Τέλεια τετράγωνα

Μπάμπης Στεργίου - Νοέμβριος 2016

Σε μια σημαντική κατηγορία ασκήσεων δίνεται ένας φυσικός αριθμός γραμμένος στο δεκαδικό σύστημα και ζητείται να αποδείξουμε ότι αυτός είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή τετράγωνο φυσικού αριθμού. Για τη λύση τέτοιων ασκήσεων χρησιμοποιούμε εκτός των άλλων και τις παρακάτω ιδιότητες ή συμπεράσματα , που πηγάζουν από τη θεωρία τω αριθμών :

$$1=\frac{9}{9}=\frac{10^1-1}{9}\ ,\ 11=\frac{99}{9}=\frac{10^2-1}{9}\ ,111=\frac{999}{9}=\frac{10^3-1}{9}...,\ \underbrace{111...111}_{\nu}=\frac{10^\nu-1}{9}$$

Σε αντιστοιχία με τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε :

$$2=2\cdot 1=2\cdot\frac{9}{9}=2\cdot\frac{10^1-1}{9}\ ,\ 33=3\cdot 11=3\cdot\frac{99}{9}=3\cdot\frac{10^2-1}{9}\ ,\ ...,\ \underbrace{\alpha\alpha\alpha...\alpha\alpha\alpha}_{\nu}=\alpha\cdot\frac{10^\nu-1}{9}$$

Χρήσιμες είναι επίσης οι ιδιότητες των αριθμών του δεκαδικού συστήματος, όπως πχ :

$$\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=\alpha\cdot 10^3+\overline{\beta\gamma\delta}\quad \text{ή}\quad \overline{\alpha\beta\gamma\delta}=\overline{\alpha\beta}\cdot 10^2+\overline{\gamma\delta}\quad \text{ή}\quad \overline{\alpha\beta\gamma\delta}=\overline{\alpha\beta\gamma}\cdot 10+\delta$$

Οι παραπάνω ιδιότητες γενικεύονται σε αριθμούς με τυχαίο πλήθος ψηφίων.

Έτσι, για παράδειγμα , θα μπορούσαμε να γράψουμε :

$$\underbrace{11...1}_{\nu}\underbrace{555...56}_{\nu}=\underbrace{11...1}_{\nu}\cdot 10^\nu+\underbrace{555...56}_{\nu}=\underbrace{11...1}_{\nu}\cdot 10^\nu+\underbrace{555...50}_{\nu}+6=$$
$$\frac{10^\nu-1}{9}\cdot 10^\nu+5\cdot\underbrace{11...1}_{\nu\text{-}1}\cdot 10+6=\frac{10^\nu-1}{9}\cdot 10^\nu+5\cdot\frac{10^{\nu-1}-1}{9}\cdot 10+6=$$
$$\frac{10^{2\nu}-10+5\cdot 10^\nu-50+54}{9}=\frac{10^{2\nu}+4\cdot 10^\nu+4}{9}=\left(\frac{10^\nu+2}{3}\right)^2$$

κάτι που δείχνει ότι αριθμός $\alpha=\underbrace{11...1}_{\nu}\underbrace{555...56}_{\nu}$ *είναι τέλειο τετράγωνο, αφού στον αριθμητή του κλάσματος το άθροισμα των ψηφίων είναι 3 και έτσι το κλάσμα είναι τελικά φυσικός αριθμός, σύμφωνα με το κριτήριο διαιρετότητας με το* 3.

Ορισμένες από τις παραπάνω ασκήσεις μπορεί να γίνουν κάλλιστα και στη σχολική τάξη, αφού είναι ιδιαίτερα ελκυστικές και εισάγουν με ευχάριστο και αποτελεσματικό στη σύνδεση επαγωγικής και παραγωγικής αποδεικτικής πορείας.

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Να αποδειχθεί ότι :

Α. Ο αριθμός $K=\sqrt{1111-22}$ είναι φυσικός.

Β. Ο αριθμός $K=\sqrt{111111-222}$ είναι φυσικός.

Γ. Ο αριθμός $A=\sqrt{\underbrace{111....11}_{2n}-\underbrace{222....22}_{n}}$ είναι φυσικός.

Crux 5/2016

Υπόδειξη

Στα πρώτα ερωτήματα αρκεί να γίνει η αφαίρεση και οι σχετικές δοκιμές.

Γ. Είναι :

$$A=\sqrt{\underbrace{111....11}_{2n}-\underbrace{222....22}_{n}}=\sqrt{\frac{10^{2\nu}-1}{9}-2\cdot\underbrace{111....11}_{n}}=\sqrt{\frac{10^{2\nu}-1}{9}-2\cdot\frac{10^{\nu}-1}{9}}=$$

$$\sqrt{\frac{10^{2\nu}-1-2\cdot10^{\nu}+2}{9}}=\sqrt{\frac{10^{2\nu}-2\cdot10^{\nu}+1}{9}}=\sqrt{\frac{(10^{\nu}-1)^2}{9}}=\frac{10^{\nu}-1}{3}\in N$$

Αφού στον αριθμητή του κλάσματος το άθροισμα των ψηφίων, αν γραφεί ο αριθμός στην δεκαδική παράσταση, είναι ίσο με 0 , πολλαπλάσιο δηλαδή του 3 και έτσι ο αριθμός $\frac{10^{\nu}-1}{3}$ είναι φυσικός. Ας παρατηρήσουμε ακόμα ότι :

$$A=\frac{10^{\nu}-1}{3}=\frac{\underbrace{999...9}_{\nu}}{3}=\underbrace{333...3}_{\nu}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$A=\sqrt{\underbrace{444...4}_{\nu-\text{ψηφία}}3\underbrace{555...5}_{\nu-\text{ψηφία}}6}$$

είναι πάντα φυσικός ! Ο αριθμός στο υπόρριζο έχει $2\nu+2$ ψηφία.

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A=\overline{\underbrace{444...445}_{2015\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}}^{2}+\overline{\underbrace{111...11}_{2015\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}}-10^{2015}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Ρουμανία 2015

Λύση

Θέτουμε $\alpha=\underbrace{111...11}_{2015-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}$.Τότε

$$\begin{aligned} A &= \overline{\underbrace{444...445}_{2015\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}}^{2}+\overline{\underbrace{111...11}_{2015\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}}-10^{2015}= \\ &=(\overline{\underbrace{444...444}_{2015\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}}+1)^2+\overline{\underbrace{111...11}_{2015\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}}-10^{2015}= \\ &=(4\alpha+1)^2+\alpha-10^{2015}= \\ &=16\alpha^2+8\alpha+1+\alpha-10^{2015}= \\ &=16\alpha^2+(9\alpha+1)-10^{2015}= \\ &=16\alpha^2+10^{2015}-10^{2015}=16\alpha^2 \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός Α είναι τέλειο τετράγωνο και συγκεκριμένα το τετράγωνο του φυσικού αριθμού $\beta=4\alpha$.

ΑΣΚΗΣΗ 4η

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = \sqrt{\underbrace{11...1}_{\nu}\underbrace{22...2}_{\nu+1}5}$$

όπου ο αριθμός $a=\underbrace{11...1}_{\nu}\underbrace{22...2}_{\nu+1}5$ αποτελείται από 2ν + 2 ψηφία , είναι φυσικός , για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$

Υπόδειξη

Είναι :

$$A=\sqrt{\underbrace{11...1}_{\nu}\underbrace{22...2}_{\nu+1}5}=\sqrt{\frac{10^{\nu}-1}{9}\cdot 10^{\nu+2}+2\cdot\frac{10^{\nu+2}-1}{9}+3}=$$

$$\sqrt{\frac{10^{2\nu+2}-10^{\nu+2}+2\cdot 10^{\nu+2}-2+27}{9}}=\sqrt{\frac{10^{2\nu+2}+10\cdot 10^{\nu+1}+25}{9}}=$$

$$\sqrt{\frac{\left(10^{\nu+1}+5\right)^2}{9}}=\frac{10^{\nu+1}+5}{3}\in\mathbb{N}$$

διότι το άθροισμα των ψηφίων του αριθμητή, στη δεκαδική του παράσταση, είναι ίσο με 6, δηλαδή πολλαπλάσιο του 3.

Ας παρατηρήσουμε ακόμα ότι

$$\frac{10^{\nu+1}+5}{3}=\frac{(10^{\nu+1}-1)+6}{3}=\frac{10^{\nu+1}-1}{3}+2=\underbrace{333...333}_{\nu+1}+2=\underbrace{333...335}_{\nu+1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5η

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A=\sqrt{\underbrace{111....11}_{2n-\text{ψηφία}}+\underbrace{111....10}_{n+1-\text{ψηφία}}+4}$

είναι φυσικός .

Λύση

Είναι

$$A=\sqrt{\underbrace{111....11}_{2n-\text{ψηφ}}+\underbrace{111....10}_{n+1-\text{ψηφ}}+4}=\sqrt{\frac{10^{2n}-1}{9}+10\frac{10^{n}-1}{9}+4}=$$

$$=\sqrt{\frac{10^{2n}+2\cdot 5+25}{9}}=\sqrt{\frac{(10^{n}+5)^{2}}{9}}=\frac{10^{n}+5}{3}\in \mathrm{N}$$

διότι το άθροισμα των ψηφίων του αριθμητή είναι ίσο με 3, οπότε ο $10^{n}+5$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

ΑΣΚΗΣΗ 6η

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A=\sqrt{\underbrace{11...1}_{\nu}\underbrace{555...56}_{\nu}}$$

είναι ρητός.

Υπόδειξη

$$A=\sqrt{\underbrace{11...1}_{\nu}\underbrace{555...56}_{\nu}}=\sqrt{\frac{10^{\nu}-1}{9}\cdot 10^{\nu}+5\frac{10^{\nu-1}-1}{9}\cdot 10+6}=\sqrt{\frac{10^{2\nu}-10+5\cdot 10^{\nu}-50+54}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(10^{\nu}+2\right)^{2}}{9}}=\frac{10^{\nu}+2}{3}=\frac{10^{\nu}-1+3}{3}=\frac{10^{\nu}-1}{3}+1=\underbrace{333...33}_{\nu}+1=\underbrace{333...34}_{\nu}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7η

Ανάμεσα στα (διαδοχικά) ψηφία του αριθμού 961 τοποθετούμε ν μηδενικά. Να αποδείξετε ότι :

α) Οι αριθμοί $961, 90601, 9006001$ είναι τέλεια τετράγωνα.

β) Ο αριθμός $A = 9\underbrace{000...0}_{\nu}6\underbrace{000...0}_{\nu}1$ είναι τέλειο τετράγωνο.

γ) Ποιοι άλλοι τριψήφιοι αριθμοί έχουν την ίδια ιδιότητα ;

Υπόδειξη

β) $A = 9\underbrace{000...0}_{\nu}6\underbrace{000...0}_{\nu}1 = 9\cdot 10^{2\nu+2} + 6\cdot 10^{\nu+1} + 1 = (3\cdot 10^{\nu+1}+1)^2$

γ) Οι αριθμοί $121, 144, 169, 441, 484$

ΑΣΚΗΣΗ 8η

Ανάμεσα στα ψηφία του αριθμού 49 τοποθετούμε τον αριθμό 48 . Στη μέση του αριθμού 4489 που προκύπτει ξαναβάζουμε τον αριθμό 48 και παίρνουμε τον αριθμό 444889 .Να αποδείξετε ότι :

α) Οι αριθμοί 4489 , 444889 είναι τέλεια τετράγωνα.

β) Όλοι οι αριθμοί Α που προκύπτουν με την παραπάνω διαδικασία είναι τέλεια τετράγωνα.

Υπόδειξη

β) Έχουμε :

$$A = \sqrt{\underbrace{444...4}_{\nu}\underbrace{888...8}_{\nu-1}9} = \sqrt{\underbrace{444...4}_{\nu}\underbrace{888...88}_{\nu}+1} = \sqrt{4\frac{10^\nu-1}{9}\cdot 10^\nu + 8\frac{10^\nu-1}{9}+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\cdot 10^{2\nu} - 10^\nu + 8\cdot 10^\nu - 8 + 9}{9}} = \sqrt{\frac{4\cdot 10^{2\nu} - 4\cdot 10^\nu + 8\cdot 10^\nu - 8 + 9}{9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\cdot 10^{2\nu} + 4\cdot 10^\nu + 1}{9}} = \sqrt{\frac{(2\cdot 10^\nu + 1)^2}{9}} = \frac{2\cdot 10^\nu + 1}{3} =$$

$$= \frac{(2\cdot 10^\nu - 2) + 3}{3} = 2\frac{10^\nu - 1}{3} + 1 = 2\cdot\underbrace{333...33}_{\nu} + 1 =$$

$$\underbrace{666...66}_{\nu} + 1 = \underbrace{666...67}_{\nu}$$

Παρατήρηση :

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται οι αριθμοί της άσκησης 6, ξεκινώντας από τον 16 *και τοποθετώντας κάθε φορά στη μέση του αριθμού τον αριθμό* 15*. Οι αριθμοί που προκύπτουν, όπως πχ οι* 1156 , $111556, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{\nu}\underbrace{555\ldots56}_{\nu}$ *είναι όλοι τους τέλεια τετράγωνα.*

ΑΣΚΗΣΗ 9η

Δίνονται οι αριθμοί $a = 999\ldots99$ με $4n$ ψηφία και $b = 333\ldots333$ με 2n ψηφία . Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{a+6b+4}$ είναι ρητός και μάλιστα φυσικός.

Λύση

Είναι $a = 10^{4n} - 1$ και $b = \frac{1}{3}\left(10^{2n}-1\right)$, οπότε:

$$a + 6b + 4 = 10^{4n} - 1 + 2\left(10^{2n}-1\right) + 4 = 10^{4n} + 2\cdot 10^{2n} + 1 = \left(10^{2n}+1\right)^2$$

Επομένως :

$$\sqrt{a+6b+4} = 10^{2n} + 1 = 1\underbrace{00\ldots0}_{2n-1}1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 10η

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = \sqrt{\underbrace{111\ldots.11}_{2n-\psi\eta\varphi} + \underbrace{111\ldots.10}_{n+1-\psi\eta\varphi} + 4}$ είναι φυσικός .

Λύση

Έχουμε :

- $\underbrace{111\ldots.11}_{2n-\psi\eta\varphi} = 10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \ldots + 10 + 1 = \dfrac{10^{2n}-1}{9}$.
- $\underbrace{111\ldots.10}_{n+1-\psi\eta\varphi} = 10^{n} + 10^{n-1} + \ldots + 10^2 + 10 = 10\cdot\dfrac{10^{n}-1}{9} = \dfrac{10^{n+1}-10}{9}$.

Επομένως:

$$\underbrace{111\ldots.11}_{2n-\psi\eta\varphi} + \underbrace{111\ldots.10}_{n+1-\psi\eta\varphi} + 4 = \frac{10^{2n} + 10^{n+1} + 25}{9} = \left(\frac{10^{n}+5}{3}\right)^2.$$

Ο αριθμός μέσα στην παρένθεση είναι φυσικός, αφού στη δεκαδική του μορφή το άθροισμα των ψηφίων του αριθμητή είναι ίσο με 6 , δηλαδή πολλαπλάσιο του 3.