ΕΞΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Κυριαζής Χρήστος

M.Sc. Μαθηματικός

Υποψήφιος Διδάκτορας Ε.Α.Π.

2ο ΓΕΛ Αγίας Βαρβάρας

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Ph.D., M.Sc. Μαθηματικός

7ο ΓΕΛ Περιστερίου

Σαββάτο 5 Νοεμβρίου 2016

Αίθουσα : Αν. Κνιθάκης

Ώρα 17:20

Ενότητες παρουσίασης

- Ιστορικά στοιχεία.
- Το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού (ΘΜΤΟΛ).
- Σχέση ΘΜΤΟΛ και ΘΜΤ.
- Γενικεύσεις του ΘΜΤΟΛ και πορίσματα.
- Ενδιάμεσα σημεία και ΘΜΤΟΛ.
- ΘΜΤΟΛ και πανελλήνιες.
- Ασκήσεις που λύνονται με ΘΜΤΟΛ.
- Μια πρακτική εφαρμογή.
- Συμπεράσματα.
- Βιβλιογραφία.

Ιστορικά στοιχεία (1/3)

Πρώτη απόδειξη από Cauchy στα βιβλία που έγραψε για να υποστηρίξει τη διδασκαλία του στην École Polytechnique.

Ο ορισμός της έννοιας του ορίου από τον Cauchy ήταν:

Όταν οι τιμές που αποδίδονται διαδοχικά στην ίδια μεταβλητή προσεγγίζουν επ᾽ αόριστον μια σταθερή τιμή, με τέτοιο τρόπο ώστε να καταλήγουν να διαφέρουν από αυτήν όσο λιγότερο επιθυμούμε, τότε η τιμή αυτή ονομάζεται όριο όλων των άλλων.

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό ο *Cauchy δίνει την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος* $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ *ως το όριο των*

Ιστορικά στοιχεία (2/3)

αθροισμάτων της μορφής:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

όπου τα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n = X$ συγκροτούν μια τυχαία υποδιαίρεση του διαστήματος $\left[x_0, X\right]$ και το μέγιστο από τα μήκη $x_i - x_{i-1}$ τείνει προς το μηδέν.

Χρησιμοποιώντας ορισμένες αλγεβρικές ιδιότητες που είχε αποδείξει προηγουμένως για την έννοια του «μέσου» ενός συνόλου αριθμών αποδεικνύει, με βάση τη συνέχεια της f και το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, ότι για τα αθροίσματα αυτά ισχύει

$$S = f\left(x_0 + \theta\left(X - x_0\right)\right)\left(X - x_0\right) \text{ για κάποιο } \theta \in (0,\ 1)$$

Ιστορικά στοιχεία (3/3)

Από τη σχέση αυτή, με μια «μετάβαση στο όριο», συμπεραίνει ότι ισχύει

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = f\left(x_0 + \theta\left(X - x_0\right)\right)\left(X - x_0\right),\ \theta \in (0,\ 1)$$

δηλαδή

το «Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού».

Το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού (1/4)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = f(\xi)(\beta-\alpha)$.

1η απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση F με τύπο $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ \ x \in [\alpha,\beta]$.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ, άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ή

$$f(\xi) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt}{\beta-\alpha}$$

Το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού (2/4)

2η απόδειξη

Από το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής η f έχει ελάχιστη τιμή $m = f(\gamma)$, μέγιστη τιμή $M = f(\delta)$ με $\gamma, \delta \in [\alpha, \beta]$ και ισχύει $m \le f(x) \le M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Τότε

$$m(\beta - \alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le M(\beta - \alpha).$$

Συνεπώς υπάρχει k έτσι ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = k(\beta - \alpha)$$

και αφού η f είναι συνεχής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $k = f(\xi)$.

Το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού (3/4)

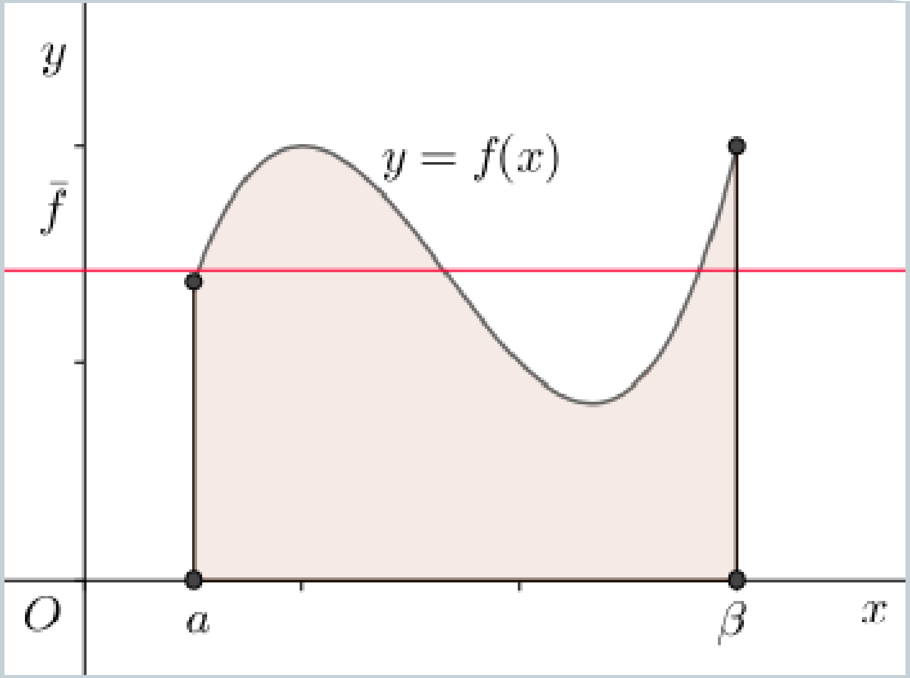
Μέση τιμή της f στο [α, β]: $\mu = \overline{f} = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\beta - \alpha} = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\int_{\alpha}^{\beta} dx}.$

<u>Η σημασία της συνέχειας</u>

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx \right) = 0$$

Το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού (4/4)



Γεωμετρική ερμηνεία ΘΜΤΟΛ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \mu(\beta-\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \mu dx$$

Η μέση τιμή της συνάρτησης f στο [α, β] είναι εκείνη η τιμή που πρέπει να έχει μια συνάρτηση f στο [α, β] ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της μέσης τιμής στο [α, β].

Σχέση ΘΜΤΟΛ και ΘΜΤ

Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο [α, β] έχει παράγουσα, έστω F και ισχύει $F'(x) = f(x)$.

Για την F ισχύει το ΘΜΤ άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha)$.

Συνεπώς υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = f(\xi)(\beta - \alpha)$ δηλαδή το ΘΜΤΟΛ.

Γενικεύσεις του ΘΜΤΟΛ και πορίσματα (1/6)

<u>Γενικευμένο ΘΜΤΟΛ</u>

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο [α, β] και η g δεν αλλάζει πρόσημο στο [α, β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = \mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

όπου $m \le \mu \le M$, m είναι το infimum και M είναι το supremum της f στο [α, β].

Η συνάρτηση g λέγεται **συνάρτηση βάρους** και αν $g(t) \ge 0$ για κάθε $t \in [\alpha,\beta]$ ο αριθμός μ λέγεται **σταθμισμένος μέσος** της **συνάρτησης βάρους** g στο [α, β].

Γενικεύσεις του ΘΜΤΟΛ και πορίσματα (2/6)

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την περίπτωση κατά την οποία $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ αφού ομοίως αποδεικνύεται και η περίπτωση $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Αφού m είναι το infimum της f και M είναι το supremum της f στο [α,β], ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} [M - f(x)] g(x) dx \geq 0 \quad \text{και} \quad \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - m] g(x) dx \geq 0$$

Συνεπώς έχουμε:

$$m \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx \leq M \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Γενικεύσεις του ΘΜΤΟΛ και πορίσματα (3/6)

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι υπάρχει $\mu \in [m, M]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = \mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης f και λόγω του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ ώστε $f(\xi) = \mu$, δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Γενικεύσεις του ΘΜΤΟΛ και πορίσματα (4/6)

Δεύτερο ΘΜΤΟΛ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο [α, β], $g(x) \geq 0$ και η f είναι μονότονη στο [α, β], τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\alpha)\int_{\alpha}^{\xi} g(x)dx + f(\beta)\int_{\xi}^{\beta} g(x)dx$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με

$$h(t) = f(\alpha)\int_{\alpha}^{t} g(x)dx + f(\beta)\int_{t}^{\beta} g(x)dx, \text{ με } t \in [\alpha, \beta]$$

Γενικεύσεις του ΘΜΤΟΛ και πορίσματα (5/6)

Ισχύουν

$$h(\alpha)=f(\beta)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \quad \text{και} \quad h(\beta)=f(\alpha)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Αφού η f είναι μονότονη στο [α, β] προκύπτει ότι το μ βρίσκεται ανάμεσα στα f(α), f(β).

Όμως από το γενικευμένο ΘΜΤΟΛ ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx=\mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$, άρα για κάποια τιμή $\xi\in(\alpha,\beta)$

η h παίρνει την τιμή $\mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$, οπότε …

Γενικεύσεις του ΘΜΤΟΛ και πορίσματα (6/6)

Μορφές Bonnet

Αν η συνάρτηση f είναι μια θετική φθίνουσα συνάρτηση με $f(\beta) = 0$, ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\alpha)\int_{\alpha}^{\xi} g(x)dx,\ \alpha < \xi < \beta,$$

ενώ αν η f είναι μια θετική αύξουσα συνάρτηση με $f(\alpha) = 0$, ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\beta)\int_{\xi}^{\beta} g(x)dx,\ \alpha < \xi < \beta.$$

Ενδιάμεσα σημεία και ΘΜΤΟΛ (1/3)

Λήμμα

Αν ε είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim\limits_{t\to\alpha}\varepsilon(t)=0$, $m>0$ και η συνάρτηση h με $h(t)=\varepsilon(t)\left(t-\alpha\right)^{m}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε:

α) $$\lim_{x\to\alpha}\frac{\int_{\alpha}^{x}\varepsilon(t)\left(t-\alpha\right)^{m}dt}{\left(x-\alpha\right)^{m+1}}=0\,,$$

β) $$\lim_{x\to\alpha}\frac{\varepsilon\left(\xi_x\right)\left(\xi_x-\alpha\right)^{m}}{\left(x-\alpha\right)^{m}}=0,\ \alpha<\xi_x<x.$$

Ενδιάμεσα σημεία και ΘΜΤΟΛ (2/3)

Ο Zhang απέδειξε ότι αν η συνάρτηση f είναι r φορές παρ/μη γύρω από ένα σημείο α με $f'(\alpha)=f''(\alpha)=\ldots=f^{(r-1)}(\alpha)=0$, αλλά $f^{(r)}(\alpha)\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\xi_x-\alpha}{x-\alpha}=\frac{1}{\sqrt[r]{r+1}},\ \xi_x\in(\alpha,x)\subseteq(\alpha,\beta)$$

Για την απόδειξη της πρότασης, παίρνουμε το θεώρημα Taylor για τη συνάρτηση f και μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι:

$$\frac{f^{(r)}(\alpha)}{(r+1)!}+\frac{\int_{\alpha}^{x}\varepsilon(t)(t-\alpha)^r\,dt}{(x-\alpha)^{r+1}}=\frac{f^{(r)}(\alpha)}{r!}\left(\frac{\xi_x-\alpha}{x-\alpha}\right)^r+\varepsilon(\xi_x)\left(\frac{\xi_x-\alpha}{x-\alpha}\right)^r$$

Ενδιάμεσα σημεία και ΘΜΤΟΛ (3/3)

Λαμβάνοντας όρια για $x \to \alpha^{+}$ έχουμε με τη βοήθεια του λήμματος ότι

$$\frac{f^{(r)}(\alpha)}{(r+1)!} = \frac{f^{(r)}(\alpha)}{r!} \lim_{x\to\alpha^{+}} \left(\frac{\xi_x - \alpha}{x-\alpha} \right)^{r}$$

και αφού $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$ ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^{+}} \left(\frac{\xi_x - \alpha}{x-\alpha} \right)^{r} = \frac{1}{r+1}$$

ή τελικά

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\xi_x - \alpha}{x-\alpha} = \frac{1}{\sqrt[r]{r+1}}$$

ΘΜΤΟΛ και Πανελλήνιες (1/3)

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $f(0)>0$.

Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο [0, 1] για την οποία ισχύει $g(x)>0$ για κάθε x στο $[0,1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt,\ x\in[0,1] \quad \text{και} \quad G(x)=\int_0^x g(t)dt,\ x\in[0,1]$$

α. Να δειχθεί ότι F(x) > 0 , για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

β. Να αποδειχθεί ότι f(x)G(x) > F(x), για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

ΘΜΤΟΛ και Πανελλήνιες (2/3)

Λύση

α. Για τη συνάρτηση H με H(t) = f(t)g(t) ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤΟΛ στο $[0,x]$, οπότε υπάρχει $\xi_x \in (0,x) \subseteq (0,1]$ έτσι ώστε

$$\int_0^x H(t)dt = H(\xi_x)(x-0) \text{ ή } F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt = f(\xi_x)g(\xi_x)x$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και $0 < \xi_x < 1$, ισχύει $f(\xi_x) > f(0) > 0$ και επιπλέον ισχύει $g(\xi_x) > 0$, $x \in [0,1]$ οπότε προκύπτει ότι F(x) > 0, για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

ΘΜΤΟΛ και Πανελλήνιες (3/3)

β. Για τη συνάρτηση Q με Q(t)=(f(x) – f(t))g(t) ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤΟΛ στο [0, x], οπότε υπάρχει $c_x \in (0, x) \subseteq (0,1]$ έτσι ώστε

$$\int_0^x Q(t)dt = Q(c_x)(x-0)$$

ή

$$\int_0^x \big(f(x)-f(t)\big)g(t)dt = x\big(f(x)-f(c_x)\big)g(c_x) > 0,\ x \in (0,1]$$

αφού $g(c_x) > 0$ και $f(x)-f(c_x) > 0$

Ασκήσεις που λύνονται και με ΘΜΤΟΛ (1/3)

__*Άσκηση 1*__. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$

να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$.

__Λύση__

1ος τρόπος: Άμεσο από ΘΜΤΟΛ για την f στο [α,β].

2ος τρόπος: Με άτοπο, αφού τότε η f διατηρεί πρόσημο στο (α, β)

3ος τρόπος: Εφαρμογή ΘΜΤ για την παράγουσα της f στο [α, β].

Ασκήσεις που λύνονται και με ΘΜΤΟΛ (2/3)

Άσκηση 2. Αν f, g συνεχείς στο [α, β] με $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$, δ.ο:

α) υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = g(\xi)$,

β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $f(\xi_1) = g(\xi_2)$.

Λύση

α) 1ος τρόπος: ΘΜΤΟΛ για την q με q(x) = f(x) – g(x) στο [α, β].

2ος τρόπος: Με άτοπο (η q θα διατηρεί πρόσημο στο (α, β)).

3ος τρόπος: Εφαρμογή ΘΜΤ για την παράγουσα της q στο [α, β].

β) 1ος τρόπος: Εφαρμογή ΘΜΤΟΛ για τις f, g στο [α, β].

2ος τρόπος: Εφαρμογή ΘΜΤ για τις παράγουσες των f, g, αντίστοιχα στο [α, β].

Ασκήσεις που λύνονται και με ΘΜΤΟΛ (3/3)

Άσκηση 3. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει f(x) > 0 για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

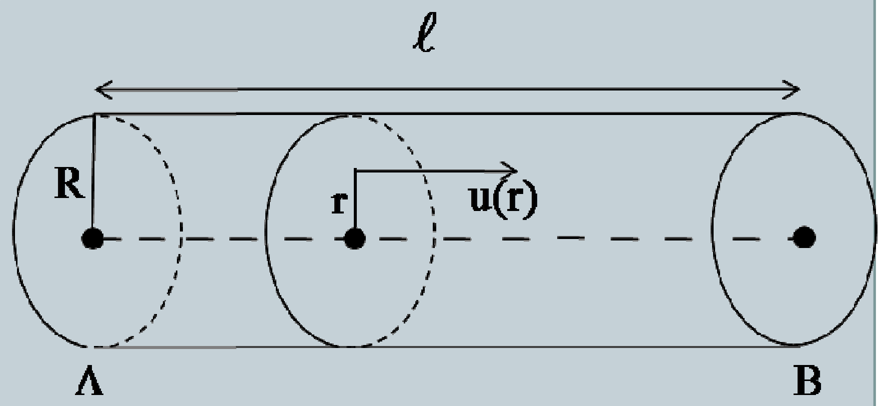
Λύση

1ος τρόπος: Άμεσο από ΘΜΤΟΛ για την f στο [α, β].

2ος τρόπος: Εφαρμογή ΘΜΤ για την παράγουσα της f στο [α, β].

Μια πρακτική εφαρμογή

$$\upsilon(r)=\frac{P}{4n\ell}(R^2-r^2)$$



Να συγκρίνετε τη μέγιστη ταχύτητα με τη μέση ταχύτητα.

Λύση

Μέση ταχύτητα: $\overline{\upsilon}=\frac{1}{R}\int_0^R \upsilon(r)dr=\ldots=\frac{R^2P}{6n\ell}.$

Παράγωγος της ταχύτητας: $\upsilon'(r)=\frac{P}{4n\ell}(-2r)=-\frac{Pr}{2n\ell},\ r\in[0,R].$

άρα η υ είναι γνησίως φθίνουσα με Ο.Μ: $\upsilon_{max}=\upsilon(0)=\frac{PR^2}{4n\ell}.$

Συμπεράσματα

- Είναι ιστορικά σημαντικό.
- Εκτός διδακτέας ύλης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.
- Πολλές ασκήσεις που λύνονται και με ΘΜΤΟΛ έχουν κληθεί να αντιμετωπίσουν οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου.
- Πολλές ασκήσεις που λύνονται και με ΘΜΤΟΛ έχουν τεθεί στις εξετάσεις.
- Θα ήταν χρήσιμο να μπει εντός διδακτέας ύλης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ευχαριστίες!!!

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον σχολικό σύμβουλο
των μαθηματικών του Ν. Κιλκίς
κ. Γιάννη Θωμαΐδη
(Ph.D. της διδακτικής των Μαθηματικών)
που είχε την ευγενή καλοσύνη να μας δώσει τα ιστορικά
στοιχεία για το ΘΜΤΟΛ.

Βιβλιογραφία

- Edwards H. C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag, New York.
- Fauvel J. & Gray J. (1987). *The History of Mathematics – A Reader*. MacMillan Press & The Open University, Milton Keynes.
- Grabiner J. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. The MIT Press, Cambridge.
- Ανδρεαδάκης Σ., Θωμαΐδης Ι., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (1999). *Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου*. ΟΕΔΒ. Αθήνα.
- Αδαμόπουλος Λ., Βαρουχάκης Ν., Γιαννίκας Χ., Μπέτσης Α., Νοταράς Δ., Σολδάτος Κ., Φωτόπουλος Σ. (1991). *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Ανάλυση*. ΟΕΔΒ. Αθήνα.
- Βλάμος Μ. Π. (1999). *Ολοκλήρωμα συνάρτησης*. Εκδόσεις "V". Αθήνα.
- Merkle M. (2015). An axiomatic integral and a multivariate mean value theorem. Journal of Inequalities and Applications. DOI 10.1186/s13660-015-0866-2.
- Tong J. and Braza A. P. (1997). *A converse of the mean value theorem*. The American Mathematical Monthly, vol. 104, no 10, pp. 939-942.
- Tong J. (2000). *The mean value theorem of Lagrange generalised to involve two functions*. The Mathematical Gazette, vol. 84, no. 501, pp. 515–516.
- Tong J. (2002). *A generalization of the mean value theorem for integrals*. The College Mathematics Journal, vol. 33, no. 5, pp.408–409.
- Brand L. (1984). *Μαθηματική ανάλυση*. Εκδόσεις ΕΜΕ. Αθήνα.
- Sahoo K. P. and Riedel T. (1998). *Mean Value Theorems and Functional Equations*. World Scientific Publishing Company, New Jersey, NJ, USA.
- Zhang B. (1997). *A note on the mean value theorem for integrals*. The American Mathematical Monthly. 104. 561-562.
- Θωμαΐδης Γ. (2009). *Μαθηματικά και Εξετάσεις*. Εκδόσεις Ζήτη. Θεσσαλονίκη.
- Κόλλιας Η. Γ. (1995). *Ανάλυση Α΄ Δέσμης, Γ΄ Λυκείου*. Εκδόσεις Σαββάλα. Αθήνα.

Ευχαριστούμε πολύ για την προσοχή σας!!!