$

που ισχύει, διότι $\alpha + \beta > 0$ και $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$.

Εφαρμογή 3.13

Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$ και $y^2 - 6x = 7$, $10y - z^2 = 1$ και $14z - x^2 = 89$, να αποδειχθεί ότι:

$$\mathbf{x = 3, \quad y = 5, \quad z = 7}$$

Λύση

Συχνά σε προβλήματα που μας δίνονται δύο ή περισσότερες σχέσεις, συνηθίζουμε να προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις αυτές. Στην άσκησή μας, θα γράψουμε πρώτα τα δεδομένα σε πιο απλή μορφή:

- $y^2 - 6x = 7 \iff y^2 - 6x - 7 = 0$
- $10y - z^2 = 1 \iff z^2 - 10y + 1 = 0$
- $14z - x^2 = 89 \iff x^2 - 14z + 89 = 0$

Με πρόσθεση λοιπόν των σχέσεων αυτών κατά μέλη παίρνουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y - 14z + 83 = 0 \qquad (1)$$

Επειδή:

$$6x = 2\cdot 3x, \quad 10y = 2\cdot 5y, \quad 14z = 2\cdot 7z \quad \text{και}$$
$$3^2 + 5^2 + 7^2 = 9 + 25 + 49 = 83$$

η (1) γράφεται:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y - 14z + 9 + 25 + 49 = 0 \iff$$
$$\iff (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25) + (z^2 - 14z + 49) = 0 \iff$$
$$\iff (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 = 0 \iff$$
$$\iff (x - 3 = 0 \text{ και } y - 5 = 0 \text{ και } z - 7 = 0) \iff$$
$$\iff (x = 3 \text{ και } y = 5 \text{ και } z = 7)$$

Οι τιμές αυτές είναι όντως δεκτές, διότι επαληθεύουν και τις τρεις δοσμένες ισότητες.

Εφαρμογή 3.14

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 6}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Έχουμε όμως $\alpha\beta\gamma = 1$, οπότε:

$$\alpha\beta = \frac{1}{\gamma}, \quad \beta\gamma = \frac{1}{\alpha} \quad \text{και} \quad \gamma\alpha = \frac{1}{\beta}$$

Επομένως:

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 6 \iff$$
$$\iff \alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq 6 \iff$$
$$\iff \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 6 \qquad (1)$$

Όμως:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2, \quad \beta + \frac{1}{\beta} \geq 2 \quad \text{και} \quad \gamma + \frac{1}{\gamma} \geq 2$$

Οι σχέσεις αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν την (1) και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Επειδή η σχέση $x + \dfrac{1}{x} = 2$ ισχύει μόνο για $x = 1$, η ισότητα ισχύει μόνο αν:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

Βοηθητικές ανισότητες

- $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$ και $\beta + \dfrac{1}{\beta} \leq -2$ για κάθε $\alpha > 0$ και $\beta < 0$
- $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2$ όπου α και β ομόσημοι αριθμοί
- αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$

Η κυκλική μέθοδος

Σε ορισμένες ανισότητες με τρεις ή περισσότερες μεταβλητές είναι συνήθως ασύμφορο να εκτελέσουμε τις πράξεις. Για τον λόγο αυτό προσπαθούμε αρχικά να βρούμε μια βοηθητική ανισότητα με δύο μεταβλητές.

Την ανισότητα αυτή την εφαρμόζουμε κυκλικά, δηλαδή αλλάζοντας μόνο τις μεταβλητές, και παίρνουμε δύο ακόμα παρόμοιες ανισότητες. Τις τρεις ανισότητες που προκύπτουν τις προσθέτουμε ή τις πολλαπλασιάζουμε ανάλογα, ώστε να πάρουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

Εφαρμογή 3.15

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

α) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le \dfrac{\alpha+\beta}{4}$

β) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \ge \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

γ) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \le \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

δ) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \ge \alpha+\beta+\gamma$

Λυση

α) Επειδή $\alpha, \beta > 0$, είναι $\alpha+\beta > 0$. Επομένως:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{4} \iff 4(\alpha+\beta)\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le 4(\alpha+\beta)\frac{\alpha+\beta}{4} \iff$$
$$\iff 4\alpha\beta \le (\alpha+\beta)^2 \iff \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \ge 4\alpha\beta \iff$$
$$\iff \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta \ge 0 \iff \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \ge 0 \iff$$
$$\iff (\alpha-\beta)^2 \ge 0$$

η οποία ισχύει.

β) Επειδή $\alpha+\beta > 0$, παίρνουμε:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \ge \frac{\alpha+\beta}{2} \iff 2(\alpha+\beta)\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \ge 2(\alpha+\beta)\frac{\alpha+\beta}{2} \iff$$
$$\iff 2(\alpha^2+\beta^2) \ge (\alpha+\beta)^2 \iff 2\alpha^2+2\beta^2 \ge \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \iff$$
$$\iff \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \ge 0 \iff (\alpha-\beta)^2 \ge 0$$

η οποία ισχύει.

γ) Είναι φανερό ότι δεν θα επιχειρήσουμε να κάνουμε τις πράξεις. Έχουμε όμως δει στο ερώτημα (α) ότι:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{4}$$

Αυτή κυκλικά δίνει τις ανισότητες:

$$\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} \le \frac{\beta+\gamma}{4} \quad \text{και} \quad \frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \le \frac{\gamma+\alpha}{4}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις προηγούμενες τρεις ανισότητες και παίρνουμε:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \le \frac{\alpha+\beta}{4}+\frac{\beta+\gamma}{4}+\frac{\gamma+\alpha}{4} \iff$$
$$\iff \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \le \frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{4} \iff$$
$$\iff \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \le \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

δ) Με βάση το ερώτημα (β) παίρνουμε κυκλικά τις ανισότητες:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \ge \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma} \ge \frac{\beta+\gamma}{2}, \quad \frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \ge \frac{\gamma+\alpha}{2}$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη και απλοποιώντας το β΄ μέλος δίνουν:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \ge \alpha+\beta+\gamma$$

διότι:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\gamma+\alpha}{2} = \frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{2} = \alpha+\beta+\gamma$$

Χρήσιμες ανισότητες

Για την απόδειξη πιο δύσκολων ανισοτήτων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης τις παρακάτω βασικές ανισότητες:

- $\alpha^2+\beta^2 \ge 2\alpha\beta$ και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
- $(\alpha+\beta)^2 \ge 4\alpha\beta$ και $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \ge 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
- $2(\alpha^2+\beta^2) \ge (\alpha+\beta)^2$ και $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \ge (\alpha+\beta+\gamma)^2$
- $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} \ge 2$, αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι
- $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} \le -2$, αν οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι
- $\alpha+\dfrac{1}{\alpha} \ge 2$ για $\alpha > 0$ και $\alpha+\dfrac{1}{\alpha} \le -2$ για $\alpha < 0$
- $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta} \ge \dfrac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$, $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma} \ge \dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$ με $\alpha, \beta, \gamma > 0$

Εφαρμογή 3.16

Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β και γ. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta)}$

β) $\boldsymbol{\dfrac{1}{\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma}+\dfrac{1}{\beta^3+\gamma^3+\alpha\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma^3+\alpha^3+\alpha\beta\gamma} \leq \dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}}$

Λυση

α) Στο πρώτο ερώτημα θα εργαστούμε με ισοδυναμίες. Είναι:

$$\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta) \iff (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha+\beta) \geq 0 \iff$$

$$\iff (\alpha+\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2) \geq 0 \iff (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 \geq 0$$

η οποία ισχύει.

Είναι φανερό ότι η ισότητα ισχύει, μόνο αν $\alpha=\beta$.

β) Θα στηριχθούμε, όπως είναι φυσικό, στο ερώτημα (α). Είναι:

- $\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta) \iff \alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma \geq \alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta\gamma \iff$

  $\iff \alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma \geq \alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) \iff$

  $\iff \dfrac{1}{\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma} \leq \dfrac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)} \qquad (1)$

  αφού και τα δύο μέλη είναι θετικοί αριθμοί.

- Όμοια παίρνουμε:

$$\frac{1}{\beta^3+\gamma^3+\alpha\beta\gamma} \leq \frac{1}{\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \qquad (2)$$

και

$$\frac{1}{\gamma^3+\alpha^3+\alpha\beta\gamma} \leq \frac{1}{\gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma)} \qquad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και (3), οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{\beta^3+\gamma^3+\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma^3+\alpha^3+\alpha\beta\gamma} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}+\frac{1}{\gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma)} =$$

$$= \frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

Δηλαδή:

$$\frac{1}{\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{\beta^3+\gamma^3+\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma^3+\alpha^3+\alpha\beta\gamma} \leq \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

Ασκήσεις για εξάσκηση

Α. Ιδιότητες της διάταξης

3.17 Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$, να αποδείξετε ότι:

α) $2\alpha+3\gamma<2\beta+3\delta$ **β)** $2\delta-3\alpha>2\gamma-3\beta$

3.18 Αν $\alpha>2$ και $\beta<1$, να αποδείξετε ότι:

α) $3(\alpha-3)>\alpha-5$ **β)** $\alpha\beta+2<2\beta+\alpha$

3.19 Αν $\alpha<\beta<\gamma$, να βρείτε τα πρόσημα των παραστάσεων:

α) $A=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)$

β) $B=(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)$

γ) $\Gamma=(\alpha^2+1)(\alpha-\beta)$

δ) $\Delta=(\alpha^4+\beta^6+2)(\beta-\gamma)$

3.20 Αν $\alpha<\beta<\gamma$, να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω παραστάσεων.

α) $A=(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)^4$

β) $B=(\alpha-\beta)^3(\beta-\gamma)^5$

γ) $\Gamma=(\beta-\gamma)^{2012}(\gamma-\alpha)^{2014}$

δ) $\Delta=\dfrac{(\alpha-\beta)^{2000}}{(\beta-\gamma)^{2013}}$

3.21 Αν $\alpha<1<\beta$, να βρείτε τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων.

α) $A=(\alpha-\beta)(\alpha-1)$

β) $B=(\alpha-1)(1-\beta)(\beta-\alpha)$

γ) $\Gamma=(\alpha^2+1)(\beta-1)$

δ) $\Delta=(\alpha^4+\beta^8+2)(\alpha-\beta)(1-\alpha)$

3.22 Αν $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι:

α) $5\alpha-3<5\beta-3$ **β)** $-2\alpha+4>-2\beta+4$

γ) $\alpha<\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ **δ)** $\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta$

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

3.23 Αν $\alpha>3$ και $\beta>4$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\beta>12$ **β)** $(3-\alpha)(4-\beta)>0$

γ) $(\alpha+1)(\beta+1)>20$ **δ)** $4\alpha+3\beta<\alpha\beta+12$

3.24 Αν $\alpha<\beta<0$ και $x<y<0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}$ **β)** $\alpha x>\beta y$

3.25 Αν $1<x<3$ και $2<y<5$, να αποδείξετε ότι:

α) $3<x+y<8$ **β)** $4<2x+y<11$

γ) $-4<x-y<1$

3.26 Αν $2<\alpha<4$ και $1<\beta<3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:

α) $\alpha+\beta$ **β)** $-\beta$ **γ)** $\alpha-\beta$

δ) 2α **ε)** -3β **στ)** $2\alpha-3\beta$

ζ) $\alpha\beta$ **η)** $\dfrac{\alpha}{\beta}$ **θ)** $\dfrac{2\alpha+\beta}{\alpha-\beta+2}$

3.27 Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2\leq\alpha\leq4 \quad \text{και} \quad -4\leq\beta\leq-3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha-2\beta$ **β)** $\alpha^2-2\alpha\beta$ ***Τ.Θ.***

3.28 Αν $2\leq x\leq3$ και $1\leq y\leq2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ **β)** $2x-3y$ **γ)** $\dfrac{x}{y}$ ***Τ.Θ.***

3.29 Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ **β)** $x^2 + y^2$ ***Τ.Θ.***

3.30 Αν είναι $2 < \alpha < 4$ και $1 < \beta < 3$, να αποδείξετε ότι:

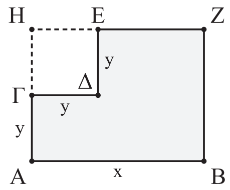
α) $5 < \alpha^2 + \beta^2 < 25$ **β)** $1 < \dfrac{2\alpha + \beta}{\alpha - \beta + 2} < 11$

3.31 Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$, τότε:

α) να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου,

β) αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. ***Τ.Θ.***

3.32 Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ με πλευρά y.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του χρωματισμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = 2x + 4y$$

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω χρωματισμένου σχήματος. ***Τ.Θ.***

Β. Σύγκριση αριθμών

3.33 Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:

α) $A = x^2 - xy,\ B = xy - y^2$

β) $A = \alpha^3 - \beta^3,\ B = \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta$ με $\alpha < \beta$

γ) $A = \dfrac{\alpha - 4}{\beta} + \dfrac{4}{\alpha\beta},\ B = \dfrac{4 - \beta}{\alpha} - \dfrac{4}{\alpha\beta}$ με $\alpha\beta < 0$

δ) $A = (\alpha + \beta)^2,\ B = 2(\alpha^2 + \beta^2)$

ε) $A = \alpha^2 + 2\beta + 1,\ B = 2\alpha - 1 - \beta^2$

3.34 Αν $\alpha > \beta > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$A = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta},\quad B = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^3 + \beta^3} \quad \text{και} \quad \Gamma = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

3.35 Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 < \alpha$,

β) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$$ ***Τ.Θ.***

3.36 Να διατάξετε τους θετικούς αριθμούς α, β και γ από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, αν ισχύει $3\alpha = 4\beta = 5\gamma$.

3.37 Να συγκρίνετε τους αριθμούς α και β στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\alpha = (2^6 \cdot 4^8)^5$ και $\beta = (8^5 \cdot 4^7)^4$

β) $\alpha = 5^{51}$ και $\beta = 2^{121} - 4^{60} - 2^{119}$

γ) Αν $\alpha = 2^{65}$ και $\beta = 5^{22} - 125^7$, να αποδείξετε ότι $\alpha > \beta$.

Γ. Απόδειξη ανισοτήτων

3.38 Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$ **β)** $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$

γ) $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

δ) $\alpha^4 + \beta^4 \geq 2\alpha^2\beta^2$

3.39 Να αποδείξετε ότι:

α) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2$ **β)** $(\alpha - \beta)^2 \geq 4\alpha\beta - 8\beta^2$

γ) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

δ) $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 \geq 4(\alpha x + \beta y)$

3.40 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$

β) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq \dfrac{3}{4}(\alpha + \beta)^2$

Πότε ισχύει η ισότητα στις παραπάνω ανισότητες;

3.41 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $\alpha^3 - \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha - \beta)$ με $\alpha \geq \beta$

β) $\alpha^3 - \beta^3 > (\alpha - \beta)^3$ με $\alpha > \beta > 0$

γ) $(\alpha^3 + 1)(\beta^3 + 1) \geq (\alpha^2\beta + 1)(\beta^2\alpha + 1)$, αν α και β είναι θετικοί αριθμοί

3.42 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \leq 1$

β) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \leq \dfrac{1}{2}$ με $\alpha \neq 0$

3.43 Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha + \beta)\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right) \geq 4$

β) $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta)$

3.44 Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \leq \dfrac{\alpha + \beta}{4}$ **β)** $\dfrac{4}{\alpha + \beta} \leq \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$

3.45 Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$ για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$

β) $\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \dfrac{\alpha^3 + \beta^3}{2}$ για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$

3.46 Να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 =$
$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$

β) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

για τυχαίους αριθμούς α, β, γ.

Πότε ισχύει η ισότητα;

3.47 Να αποδείξετε ότι:

α) $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha(\beta + \gamma)$

β) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq \alpha(\beta + \gamma - \alpha) +$
$+ \beta(\gamma + \alpha - \beta) + \gamma(\alpha + \beta - \gamma)$

3.48 Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ **β)** $\beta^2 + 6\beta + 11 > 0$

γ) $2\gamma^2 - 8\gamma + 16 > 0$

Δ. Εύρεση από ανισοτική σχέση

3.49 **α)** Αν είναι:

$$(\alpha - 2)^4 + (\beta + 3)^6 = 0$$

να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Αν είναι:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^4 + (7 - \omega)^8 + (z + 10)^{16} \leq 0$$

να βρείτε τους αριθμούς x, y, ω και z.

3.50 Να αποδείξετε ότι:

α) $x^2 + y^2 + 34 \geq 10x + 6y$

β) $x^2 + 2y^2 + 4\omega^2 \geq 2xy + 4y\omega$

3.51 Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 + 2 \geq -2(\alpha + \beta)$

β) $\alpha^2 + \beta^2 + 10 \geq 2\alpha + 6\beta$

γ) $\alpha^2 + \beta^2 + 13 \geq 4\alpha - 6\beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

δ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 14 \geq 2\alpha - 4\beta + 6\gamma$
για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Πότε ισχύει η ισότητα στις παραπάνω περιπτώσεις;

3.52 Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $\alpha^2 + 1 = 2\alpha$

β) $\alpha^2 + 9 \le 6\alpha$

γ) $\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha + \beta) + 2 = 0$

δ) $\alpha^2 + \beta^2 + 2 = 2(\alpha + \beta)$

ε) $\alpha^2 + \beta^2 + 13 = 2(3\beta - 2\alpha)$

στ) $(\alpha + 5)^2 + (\beta - 2)^2 = 4(\alpha + \beta + 1)$

ζ) $2\alpha^2 + \beta^2 + 4 \le 4\alpha\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)$

η) $\alpha^2 + \beta^2 \le 4(2\beta - \alpha - 5)$

θ) $(\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 4\alpha - 3(2\beta + 3)$

ι) $2\alpha^2 + \beta^2 \le 3(2\alpha - 3) - 2\alpha\beta$

3.53 Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 \le 0$$

3.54 Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$$

Για ποιες τιμές των α, β η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη;

3.55 Να βρείτε τους αριθμούς x, y και ω που ικανοποιούν συγχρόνως τις σχέσεις:

$$2x - \omega^2 \ge 1,\quad 2y - x^2 \ge 1 \quad \text{και} \quad 2\omega - y^2 \ge 1$$

3.56 Να βρείτε όλους τους αριθμούς x, y, ω που ικανοποιούν συγχρόνως τις σχέσεις:

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = y,\quad \frac{2y^2}{1+y^2} = \omega,\quad \frac{2\omega^2}{1+\omega^2} = x$$

3.57 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, αν είναι γνωστό ότι ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$\alpha - \beta^2 \ge \frac{1}{4},\quad \beta - \gamma^2 \ge \frac{1}{4},\quad \gamma - \alpha^2 \ge \frac{1}{4}$$

Ε. Ανισότητες με συνθήκη

3.58 Αν $0 < \alpha < 1 < \beta$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 - 1 < \alpha^2 - \alpha$ β) $\alpha + \beta > \alpha\beta + 1$

γ) $\alpha^3 < \alpha$

3.59 Να αποδείξετε ότι:

α) αν $\alpha < 1 < \beta$, τότε $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$,

β) αν $\alpha < -1$, τότε $\alpha^3 + 1 < \alpha^2 + \alpha$.

3.60 Αν $\alpha > 2$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 > 2\alpha^2 - \alpha + 2$ β) $\alpha^3 + 2\alpha > \alpha^2 + 2$

3.61 Αν $\alpha, \beta \ge 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{1+\alpha\beta} \le 2$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

3.62 Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $\alpha^2 - \beta^2 < 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha < \beta$ β) $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\alpha}$

γ) $\alpha^3 + \alpha < \beta^3 + \beta$ δ) $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha} < \beta^3 - \frac{1}{\beta}$

ε) $\alpha < \frac{3\alpha + 2\beta}{5} < \beta$ στ) $\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\alpha + 3\beta}{4} < \beta$

3.63 Αν $\alpha > 1$ και $\beta > 2$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 - \alpha^3 \le 0$ β) $\alpha + \beta + \alpha\beta + 1 > 0$

γ) $(\alpha - 1)(2 - \beta)(\alpha + \beta - 3)(\alpha\beta - 2) < 0$

3.64 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \ge 4$ β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \ge 16$ *Τ.Θ.*

3.65 Αν $\alpha + \beta < 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + \beta^3 \le \alpha\beta(\alpha + \beta)$

β) $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} \le \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta \ne 0$

3.66 Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{1}{\alpha} \ge 2$ για κάθε $\alpha > 0$

β) $\alpha + \frac{1}{\alpha} \le -2$ για κάθε $\alpha < 0$

γ) $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \ge 4$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$

δ) $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \ge 8$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma > 0$

3.67 Για κάθε $\alpha > 0$ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{1}{\alpha} \ge 2$ β) $\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^2} \ge 2\alpha$

γ) $\alpha^4 + \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \ge 4$

3.68 Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \ge 4$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

3.69 Αν $x, y > 0$ και $xy = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $x + y \ge 2$ β) $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} \le \frac{2}{3}$

Πότε ισχύει η ισότητα στις παραπάνω ανισότητες;

3.70 Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 2$, να αποδείξετε ότι:

α) $\beta < 2$ β) $\alpha < 2$

γ) $\alpha\beta \le 1$ δ) $\alpha^2 + \beta^2 \ge 2$

ε) $\alpha^4 + \beta^4 \ge 2$

3.71 Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha < 1$ β) $\beta < 1$

γ) $\alpha\beta \le \frac{1}{4}$ δ) $\alpha^2 + \beta^2 \ge \frac{1}{2}$

ε) $\alpha^4 + \beta^4 \ge \frac{1}{8}$ στ) $\alpha^8 + \beta^8 \ge \frac{1}{128}$

3.72 Αν $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + \beta^3 = 1 - 3\alpha\beta$ β) $4\alpha\beta \le 1$

γ) $\alpha^2 + \beta^2 \ge \frac{1}{2}$

δ) $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \ge 9$, $\alpha, \beta > 0$

3.73 Έστω α, β και γ θετικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\beta^2}{2\alpha} \ge \frac{\alpha+\beta}{2}$

β) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\gamma} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{2\alpha} + \frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\beta} \ge \alpha + \beta + \gamma$

3.74 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} \ge \alpha + \beta$

β) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha} + \frac{\gamma^2+\alpha^2}{\beta} \ge 2(\alpha + \beta + \gamma)$

3.75 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \ge \frac{2\alpha - \beta}{3}$

β) $\frac{\alpha^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} + \frac{\beta^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2} + \frac{\gamma^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2} \ge$
$\ge \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

Πότε ισχύει η ισότητα στις παραπάνω ανισότητες;

3.76 Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \ge \frac{1}{3}$

β) $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} + \frac{\beta^3+\gamma^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2} + \frac{\gamma^3+\alpha^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2} \ge$
$\ge \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$

Πότε ισχύει η ισότητα;

3.77 Έστω $x, y, \omega > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2$

β) $\frac{x+y}{\omega}+\frac{y+\omega}{x}+\frac{\omega+x}{y}\ge 6$

γ) $(x+y+\omega)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}\right)\ge 9$

δ) $\frac{x^2+y^2}{x+y}\ge\frac{x+y}{2}$

ε) $\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+\omega^2}{y+\omega}+\frac{\omega^2+x^2}{\omega+x}\ge x+y+\omega$

3.78 Έστω α, β, γ θετικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\ge\frac{2\alpha\beta}{\gamma}$ β) $\beta^2+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\ge\frac{2\beta\gamma}{\alpha}$

γ) $\left(\alpha^2+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\left(\beta^2+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\left(\gamma^2+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\ge 8\alpha\beta\gamma$

3.79 Αν x, y, ω είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $x^2-x+1\ge x$, $y^2-y+1\ge y$, $\omega^2-\omega+1\ge\omega$

β) $(x^2-x+1)(y^2-y+1)(\omega^2-\omega+1)\ge xy\omega$

3.80 Αν $x, y, \omega, \alpha, \beta, \gamma > 0$, $xy\omega = 1$ και $\alpha\beta\gamma = 8$, να αποδείξετε ότι:

α) $(x^2+1)(y^2+1)(\omega^2+1)\ge 8$

β) $(\alpha^2+4)(\beta^2+4)(\gamma^2+4)\ge 512$

Πότε ισχύει η ισότητα στις παραπάνω ανισότητες;

3.81 Τρεις θετικοί αριθμοί α, β, γ έχουν γινόμενο 1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\ge 6$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Ασκήσεις για διαγωνισμούς

Τα επόμενα θέματα είναι ιδιαίτερα απαιτητικά και απευθύνονται σε μαθητές με κλίση στα Μαθηματικά. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης στην προετοιμασία για τη συμμετοχή σε μαθηματικούς διαγωνισμούς, όπως ο Θαλής και ο Ευκλείδης.

Δ3.1 Αν α, β, γ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2+\beta^2>\gamma^2-2\alpha\beta$

β) $\alpha^2+\beta^2<\gamma^2+2\alpha\beta$

γ) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

Δ3.2 Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β, γ με:

$$\alpha\beta\gamma=1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\beta+\gamma\ge 2$

β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1\ge 2(\alpha\beta+\gamma)$

γ) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ge 3$

Δ3.3 Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=x^2+y^2+\omega^2=3$, να αποδείξετε ότι $\alpha x+\beta y+\gamma\omega\le 3$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Δ3.4 Αν α, β, γ και δ είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4\ge 4\alpha\beta\gamma\delta$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Δ3.5 Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha}{\beta}+1\right)\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\beta}{\gamma}+1\right)\left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}+1\right)\ge 27$$

Δ3.6 Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{1}{\nu^3}<\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$ για κάθε φυσικό $\nu\ge 2$

β) $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{2014^3}<\frac{1}{2}$

Δ3.7 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha+\beta+\gamma=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1}\ge 1$$

Δ3.8 Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ για κάθε $x, y>0$

β) $\frac{1}{2\alpha+\beta+\gamma}+\frac{1}{2\beta+\gamma+\alpha}+\frac{1}{2\gamma+\alpha+\beta}\le$

$\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$, αν $\alpha, \beta, \gamma>0$

Δ3.9 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\beta^2+\gamma\alpha}+\frac{\gamma^2}{\gamma^2+\alpha\beta}\le 2$$

Δ3.10 Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α, β, γ για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$\alpha^3\beta+3\le 4\gamma$, $\beta^3\gamma+3\le 4\alpha$ και $\gamma^3\alpha+3\le 4\beta$

Δ3.11 Δίνεται ο αριθμός:

$$\alpha=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\cdots+\frac{1}{100}$

β) $\frac{1}{2}<\alpha<1$

Δ3.12 Να αποδείξετε ότι:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}<5$$

Δ3.13 Αν $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}^*$, με $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\ge 3+\frac{2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)}{\alpha\beta\gamma}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Δ3.14 α) Αν $x, y, \omega\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$x^2+y^2+\omega^2\ge xy+y\omega+\omega x$$

β) Έστω $\alpha, \beta, \gamma>0$ με $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$K=\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}$$

είναι 3.

Δ3.15 Αν $x,y,z\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, δηλαδή:

$$\frac{1}{2}\le x,y,z\le 1$$

να αποδείξετε ότι:

$$2\le\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}\le 3$$

Δ3.16 Αν x, y είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $x^4+y^2\ge 2x^2y$ και $y^4+x^2\ge 2y^2x$

β) $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\le\frac{1}{xy}$

Πότε ισχύει η ισότητα στις παραπάνω ανισότητες;

Δ3.17 Αν $x>0$ και $y>0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Δ3.18 Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2+\beta^2+5\ge 2\alpha+4\beta$ για κάθε α, β,

β) $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}\ge\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, όπου $\alpha, \beta>0$,

γ) $(\alpha^2+2007\alpha+1)(\beta^2+2007\beta+1)\ge 2009^2$, όπου α, β είναι θετικοί αριθμοί με γινόμενο 1,

δ) $\frac{\alpha^4+\beta^4}{2}\ge\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$ για κάθε α, β.