Ανακαλύπτοντας τις γεωμετρικές ανισότητες.
Μια διδακτική προσέγγιση σε δύο «διαφορετικούς» κόσμους.

Κυριαζής Χρήστος
M.Sc. Μαθηματικός
2ο ΓΕΛ Αγίας Βαρβάρας
e-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Σαμπάνη Μαρία
M.Sc. Μαθηματικός
Φροντιστήριο ΑΣΥΝ
e-mail address : sabani.maria@yahoo.com

Περίληψη

Η διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι μια εύκολη, ρηχή διαδικασία. Χρειάζεται προσεκτική προετοιμασία από τον διδάσκοντα η οποία αποτελείται από διάφορες δραστηριότητες. Μια από αυτές είναι και το μάθημα με χρήση φύλλου εργασίας. Εγείρονται όμως κάποια ερωτήματα τα οποία έχουν σχέση με την αποτελεσματικότητα αυτής της διαδικασίας μάθησης. Αυτά έχουν να κάνουν κυρίως με το χρόνο που απαιτείται, και το πλήθος των μαθητών που την εξασκούν. Πειραματιζόμενοι με αυτά, προσπαθήσαμε να καταγράψουμε τα συμπεράσματα μας μέσα σε αυτήν την εργασία όπου μελετάται η συμπεριφορά των μαθητών σε δύο «διαφορετικές» αίθουσες διδασκαλίας, αυτήν του δημόσιου σχολείου και της φροντιστηριακής εκπαίδευσης. Το αντικείμενο μας ήταν οι γεωμετρικές ανισότητες, ένα κεφάλαιο της Γεωμετρίας σημαντικό μεν, υποβαθμισμένο δε στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του Ελληνικού σχολείου.

Λέξεις-κλειδιά: Καθοδηγούμενη ανακάλυψη, Φύλλο εργασίας, Γεωμετρικές ανισότητες.

Abstract

Teaching mathematics is not an easy, shallow process. It needs careful preparation by the teacher, which consists of various activities. One of them is doing the lesson using a worksheet. There are some questions about the effectiveness of this learning procedure. These have to do with the required time and the number of students who practice it. Experimenting on these parameters, we tried to record our conclusions in this paper, where we study students' behavior in two "different" settings: one was the state school classroom and the other the private tutorial evening classroom. Our subject was geometric inequalities, an important chapter of geometry yet degraded in the Greek curriculum.

Keywords : Guided Discovery, Worksheet, Geometric Inequalities

Εισαγωγή

Ο καθηγητής των μαθηματικών είναι από τους σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη διαδικασία μάθησης. Αυτό δε συμβαίνει μόνο στο γνωστικό τομέα αλλά και σε άλλες συνιστώσες της μάθησης όπως η συναισθηματική εμπλοκή των μαθητών του, η δημιουργία στάσεων, γνωμών, αντιλήψεων και πεποιθήσεων για το μάθημα των μαθηματικών. Ο Shulman (Shulman 1986) ασχολείται με τη γνώση που πρέπει να έχουν οι καθηγητές για το αντικείμενο των μαθηματικών, για τη γνώση του προγράμματος σπουδών καθώς και για την παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου.

Εστιάζοντας στο τελευταίο εννοεί την ικανότητα που πρέπει να έχει ένας καθηγητής να προβλέπει τη συμπεριφορά των μαθητών πριν την προσφορά γνώσης, την ανάδειξη των δυσκολιών που ενδεχομένως θα συναντήσουν και την ικανότητα να χρησιμοποιεί μοντέλα διδασκαλίας ή να σχεδιάζει δραστηριότητες με σκοπό να αμβλύνει τις δυσκολίες μάθησης ώστε το μάθημα να γίνει κατανοητό από τους μαθητές (Κολέζα 2009) .

Ένα μοντέλο διδασκαλίας είναι και το μάθημα με χρήση φύλλου εργασίας (Φ.Ε). Ο καθηγητής έχει ετοιμάσει ένα φύλλο (δύο ή παραπάνω σελίδες χαρτιού) στο οποίο έχει όλα τα απαραίτητα εφόδια ώστε ο μαθητής είτε εργαζόμενος ατομικά είτε, πιο επιθυμητά, σε ομάδες να κατανοήσει το μάθημα με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Η διαδικασία αυτή είναι κομμάτι της καθοδηγούμενης ανακάλυψης που έχει τις ρίζες της στον J.Bruner (Bruner 1977). Στο φύλλο αυτό όπου ο μαθητής θα εργαστεί, ο δάσκαλος έχει επαγωγικά τοποθετημένες ερωτήσεις, δραστηριότητες ώστε να καθοδηγήσει τους μαθητές του στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Η ανακάλυψη ως λέξη εμπεριέχει και τον παράγοντα περιπέτεια ο οποίος συναρπάζει. Στην περίπτωση των μαθητών ίσως να αποδειχτεί καθοριστικός για την κατάκτηση μιας δύσκολης μαθηματικής έννοιας. Τα πλεονεκτήματα αυτής ης μεθόδου διδασκαλίας είναι (Τουμάσης 2004) η ενεργητική εμπλοκή του μαθητή στην προσπάθεια κατάκτησης της γνώσης. Οι μαθητές συμμετέχουν δραστήρια, συνεργάζονται ακούγοντας και τις σκέψεις του συνεργάτη τους, χωρίς να εξαρτώνται άμεσα από τον καθηγητή με έναν κοινό στόχο, τη γνώση.

Όπως χαρακτηριστικά λέει ο Bruner (Bruner 1977) «Η πονηρή υποψία, η γόνιμη υπόθεση, το θαρραλέο άλμα σε ένα δοκιμαστικό συμπέρασμα, είναι τα πολυτιμότερα όργανα του στοχασμού, όποια κι αν είναι η κατεύθυνση της σκέψης του».

Όσον αφορά το βασικότερο μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι το ότι ο επαγωγικός συλλογισμός δεν είναι πάντοτε 100% αξιόπιστος (Τουμάσης 2004). Καλό θα είναι να συνδυάζεται και με τον παραγωγικό συλλογισμό όπου ο μαθητής θα αποδεικνύει με μαθηματικά όσα ανακαλύπτει.

Γεωμετρικές ανισότητες

Τόσο παλιές όσο η Γεωμετρία. Μία ιστορική αναδρομή.

Από επιστημονικές μελέτες είναι διαπιστωμένο ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν προβλήματα που χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν ανισότητες ή να απαντήσουν τι παριστάνει μια ανισοτική σχέση ή τι σημαίνει η λύση μιας ανίσωσης (Linchevski & Sfard,1991 , Bazzini & Tsamir 2004). Όταν λοιπόν η διδασκαλία, η μάθηση ή η κατανόηση ενός αντικειμένου γίνονται δύσκολα, είναι παράδοση στην μαθηματική εκπαίδευση να ψάχνουμε την απάντηση του προβλήματος στην ιστορία του αντικειμένου (Cornu, 1991).

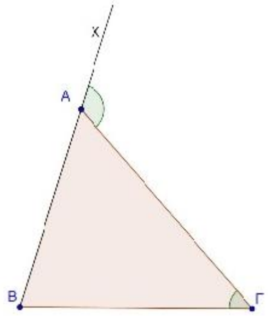
Σαν μαθηματικό αντικείμενο λοιπόν, οι ανισότητες ήταν γνωστές στους αρχαίους μαθηματικούς και γνώριζαν «την τριγωνική ανισότητα σαν ένα γεωμετρικό γεγονός » (Fink,2000 σελ.120). Ο Ευκλείδης (325 π.Χ.) μετά τον Πλάτωνα και πριν τον Αρχιμήδη, συγγράφει τα Στοιχεία, ένα έργο σημείο αναφοράς για την Γεωμετρία. Ξεκινά με τις πρωταρχικές έννοιες και ένα μικρό αριθμό λογικών προτάσεων, οι οποίες είναι προφανείς και τις οποίες καλεί αξιώματα. Με εργαλείο την λογική και βασιζόμενος στα αξιώματα, παράγει όλο το υλικό του. Στο βιβλίο Ι των Στοιχείων ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί εκφράσεις όπως «όσο υπερβαίνει» , «όσο υπολείπεται» για να συγκρίνει μεγέθη και με τη δύναμη των ανισοτικών σχέσεων κατακτά την ισότητα.

Οι προτάσεις 16 έως 20 των Στοιχείων είναι οι ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα που ασχοληθήκαμε στο φύλλο εργασίας και που ο David Hilbert(1862-1843) αργότερα τις εντάσσει στο πρώτο κεφάλαιο σαν συνέπειες των αξιωμάτων αναλογίας του εξαιρετικού του έργου Foundations of Geometry (1887).

<u>Πρόταση 16</u>

Σε κάθε τρίγωνο, κάθε εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε εντός και απέναντι γωνία του.

Η παραπάνω πρόταση έχει πολλές εφαρμογές και την πρόταση αυτή ο Legendre (1752-1833) την χρησιμοποίησε στην προσπάθεια του να «αποδείξει» το Αξίωμα της Παραλληλίας. Ο D.Hilbert την ονομάζει Θεώρημα της εξωτερικής γωνίας.



Πρόταση 17

Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα δυο οποιωνδήποτε γωνιών του είναι μικρότερο των 2 ορθών.

Ο Πρόκλος αποδεικνύει την παραπάνω πρόταση και άμεσα αποδεικνύει ότι από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική ευθεία κάθετη σ' αυτή. Στα σχόλια του Θέωνα του Αλεξανδρινού υπάρχει η απόδειξη του Πρόκλου, η οποία φαίνεται να ανήκει στον Θέωνα ή σε κάποιον αρχαιότερο. Οι προτάσεις 16 και 17 σύμφωνα με ορισμένους ιστορικούς (λ.χ. τον A.Frajese) είναι δημιουργήματα του Ευκλείδη και είναι προτάσεις της Ουδέτερης Γεωμετρίας. Ωστόσο, θεωρούνται σημαντικές και για κάποιες μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες όπως στην Υπερβολική Γεωμετρία όπου θεωρούνται βασικές προτάσεις της.

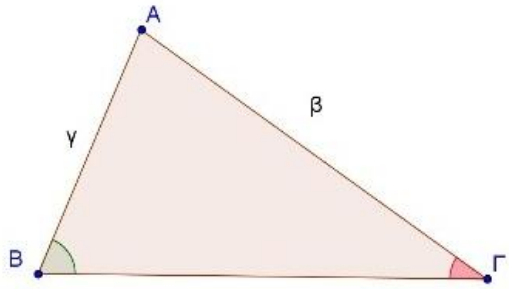
Πόρισμα

Κάθε τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο οξείες γωνίες.

Πρόταση 18

Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

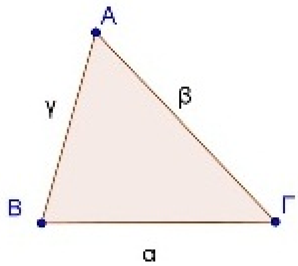
Για την πρόταση αυτή έχουμε ευθείες αποδείξεις τόσο του Ευκλείδη όσο και του Πορφύριου.



Πρόταση 19

Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία.

Παρατηρούμε ότι οι προτάσεις 18 και 19 είναι αντίστροφες. Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι για την απόδειξη της 19 χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στα Στοιχεία «η μέθοδος της εξάντλησης». Επιπρόσθετα, η πρόταση αυτή ήταν γνωστή στον Αριστοτέλη, γιατί στα «Μετεωρολογικά» υπάρχει η φράση « υπο γαρ την μείζω γωνίαν υποτείνει». Με την απόδειξη της πρότασης 19 ασχολήθηκαν ο Γερμανός G.Frege που παρατηρεί ότι ο Ευκλείδης δεν κάνει χρήση προτάσεων που προκύπτουν από κοινές έννοιες αλλά και ο Πρόκλος που αναφέρει μια ευθεία απόδειξη που αποδίδεται στον Ήρωνα.



Πρόταση 20

Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δύο πλευρών του είναι μεγαλύτερο της τρίτης.

Για την πρόταση αυτή που στα σύγχρονα Μαθηματικά ονομάζεται τριγωνική ανισότητα, στα σχόλια του Βατικανού αναφέρεται ότι : « Για να διασύρουν την πρόταση 20 οι Επικούρειοι συνήθιζαν να λένε ότι αυτή είναι προφανής και για ένα γάιδαρο και δε χρειάζεται κάποιο σχήμα». Μάλλον οι Επικούρειοι δεν είχαν σαφή γνώμη για τη μαθηματική απόδειξη (Εξαρχάκος 2001). Από τον Πρόκλο πληροφορούμαστε ότι ο Πορφύριος και ο ¨Ηρων έδωσαν δύο αποδείξεις της παραπάνω πρότασης.

Θα ήταν επιτρεπτό να πούμε (Bottema,1969) πως σχεδόν όλες οι γεωμετρικές ανισότητες παράγονται από αυτήν τη γνωστή σε όλους τριγωνική ανισότητα.

Γιατί η τριγωνική ανισότητα είναι τόσο σημαντική;

Η τριγωνική ανισότητα χαρακτηρίζει τον πιο σύντομο «δρόμο». Έτσι στο ευκλείδειο επίπεδο, δοθέντων τριών θετικών αριθμών α,β,γ που ικανοποιούν την σχέση $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$ μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο με πλευρές τους αριθμούς αυτούς. Είναι λοιπόν μια θεμελιώδης σχέση,που ισχύει και στην Υπερβολική Γεωμετρία αλλά γενικά σε πολλαπλότητες Riemann αρνητικής καμπυλότητας.

Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται η Ευκλείδεια στάθμη ή νόρμα $\|\vec{x}\|$ ενός διανύσματος $\vec{x}$ που ανήκει στον $\mathbb{R}^n$ και μια από τις ιδιότητες της είναι η τριγωνική ανισότητα $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$. Στον $\mathbb{R}^1$ εκφράζει σχέση μεταξύ των απόλυτων τιμών. Στο διανυσματικό λογισμό συναντούμε την τριγωνική ανισότητα στο μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με μέτρα $|\vec{\alpha}|,|\vec{\beta}|$ τότε ισχύει $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$. Συμπερασματικά, για το μιγαδικό επίπεδο ή επίπεδο Gauss έχουμε αν z_1,z_2 μιγαδικούς αριθμούς ισχύει $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.

Γενικότερα, η τριγωνική ανισότητα αποτελεί θεμελιώδη ιδιότητα ορισμού των μετρικών συναρτήσεων. Έτσι λοιπόν αποτελεί προϋπόθεση για τους μετρικούς χώρους, τους L_p χώρους, τους χώρους Hilbert ενώ στο χώρο Minkowski την τριγωνική ανισότητα την συναντούμε αντεστραμμένη $\|\vec{x}+\vec{y}\| \geq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$.

Το πείραμα μας

Το μάθημα μας έγινε σχεδόν ταυτόχρονα, σε δύο χώρους και σε δύο διαφορετικές πόλεις της Ελλάδας. Ο ένας χώρος ήταν οι αίθουσες των τμημάτων της πρώτης λυκείου Α2 και Α3 στο δεύτερο λύκειο Αγίας Βαρβάρας και ο άλλος ήταν το φροντιστήριο ΑΣΥΝ στην πόλη της Λάρισας.

Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του Υπουργείου δίνει δύο ώρες για τη διδασκαλία των παραγράφων 3.10, 3.11, 3.12 οι οποίες μας απασχόλησαν στο πείραμα μας. Οι παράγραφοι αυτοί ως γνωστόν, είχαν να κάνουν με τις βασικές γεωμετρικές ανισότητες, ένα μάθημα που κατά παράδοση δυσκολεύει τους μαθητές στην κατανόησή του.

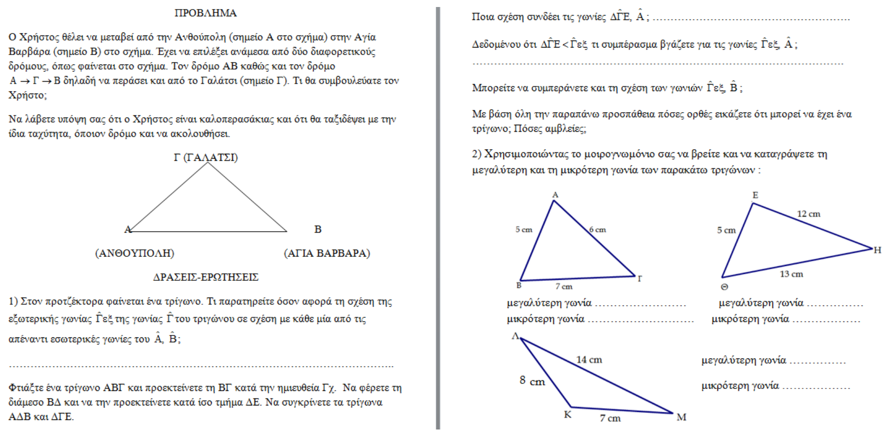
Αρχικά παραθέτουμε τους στόχους που θέσαμε και πάνω σε αυτούς στηριχτήκαμε για την κατασκευή του φύλλου εργασίας που δώσαμε.

Στόχοι του μαθήματος

Οι μαθητές να είναι σε θέση:

1. Να κατανοήσουν τις έννοιες απόσταση-ελάχιστη απόσταση.
2. Διακρίνουν την ανισοτική σχέση μεταξύ εξωτερικής και απέναντι εσωτερικής γωνίας.
3. Γνωρίζουν πως σε κάθε τρίγωνο υπάρχει το πολύ μια ορθή ή μια αμβλεία γωνία.
4. Να κατανοήσουν πως το άθροισμα δύο γωνιών τριγώνου είναι πάντοτε μικρότερο από 180^o.
5. Να διακρίνουν τη σχέση πλευρών και απέναντι γωνιών σε κάθε τρίγωνο.
6. Να κατανοήσουν τι συμβαίνει σε συγκεκριμένα είδη τριγώνων όσον αφορά τη σχέση γωνιών και πλευρών.
7. Να συγκρίνουν κάθε πλευρά τριγώνου με το άθροισμα και τη διαφορά των δύο άλλων.
8. Να διακρίνουν πότε σχηματίζεται τρίγωνο με πλευρές δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα.

Το μάθημα και στους δύο διαφορετικούς χώρους έγινε με τα ίδια εφόδια. Το ίδιο ακριβώς φύλλο εργασίας, το οποίο περιείχε ένα προσιτό πρόβλημα και κατάλληλα επιλεγμένες ερωτήσεις οι οποίες κατέληγαν επαγωγικά στο ζητούμενο θεώρημα του οποίου στη συνέχεια γίνονταν η απόδειξη.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ο Χρήστος θέλει να μεταβεί από την Ανθούπολη (σημείο Α στο σχήμα) στην Αγία Βαρβάρα (σημείο Β) στο σχήμα. Έχει να επιλέξει ανάμεσα από δύο διαφορετικούς δρόμους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τον δρόμο ΑΒ καθώς και τον δρόμο $Α \rightarrow Γ \rightarrow Β$ δηλαδή να περάσει και από το Γαλάτσι (σημείο Γ). Τι θα συμβουλεύατε τον Χρήστο;

Να λάβετε υπόψη σας ότι ο Χρήστος είναι καλοπερασάκιας και ότι θα ταξιδέψει με την ίδια ταχύτητα, όποιον δρόμο και να ακολουθήσει.

ΔΡΑΣΕΙΣ-ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Στον προτζέκτορα φαίνεται ένα τρίγωνο. Τι παρατηρείτε όσον αφορά τη σχέση της εξωτερικής γωνίας $\hat{Γ}εξ$ της γωνίας $\hat{Γ}$ του τριγώνου σε σχέση με κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές γωνίες του $\hat{Α}$, $\hat{Β}$;

....

Φτιάξτε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και προεκτείνετε τη ΒΓ κατά την ημιευθεία Γχ. Να φέρετε τη διάμεσο ΒΔ και να την προεκτείνετε κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΓΕ.

Ποια σχέση συνδέει τις γωνίες $Δ\hat{Γ}Ε$, $\hat{Α}$; ....

Δεδομένου ότι $Δ\hat{Γ}Ε < \hat{Γ}εξ$ τι συμπέρασμα βγάζετε για τις γωνίες $\hat{Γ}εξ$, $\hat{Α}$;

....

Μπορείτε να συμπεράνετε και τη σχέση των γωνιών $\hat{Γ}εξ$, $\hat{Β}$;

Με βάση όλη την παραπάνω προσπάθεια πόσες ορθές εικάζετε ότι μπορεί να έχει ένα τρίγωνο; Πόσες αμβλείες;

2) Χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο σας να βρείτε και να καταγράψετε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη γωνία των παρακάτω τριγώνων :

μεγαλύτερη γωνία ....
μικρότερη γωνία ....

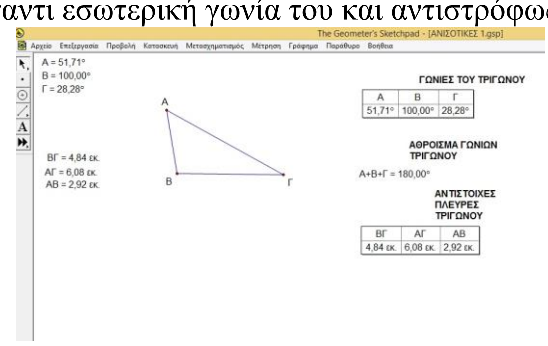
μεγαλύτερη γωνία ....
μικρότερη γωνία ....

μεγαλύτερη γωνία ....
μικρότερη γωνία ....

Εικόνα 1. Οι δύο πρώτες σελίδες του φύλλου εργασίας

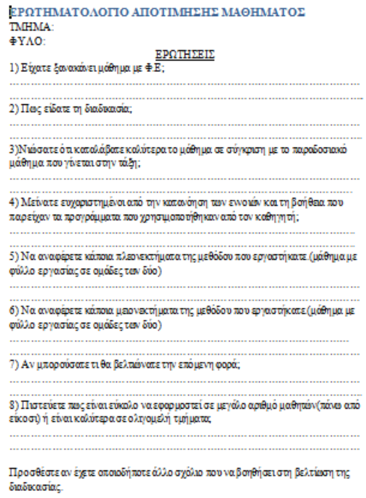
Πρέπει να σημειώσουμε, πως ολόκληρο το φύλλο εργασίας μαζί με τις ασκήσεις που δόθηκαν στους μαθητές, υπάρχουν στη διεύθυνση http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=28&t=57571

Επιπλέον τα προγράμματα από το Geometer's Sketchpad που χρησιμοποιήθηκαν ως υποβοήθηση στη διδασκαλία, είχαν να κάνουν με το να παρατηρήσουν οι μαθητές τη σχέση της εξωτερικής γωνίας με τις δύο απέναντι εσωτερικές γωνίες οποιουδήποτε τριγώνου, καθώς επίσης να συμπεράνουν τι συμβαίνει για τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και την απέναντι εσωτερική γωνία του και αντιστρόφως.



Εικόνα 2 Αρχείο Geometer's Sketchpad

Στους μαθητές δόθηκε και σχετικό ερωτηματολόγιο το οποίο δε στόχευε στη διεξαγωγή κάποιας στατιστικής έρευνας, απλά θέλαμε οι μαθητές να εκφραστούν όσο πιο ελεύθερα γίνεται, να αξιολογήσουν τη διαδικασία και να πουν τις προτάσεις τους.



ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
ΤΜΗΜΑ:
ΦΥΛΟ:

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Είχατε ξανακάνει μάθημα με ΦΕ;

2) Πως είδατε τη διαδικασία;

3)Νιώσατε ότι καταλάβατε καλύτερα το μάθημα σε σύγκριση με το παραδοσιακό μάθημα που γίνεται στην τάξη;

4) Μείνατε ευχαριστημένοι από την κατανόηση των εννοιών και τη βοήθεια που παρείχαν τα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν από τον καθηγητή;

5) Να αναφέρετε κάποια πλεονεκτήματα της μεθόδου που εργαστήκατε.(μάθημα με φύλλο εργασίας σε ομάδες των δύο)

6) Να αναφέρετε κάποια μειονεκτήματα της μεθόδου που εργαστήκατε.(μάθημα με φύλλο εργασίας σε ομάδες των δύο)

7) Αν μπορούσατε τι θα βελτιώνατε την επόμενη φορά;

8) Πιστεύετε πως είναι εύκολο να εφαρμοστεί σε μεγάλο αριθμό μαθητών(πάνω από είκοσι) ή είναι καλύτερα σε ολιγομελή τμήματα;

Προσθέστε αν έχετε οποιοδήποτε άλλο σχόλιο που να βοηθήσει στη βελτίωση της διαδικασίας.

Εικόνα 3. Το ερωτηματολόγιο αποτίμησης

Λίγα λόγια για το μάθημα στο δημόσιο σχολείο

Έχοντας υπόψη τις δυσκολίες που ανακύπτουν όταν καλούμαστε να διδάξουμε γεωμετρικές ανισότητες σε παιδιά της Α' Λυκείου αποφασίσαμε να παρουσιάσουμε τη σχετική παράγραφο, χρησιμοποιώντας φύλλο εργασίας. Ο απαιτούμενος χρόνος διδασκαλίας με αυτήν τη μέθοδο αποτελούσε ακόμη μια σκέψη μας.

Το μάθημα, όπως προαναφέρθηκε, έγινε στα τμήματα Α2 και Α3 του δεύτερου λυκείου Αγίας Βαρβάρας και είχαν διάρκεια τριών σχολικών ωρών. Να σημειωθεί πως τα τμήματα αποτελούνταν από μαθητές όλων των φασμάτων, κυρίως όμως μέσου βεληνεκούς. Η πρώτη ώρα έγινε στο εργαστήριο ώστε οι μαθητές να δουν μέσω προβολής κατάλληλα διαμορφωμένα προγράμματα ενώ οι επόμενες δύο ώρες έγιναν στη σχολική τάξη. Η τρίτη ώρα αφιερώθηκε αποκλειστικά σε συζήτηση ασκήσεων ώστε να υπάρξει αποτίμηση όλων όσων οι μαθητές διδάχτηκαν και αποκόμισαν ως γνώσεις.

Οι μαθητές χωρίστηκαν με τυχαίο τρόπο (τους προτρέψαμε να επιλέξουν εκείνοι το ταίρι τους) σε ομάδες των δύο και διανεμήθηκε σε κάθε ομάδα ένα φύλλο εργασίας. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος δίνονταν ο κατάλληλος χρόνος ώστε κάθε ομάδα να αυτενεργήσει και να προσπαθήσει να δώσει απαντήσεις και να σκεφτεί.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα παιδιά είχαν εκείνα τα σημεία της διδασκαλίας όπου χρησιμοποιούσαν τα γεωμετρικά τους όργανα για να δουν με τα ίδια τους τα μάτια όσα υπέθεσαν από την παρακολούθηση της διαδικασίας. Ήταν ιδιαίτερη η χαρά για το ότι πραγματικά προσπαθούσαν να εξάγουν συμπεράσματα, να τα συζητήσουν και να τα κάνουν προτάσεις. Η ειλικρινής μας εντύπωση ήταν πως πολλά βασικά σημεία της παραγράφου έδειχνε πως είχαν γίνει κατανοητά.

Την ώρα που έπρεπε να γίνει παραγωγική διδασκαλία, δηλαδή να αποδειχτεί κάποιο θεώρημα ο καθηγητής αναλάμβανε το ρόλο της καθοδήγησης και συζητούσε με τις ομάδες τον τρόπο απόδειξης. Γενικότερα, ο καθηγητής είχε ρόλο καθοδήγησης, άλλοτε άμεσης και άλλοτε έμμεσης, έτσι ώστε να διατηρείται και ο κατάλληλος ρυθμός στο μάθημα.

Για το μάθημα στο φροντιστήριο

Το μάθημα πραγματοποιήθηκε στα τμήματα Α2 και Α4 του φροντιστηρίου ΑΣΥΝ, όπως προείπαμε και είχαν διάρκεια τριών διδακτικών ωρών(45 λεπτών).Τα τμήματα είναι ολιγομελή (5 και 6 ατόμων αντίστοιχα) και ομοιογενή όσον αφορά την επίδοση των μαθητών.

Βασιζόμενοι στη μέθοδο της καθοδηγούμενης ανακάλυψης, δώσαμε το φύλλο εργασίας και καλέσαμε τους μαθητές να το συμπληρώσουν. Η διαδικασία ήταν διαδραστική καθώς υπήρξε συζήτηση και καθοδήγηση της καθηγήτριας με τους μαθητές σε σημεία που είχανε απορίες. Οι μαθητές με ευκολία απάντησαν στα ερωτήματα, καθότι το φύλλο εργασίας καθοδηγούσε μέσω της ισότητας να συμπεράνουν τις ανισοτικές σχέσεις. Ενδεικτικά, να αναφέρουμε ότι στην πρώτη ερώτηση του ερωτηματολογίου «Ποιόν δρόμο να ακολουθήσει ο Χρήστος» οι μαθητές σε ποσοστό 100% απάντησαν τον δρόμο ΑΒ με απαντήσεις «θα πάει πιο γρήγορα», «είναι πιο σύντομα». Σε ένα ποσοστό περίπου 90%, βρήκαν τις ζητούμενες σχέσεις εξωτερικών-εσωτερικών γωνιών, ενώ οι ασκήσεις που απαιτούσαν μέτρηση από τους ίδιους (είτε πλευρών ή γωνιών) τους φάνηκαν διασκεδαστικές και συμπληρώθηκαν από όλους σωστά. Άμεση απόρροια, να κατανοήσουν την θέση της μεγαλύτερης πλευράς σε σχέση με τη μεγαλύτερη γωνία σε ένα τρίγωνο. Σχεδόν όλοι οι μαθητές κατάλαβαν ότι δεν σχηματίζεται τρίγωνο με οποιαδήποτε μήκη πλευρών, ενώ ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι απαντήσεις των παιδιών στην ερώτηση «αν δεν κατασκευάζεται τρίγωνο, ποιο πιστεύετε ότι είναι το πρόβλημα». Ενδεικτικά αναφέρουμε κάποιες : « Οι πλευρές δε θα ‘κλείνουν’» , « Η τεθλασμένη γραμμή θα είναι ανοιχτή», «Δε φτάνουν να ενωθούν οι πλευρές». Στην τελευταία ερώτηση για τη γεωμετρική ερμηνεία της τριγωνικής ανισότητας, 6 στους 11 μαθητές απάντησαν ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι ο πιο σύντομος δρόμος.

Τη δεύτερη διδακτική ώρα αναφέραμε τα συμπεράσματα, γράψαμε τη θεωρία και ασχοληθήκαμε με κάποιες απλές εφαρμογές-ασκήσεις. Η τρίτη ώρα αφιερώθηκε σε ασκήσεις και απορίες.

Συμπεράσματα

Το πείραμα μας πραγματοποιήθηκε με γνώμονα ότι αν και οι ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο είναι από τις θεμελιώδεις σχέσεις των μαθηματικών, δύσκολα γίνονται αρεστές σε μαθητές αλλά και εκπαιδευτικούς. Στόχος ήταν ένα δύσκολο και υποβαθμισμένο κομμάτι της ύλης να γίνει γοητευτικό και προσιτό στους μαθητές. Σημειώνουμε πως από τη φετινή χρονιά δε διδάσκονται οι απλές αλγεβρικές ανισώσεις πρώτου βαθμού στους μαθητές της Β’ Γυμνασίου, γεγονός που εντείνει τον παραγκωνισμό ενός βασικού εργαλείου των μαθηματικών, της ανισότητας.

Προς έκπληξή μας οι μαθητές αντιμετώπισαν με ωριμότητα και πρωτόγνωρο ενδιαφέρον το μάθημα καθώς με ζήλο συμπλήρωσαν το φύλλο εργασίας. Πολλοί μαθητές οδηγήθηκαν μόνοι τους στα επιθυμητά συμπεράσματα, καθώς η μετάβαση από την ισότητα στην ανισότητα ήταν ομαλή. Βέβαια, να τονίσουμε ότι στο περιβάλλον της φροντιστηριακής μονάδας όπου τα τμήματα είναι ολιγομελή και ομοιογενή ως προς το επίπεδο των μαθητών, τα αποτελέσματα ήταν πολύ θετικά καθώς η συνεργασία και η καθοδήγηση ήταν πολύ πιο εύκολες. Ωστόσο, όταν κληθήκαν να λύσουν τις ασκήσεις οι μαθητές, τόσο του δημόσιου σχολείου όσο και του φροντιστηρίου, δεν δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα.

Στο ερωτηματολόγιο δε που δόθηκε στους μαθητές οι εντυπώσεις ήταν πολύ καλές και για τους περισσότερους είναι ήταν μια θετική εμπειρία που θα ήθελαν να επαναληφθεί.

Καταλήγοντας ελπίζουμε να αναδείξαμε τη σημαντικότητα της ανισότητας στα μαθηματικά (στη γεωμετρική της υπόσταση) κάτι που ο ίδιος ο D.Hilbert είχε επισημάνει με ξεχωριστό τρόπο λέγοντας πως (Στεργίου 2004) «η σχέση που κυβερνάει τα μαθηματικά είναι η ανισότητα. Η ισότητα παρουσιάζεται ως μια ειδική περίπτωση!»

Βιβλιογραφία

Αργυρόπουλος, Η. κ.ά. (2015). *Ευκλείδια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Γενικού Λυκείου*. Εκδόσεις Διόφαντος

Κατσάρας Αθανάσιος (1996), *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός περισσοτέρων της μιας μεταβλητής*, Ιωάννινα

Εξαρχάκος, Θ. (2001), *Ευκλείδη*

¨*Στοιχεία*¨, Τόμος Ι, Κ.Ε.ΕΠ.Ε.Κ
Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών.* Τόπος
Κουφογιώργος, Θ.(1988) *Μαθήματα Διαφορικών Πολλαπλοτήτων*, Γιάννενα
Στεργίου, Χ.(2004) *Αλγεβρικές ανισότητες,* Σαββάλας
Τουμάσης, Μ. (2004). *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών*. Gutenberg
Bazzini,L. &Tsamir P(2004) *Algebraic equations and inequalities: Issues for research and teaching.* Proceedinds of the 28th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education,Norway
Bottema, O.(1969) *Geometric inequalities,* Wolters-Noordhoff publishing Groningen
Bruner, J. (1977) *The process of education,* Harvard University Press
Shulman, L. (1986) *Those who understand: Knowledge growth in teaching.* Educational Researcher,15(2),4-14
Cornu,B. (1991)Limits. InTall. D(Ed) *Advanced Mahematical Thinking,* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers
Greenberg, M.J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, W.H.Freeman and Company
Hilbert, D.(1877) *Foundations of Geometry* ,The Open Court Publishing Company,La Salle,Illinois
Fink,A.M (2000) *An essay on the history of mathematics*. Third Edition, New York : Holt, Rinehart & Winston
Liljedahl, P. *Inequalities in the history of mathematics* :*From peculiarities to a hard discipline* , Simon Fraser University, Vancouver,Canada
Linchevski, L & Sfard, A(1991). *Rules without reasons as processes without objects- The case of equations and inequalities.* Proceedings of PME15, Assisi, Italy