

ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΟ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

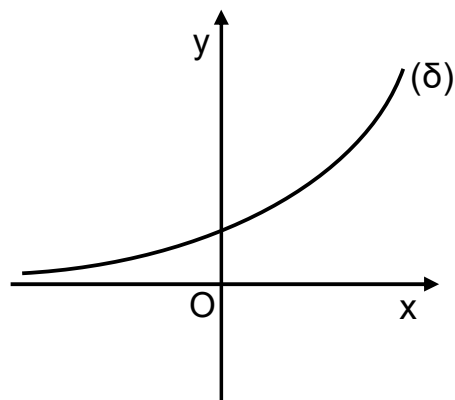
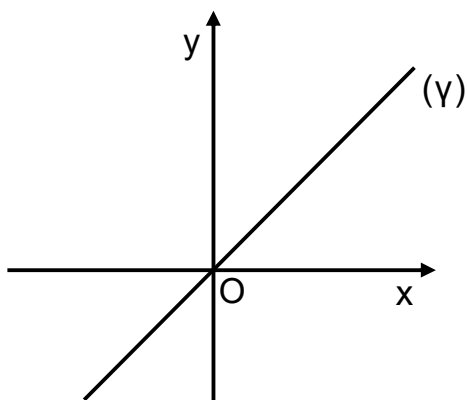
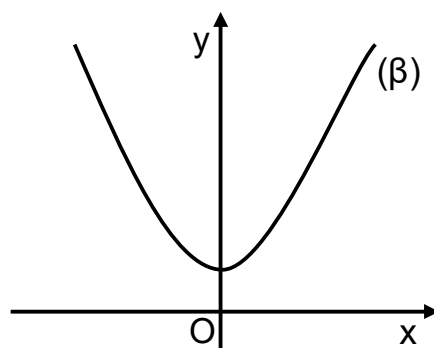
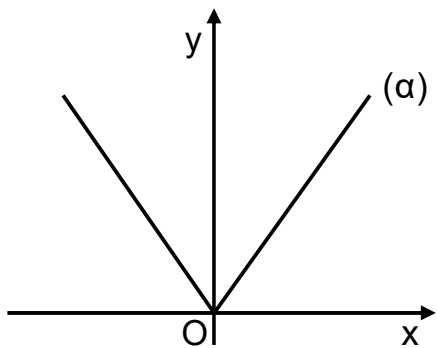
A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στα $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

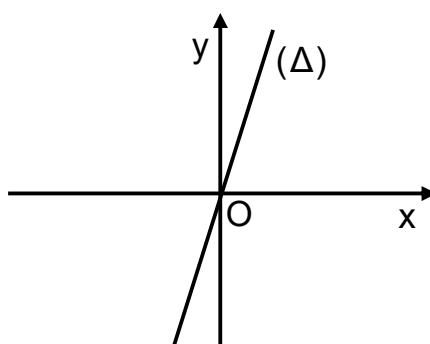
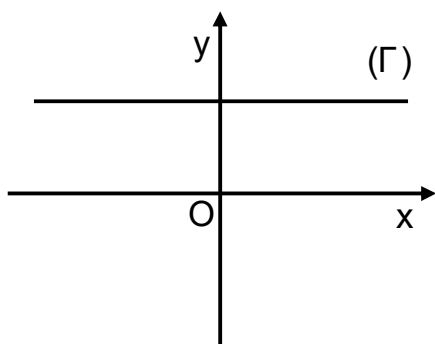
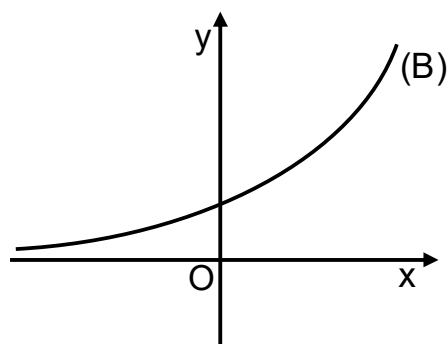
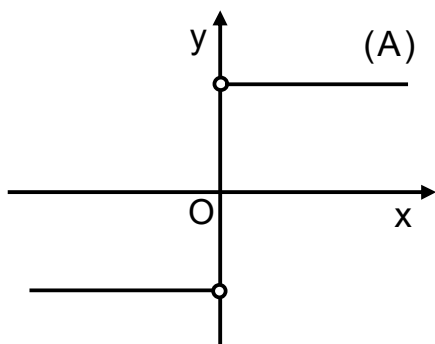
Μονάδες 8

A2. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B . Πότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ ;

Μονάδες 3

A3. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ σε εκείνη από τις συναρτήσεις A, B, Γ, Δ που είναι η παράγωγος της.





Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Κάθε συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- β) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- γ) Αν μια συνάρτηση f είναι «1-1», τότε το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .
- δ) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty.$$

- ε) Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0, \text{ τότε κατ' ανάγκη } f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ ισούται με $\frac{1}{2}$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = \gamma = 0$.

Μονάδες 8

B2. Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο M , είναι κάθετη στην AM .

Μονάδες 7

B3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της συνάρτησης f στο σημείο $(1, f(1))$ και τον άξονα των τετμημένων $x'x$.

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε την κάθετη ευθεία, η οποία χωρίζει το εμβαδόν του χωρίου Ω του ερωτήματος **B3** σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ορισμένες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , για τις οποίες ισχύουν:

- $\left| \frac{f(x)(x^2 + 1)}{e^x} - \frac{f(y)(y^2 + 1)}{e^y} \right| \leq (x - y)^2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$.
- $g(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(g(x))-1} = f(g(x))$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

Γ4. Αν x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ οι ρίζες της εξίσωσης που περιγράφεται στο ερώτημα **Γ2**, τότε να δείξετε ότι υπάρχει, τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^{(3)}$, να τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $(x_0, f^{(3)}(x_0))$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- $f\left(e^{f'(x)}\right) + \ln[xf'(x)] = f\left(\frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

- $\left(\int_{\frac{1}{e}}^1 e^{2f(ex)} dx\right)^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. α) Να δείξετε ότι $\int_1^e f(x) dx = 1$ (μονάδες 5) καθώς, επίσης, ότι η συνάρτηση $g(x) = f(e^x) + \ln x$ είναι «1-1» (μονάδες 2).

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (μονάδες 4).

Μονάδες 11

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη στο πεδίο ορισμού της και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f^{-1} . Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη τιμή του πραγματικού θετικού αριθμού λ για την οποία ισχύει $\frac{f^{-1}(x)}{\lambda} \geq (f \circ f^{-1})(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 5).
Για την τιμή του λ , που βρήκατε να δείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} (μονάδες 2).

Μονάδες 7

Δ3. Αν F είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f στο $(0, +\infty)$, να δείξετε

ότι ισχύει $1 < \int_1^e [F(x+1) - F(x)] dx < 1 - e + \ln \left[\frac{(1+e)^{1+e}}{4} \right]$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομα σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν τα θέματα. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δε θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιο σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλέ ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δε σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα, κλπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ