

Θέμα με βάση το σχολικό !

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{1-x}$.

- A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- B. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
- Γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να γίνει η γραφική παράσταση της f .
- E. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$.

Μπάμπης Στεργίου – Ιανουάριος 2017

Υπόδειξη (Από τη Φωτεινή Καλδή)

A) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = e^{1-x}(1-x)$

$$\blacklozenge f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\blacklozenge f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα, στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ γνησίως φθίνουσα και στο $x = 1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με $f(1) = 1$.

B) Είναι $f''(x) = e^{1-x}(x-2)$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Επίσης :

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Στο διάστημα $[2, +\infty)$ η f είναι κυρτή, στο διάστημα $(-\infty, 2]$ κοίλη και στο $x = 2$ παρουσιάζει σημείο καμπής το $M(2, f(2))$ με $f(2) = 2e^{-1}$.

Γ) Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$$

αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{1-x}) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

Στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα με :

$$f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)] = (0, 1] \text{ αφού}$$

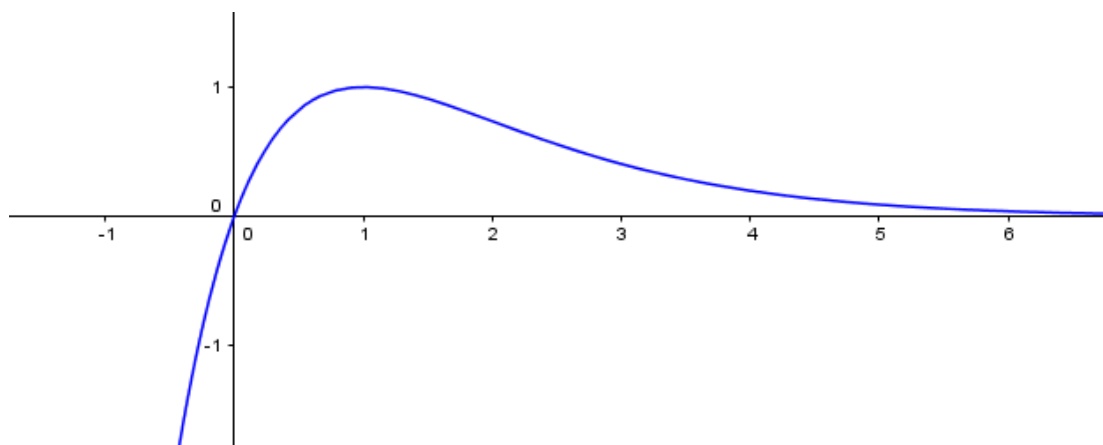
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι το $f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$

Προφανώς το ένα από τα δύο όρια μπορεί να αποφευχθεί, αφού η συνάρτηση έχει μέγιστο το 1.

Δ) Η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού $D_f = \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής .

Είναι επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Άρα ο άξονας $x'x$ ($y = 0$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη .



Ε) Είναι $f(0)=0$ και $f(x)>0$ για $x>0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 xe^{1-x} dx = \int_0^3 x(-e^{1-x})' dx = [x(-e^{1-x})]_0^3 - \int_0^3 (-e^{1-x}) dx = \\ &= [x(-e^{1-x})]_0^3 - [e^{1-x}]_0^3 = e - 4e^{-2} \end{aligned}$$