ΜΙΑ ΠΕΡΙΗΓΗΣΗ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Λεωνίδας Θαρραλίδης
leotharalidis@yahoo.gr
Γυμνάσιο Οινόης Καστοριάς

Περίληψη

Στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών στο λύκειο, η θεματοδοσία των εξετάσεων αποτελεί κομβικό σημείο. Συνδέεται τόσο με το πριν (σχολικό βιβλίο και εκπαιδευτική διαδικασία) όσο και με το μετά (βαθμολόγηση των γραπτών αλλά και διδασκαλία των επόμενων ετών).

Μία επιλογή θεμάτων θεωρείται επιτυχής όταν:

1. Καλύπτει ένα μεγάλο τμήμα της εξεταστέας ύλης
2. Κλιμακώνει τα θέματα σε βαθμό δυσκολίας αλλά και επιτρέπει τη διαπραγμάτευση από τους μαθητές στο χρονικό διάστημα των τριών ωρών
3. Δικαιώνει το σχολικό βιβλίο και τη διδασκαλία στο σχολείο
4. Αξιολογεί την αφομοίωση εννοιών και λογιστικών διαδικασιών αλλά και την κριτική ικανότητα των μαθητών και τη δυνατότητα εκτέλεσης λογικών βημάτων – καμιά φορά και αλμάτων!
5. Αυτονόητη προσθήκη: τα θέματα πρέπει να είναι σωστά, σαφή, συμβατά με το σχολικό βιβλίο και να επιτρέπουν την ομοιόμορφη βαθμολόγηση σε όλα τα βαθμολογικά κέντρα της χώρας. Ακόμη, θα πρέπει ταυτόχρονα να αποφευχθεί η επιλογή ίδιου ή παρόμοιου θέματος με κάποιο που συναντάμε στην εκτενέστατη φροντιστηριακή βιβλιογραφία.

Λόγω των πολλών περιορισμών, καμία θεματοδοσία δεν είναι απόλυτα επιτυχής, πόσο μάλλον που ο συντελεστής βαρύτητας για τα παραπάνω κριτήρια διαφέρει για τον καθένα από μας.

Στη συνέχεια, θα επιχειρήσουμε μία αξιολόγηση ορισμένων θεμάτων των τελευταίων ετών, αναφορικά με την ικανοποίηση των προηγούμενων κριτηρίων. Δεν θα κάνουμε, ωστόσο, αναφορά σε λανθασμένα θέματα αφού αυτά έχουν ήδη συζητηθεί αρκετά. Σε μερικές περιπτώσεις μάλιστα, μπορούμε να δούμε και τις συνέπειες της εισαγωγής των θεμάτων που επιλέξαμε για κριτική.

$1^{ο}$ ΚΡΙΤΗΡΙΟ: Επαρκής Κάλυψη Εξεταστέας Ύλης

Παρόλο που είναι αδύνατο να υπάρξει αναλογική εκπροσώπηση όλων των κεφαλαίων και έλεγχος όλου του δομικού υλικού της εκτενέστατης ύλης, μερικές περιπτώσεις δημιουργούν, μοιραία, εντύπωση:

- Ο πλήρης αποκλεισμός όλων των βασικών θεωρημάτων της ανάλυσης για δύο συνεχόμενες χρονιές (2006, 2007)
- Ο εξοστρακισμός μεγάλων τμημάτων της ύλης επί δεσμών. Τότε, το φαινόμενο δημιουργούσε μεγαλύτερη εντύπωση, επειδή είχε καθιερωθεί να τίθεται μεγάλο πλήθος ερωτημάτων οπότε υπήρχαν περισσότερες ευκαιρίες ενασχόλησης με πολλά κεφάλαια. Τα θέματα της $1^{ης}$ δέσμης του 1997 είναι ένα καλό παράδειγμα: αποκλείστηκαν οι μιγαδικοί, τα συστήματα, η συνδυαστική και οι πιθανότητες καθώς και όλη η αναλυτική γεωμετρία. Επίσης ήταν ιδιαίτερα απαιτητικά. Για το $4^{ο}$ θέμα θα τα πούμε αργότερα.

ΖΗΤΗΜΑ $1^{ο}$

Α. Να αποδειχθεί ότι αν ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφός του είναι μοναδικός.

Β. Έστω ότι Α, Β είναι νxν πίνακες και έστω ότι οι πίνακες Α, Β και 2ΑΒ-3Ι είναι αντιστρέψιμοι. Να αποδειχθεί ότι οι πίνακες $Γ=2Α-3Β^{-1}$ και $Δ=(2Α-3Β^{-1})^{-1}-1/2Α^{-1}$ είναι αντιστρέψιμοι.

ΖΗΤΗΜΑ $2^{ο}$

Α. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\Re$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$. Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $B=\dfrac{f'(\alpha)-Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$. Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\Re-\{\alpha\}$, τέτοια ώστε

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^2}+\frac{B}{x-\alpha}+\frac{\phi(x)}{g(x)}$$ για κάθε $x\in\Re-\{\alpha\}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x)$.

B. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f , ορισμένη στο $\Re$, δύο φορές παραγωγίσιμη , τέτοια ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε $(x-2)f''(x)+(\alpha\eta\mu x-\beta x^2)f'(x)=e^{x-2}-1$ για κάθε $x\in\Re$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho\neq 2$ ώστε $f'(\rho)=0$. Να εξετάσετε αν το f(ρ) είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f.

ΖΗΤΗΜΑ 3^o

A. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, τέτοια ώστε $g(x)>0$ και $g''(x)g(x)-[g'(x)]^2>0$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

β) $g(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2})\leq\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε x_1 , $x_2\in\Re$.

B. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g , παραγωγίσιμη στο $\Re$, τέτοια ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α ,ώστε να ισχύει :
$g(x+y) = e^y g(x)+e^x g(y)+xy+\alpha$ για κάθε x , y $\in\Re$. Να αποδείξετε ότι :

α) $g(0) = -\alpha$

β) $g'(x) = g(x)+g'(0)e^x+x$ για κάθε $x\in\Re$.

ΖΗΤΗΜΑ 4^o

Έστω C είναι η γραμμή του επιπέδου με εξίσωση $y=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, όπου α, β, γ, δ είναι πραγματικοί αριθμοί και $a\neq 0$.
Έστω $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$, $\Delta(x_4,y_4)$ είναι σημεία της C. Υποθέτουμε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB συμπίπτει με το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ και επίσης υποθέτουμε ότι το μέσο αυτό δεν ανήκει στην ευθεία που έχει εξίσωση $\beta+3\alpha x=0$.

A. Να αποδειχθεί ότι $x_1 x_2=x_3 x_4$.

B. Να αποδειχθεί ότι το σημείο A συμπίπτει με το σημείο Γ ή με το σημείο Δ.

- Η διόγκωση του κεφαλαίου των μιγαδικών – επί κατευθύνσεων - με δύσκολα, αυτόνομα, θέματα. Χαρακτηριστικό το 3^o θέμα του 2006:

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$ Μονάδες 9

ii. $|z_1-z_2|^2\leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\geq -1$ Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

καθώς και το 4ο θέμα των επαναληπτικών εξετάσεων του 2007, αμφότερα κακοδιατυπωμένα, όπως θα δούμε στη συνέχεια (Ειδικά το θέμα του 2006 οδήγησε σε έξαρση της φροντιστηριακής βιβλιογραφίας προς την οδό των δύσκολων ασκήσεων και την έκδοση αυτόνομων βιβλίων μιγαδικών.)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 = α+βi και $z_2 = \dfrac{2-\overline{z_1}}{2+\overline{z_1}}$, όπου α, β$\in \mathbb{R}$ με β $\neq$ 0.

Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$. Μονάδες 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 6

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και αβ>0, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι $(z_1+1+i)^{20}-(\overline{z_1}+1-i)^{20}=0$. Μονάδες 10

2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ: Βαθμός δυσκολίας και Κλιμάκωση των Θεμάτων

Το επίπεδο δυσκολίας συναρτάται με τις εξής παραμέτρους:

- Την «ποσότητα» των θεμάτων
- Την πρωτοτυπία τους
- Το πλήθος των πράξεων και των συλλογισμών που απαιτεί η διεκπεραίωσή τους
- Το συνδυασμό διαφορετικών κεφαλαίων που ελέγχουν
- Τις προαπαιτούμενες γνώσεις που βαθμολογούν

Η χρονιά που υπήρξε δυσάρεστη έκπληξη για τους τελειόφοιτους ήταν το 1995. 13 με 14 ερωτήματα ανά δέσμη, μερικά από τα οποία απαιτούσαν αυξημένες ικανότητες αντιμετώπισης του «διαφορετικού», ενώ μόνο ένα από αυτά έλεγχε τη θεωρία – ή τον παπαγαλισμό της «θεωρίας», αν προτιμάτε. Από κει και πέρα επισημοποιήθηκε το νέο καθεστώς. Η επιρροή του στην εξωσχολική βιβλιογραφία είναι επίσης γνωστή:

ΘΕΜΑΤΑ 4ης ΔΕΣΜΗΣ 1995

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Αν για τους νxν πίνακες Α, Β ισχύει $A^2+2B=2AB$ και ο Β αντιστρέφεται να αποδείξετε ότι:

α) Ο πίνακας Α αντιστρέφεται **β)** $2(A^{-1})^2+B^{-1}=2A^{-1}$

Β. Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα 3x3 με πραγματικούς συντελεστές και με αγνώστους $x, y, \omega \in R$. Έστω D η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος και D_x, D_y, D_ω οι ορίζουσες που προκύπτουν από την D αν αντικαταστήσουμε την 1η, 2η και 3η στήλη αντίστοιχα μ3 την στήλη των σταθερών όρων του συστήματος. Υποθέτουμε ότι $\kappa\lambda D=\kappa D_x+2\lambda D_y+(\kappa+2\lambda)D_\omega$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το σύστημα έχει την μοναδική λύση (x_0, y_0, ω_0) τότε $\kappa(x_0+\omega_0)+2\lambda(y_0+\omega_0)=\kappa\lambda$.

β) Αν το σύστημα είναι ομογενές τότε έχει και μη μηδενικές λύσεις.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνεται ο αντιστρέψιμος 2x2 πίνακας Α και ο $B=\begin{pmatrix} \alpha-\beta+\gamma & 0 \\ \alpha-3-\gamma & \beta+\gamma \end{pmatrix}$.

Αν ΑΒ=**Ο** , να βρεθούν τα α, β, γ.

Β. Έστω Ω το σύνολο των ριζών της εξίσωσης $(x^2+4x-5)(x-7)=0$.

Υποθέτουμε ότι Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} (a-1995)ax+y=0 \\ (a-1995)(2a-7)x+(a-6)y=0 \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \Omega$. Έστω $A \subseteq \Omega$ είναι το ενδεχόμενο το παραπάνω σύστημα να έχει και μη μηδενικές λύσεις. Να βρεθεί η πιθανότητα P(A).

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και $f(a) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=\eta$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^2+\alpha$, $a \in \mathbb{R}$.

i) Αν $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $x_1< x_2< x_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

ii) Αν $0<\alpha<1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (-1,0).

Β. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(x)f'(x)=2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0,f(x_0))$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(x_0,g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία y-2x+5=0.

ΖΗΤΗΜΑ 4^o

Α. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t , σύμφωνα

με τη συνάρτηση $f(t)=\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t\geq 0$, όπου Α ένας θετικός αριθμός . Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t) , από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή , δίνεται από τη συνάρτηση $K'(t)=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}$, $t\geq 0$ και υποθέτουμε ότι K(0)=0 . Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πουληθεί η μηχανή , έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο .

Β. Αν $G(x)=\int_1^x f(t)dt$, όπου $f(t)=\int_1^{3t}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$ και x>0 , t >0 να βρείτε :

α) την $G''(1)$

β) το $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}G''(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}$

Με τη μετάβαση από το σύστημα των δεσμών σε αυτό των κατευθύνσεων, νομίζω ότι το φαινόμενο να μην προλαβαίνει ο καλά προετοιμασμένος μαθητής να διέλθει των θεμάτων έχει ξεπεραστεί. Όπως προείπαμε, παλαιότερα, πλήθος ερωτημάτων και υποερωτημάτων άγχωναν τον υποψήφιο, ο οποίος βρισκόταν ανίκανος διαχειριστής του χρόνου.

Για την πρωτοτυπία των θεμάτων και πως αυτή ελέγχθηκε κατά καιρούς από τους θεματοδότες, θα μιλήσουμε αργότερα.

Όσον αφορά στον έλεγχο προαπαιτούμενων γνώσεων, σχεδόν ποτέ δε βρίσκεται στη σκέψη των θεματοδοτών. Μία φορά που εντόπισα σχετικό θέμα, κατέληξε να είναι το κύριο ζητούμενο (4^o Θέμα της 1^{ης} δέσμης 1997).

3^o Κριτήρια : Συνάφεια με το Σχολικό Βιβλίο

Εδώ, θα μπορούσε να γράψει κανείς ολόκληρο βιβλίο. Είναι εκτίμησή μου, που προκύπτει με την απλή σύγκριση των θεμάτων με τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου, ότι ένας καλά προετοιμασμένος υποψήφιος, μέτριων τουλάχιστον δεξιοτήτων, με καθηγητή (σχολείου) οπλισμένο με ζήλο και εργατικότητα, ο οποίος προσέρχεται έχοντας μελετήσει σε βάθος ΜΟΝΟ το σχολικό βιβλίο, δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να ξεπεράσει το 15.

Μα, θα παρατηρήσει κανείς, τόσοι και τόσοι μαθητές έχουν κάθε χρόνο καλές επιδόσεις στα μαθηματικά. Σωστό και εύκολα ερμηνεύσιμο: αφαιρέστε μία τουλάχιστον από τις παραπάνω προδιαγραφές που έθεσα. Δέχομαι και το ενδεχόμενο να έχουμε παραγνωρισμένες ιδιοφυΐες στα σχολεία μας.

Τα παραδείγματα υπέρβασης του σχολικού βιβλίου είναι τόσο πολλά, που θα περιοριστώ στα θέματα των κατευθύνσεων:

Με το καλημέρα, το 2001, εμφανίζεται ολοκλήρωμα μεταβλητού ορίου όπου απαιτείται αντικατάσταση u=xt.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών IR, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)\,dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$ Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to\infty}(xf(x)\eta\mu 2x)$ Μονάδες 7

Φυσικά δεν περιέχεται αντίστοιχη άσκηση στο σχολικό βιβλίο.

Δύο χρόνια αργότερα, έχουμε το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης:

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3.

Μονάδες 8

Στις επαναληπτικές του 2004, εμφανίζεται η λύση διαφορικής εξίσωσης, η οποία δεν υποστηρίζεται από καμία άσκηση – ενώ κατάντησε αγαπημένο (άρα προβλέψιμο άρα «εύκολο») θέμα των θεματοδοτών.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)dt$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-(x+1)$. Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$ Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Μονάδες 6

Έτσι, την επόμενη χρονιά εμφανίζεται και στις εξετάσεις του Μαΐου. Στο ίδιο θέμα, έχουμε αντικατάσταση u=x-t, ενώ στο 3^{o} θέμα έχουμε όριο φραγμένης συνάρτησης:

ΘΕΜΑ 3^{o}

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα — Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ. — Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda) = \dfrac{e-2}{2\lambda}$. — Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda^2 \mathrm{E}(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$. — Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^{o}

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x - f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f(0)=0.

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln(\dfrac{1+e^x}{2})$. — Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$. — Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις: $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt$ και $g(x) = \dfrac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι h(x) = g(x) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. — Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt = \dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0 , 1).

Μονάδες 6

Το 2006, εμφανίζεται το γνωστό 3ο θέμα των μιγαδικών, το οποίο επαναφέρει το ενδιαφέρον για τις δύσκολες ασκήσεις στο κεφάλαιο αυτό, οι οποίες επί εποχής δεσμών ήταν αρκετά οικείες. Ίσως και οι θεματοδότες εκείνης της χρονιάς να αισθάνονταν οικεία με την εποχή των δεσμών.

Την ίδια χρονιά, έχουμε κοινή εφαπτομένη γραφικών παραστάσεων σε **διαφορετικά** σημεία τους.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x)=lnx στο σημείο Α(α,lnα) με α>0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta,e^\beta)$ με $\beta\in\mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0.

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 3

Προσωπικά, χάρηκα που «έπιασα θέμα» (περιοδικό «Το φ», τ.3, σελ. 226)(1) αλλά φυσικά παρόμοιο θέμα δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο.

Βέβαια, η συνάφεια με το σχολικό βιβλίο (και με το μάθημα που μπορεί να κάνει ένας ευσυνείδητος καθηγητής σε ένα σχολικό τμήμα με ήσυχους μαθητές και χωρίς πολλές χαμένες διδακτικές ώρες), δεν κρίνεται μόνο από τη συσχέτιση των θεμάτων με τις ασκήσεις του βιβλίου. Εδώ παρατηρείται το φαινόμενο ακόμη και να μην ξέρουμε τι θεωρείται δεδομένο και γνωστό. Στο 4ο Θέμα του 2002, ζητήθηκε η απόδειξη μίας ανισότητας, η οποία στα βιβλία των δεσμών θεωρούνταν γνωστή. Τι άλλαξε στο μεταξύ;

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].

Να αποδείξετε ότι αν h(x) > g(x) για κάθε x $\in$[α, β], τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Μονάδες 2

Το ζήτημα γίνεται πιο σοβαρό για όσους από μας έχουμε εμπειρία από βαθμολογικά κέντρα. Λύστε μου σας παρακαλώ τις απορίες: Στην εφαρμογή του κανόνα De L'Hospital , ποιες εξηγήσεις ζητάτε; Αν ένας μαθητής, για να δείξει ότι ένας αριθμός z είναι πραγματικός, ξεκινήσει με τη φράση «αρκεί να δείξω ότι ισούται με το συζυγή του», θα του κόψετε μονάδες; Μπορεί ο υποψήφιος της γενικής παιδείας να χρησιμοποιεί τον κανόνα De L'Hospital ή τον τύπο της εφαπτομένης;

Είναι τόσο αισθητό μερικές φορές το δέος των θεματοδοτών ως προς το τι γράφει το σχολικό βιβλίο που αγγίζει τα όρια της γελοιότητας: Το 2004 επέλεξαν για ερώτηση τύπου σωστό - λάθος μια ιδιότητα που αποκομμένη από το σχολικό βιβλίο είναι λάθος:

1^{ο} Θέμα, Γ. β) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$

Δεν γύριζαν δυο σελίδες παρακάτω να επιλέξουν τη σωστή; (Με βάση, βέβαια, τη σύμβαση περί ύπαρξης ορίου για συναρτήσεις που ορίζονται μονόπλευρα γύρω από το x_0, είναι λανθασμένες και όλες οι ιδιότητες για τις πράξεις παραγώγων).
Το 2006, ζήτησαν την απόδειξη του θεωρήματος που συνδέει τη μονοτονία της συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου της. Ναι, αλλά το ζήτησαν και για την περίπτωση της αρνητικής παραγώγου, όπου το βιβλίο αναφέρει στην απόδειξη «ομοίως». Η αστεία συνέχεια είναι γνωστή σε όλους μας: Ερωτήθηκε η ΚΕΓΕ αν χρειάζεται να γίνει πλήρης απόδειξη και για αυτό το υποερώτημα και απάντησε σοφά «να γραφεί ό,τι αναφέρει το σχολικό βιβλίο»! Οποία τυπολατρεία! Θυμηθείτε και το θέμα της γενικής παιδείας με το πλήθος αντρών και γυναικών και το «x ανήκει στο R» της ΚΕΓΕ!

4^{ο} Κριτήριο: Αξιολόγηση Κριτικής Σκέψης

Η αξιολόγηση της κριτικής ικανότητας του υποψηφίου είναι από τα πιο δύσκολα στον εντοπισμό τους χαρακτηριστικά. Συναρτάται δε άμεσα με την πρωτοτυπία των θεμάτων. Όσον αφορά όμως αυτή την πρωτοτυπία, έχει δημιουργηθεί ήδη ένα δεδικασμένο: όλες οι ασκήσεις που συναντά κανείς στα φροντιστηριακά βιβλία ή σε περιοδικά είναι πια πιθανά θέματα εξετάσεων. Με αποτέλεσμα ο μαθητής που επιζητεί το άριστα να είναι εγκλωβισμένος σε μία διαρκή αναζήτηση του «περίεργου» και του «διαφορετικού», και χωρίς τη σιγουριά που του έδινε παλιότερα η άνεση ότι κι οι υπόλοιποι της κλάσης του θα έγραφαν περίπου το ίδιο. Μην ξεχνάμε ότι οι υποψήφιοι των ιατρικών σχολών είναι πια εξαρτημένοι από τις επιδόσεις στα μαθηματικά.

Μιλάμε όμως για την **πρωτοτυπία** των θεμάτων. **Πρωτοτυπία ως προς τι;** Η βάση μας είναι το σχολικό βιβλίο ή μετράμε και την ατέλειωτη και συνεχώς διογκούμενη εξωσχολική βιβλιογραφία; Και πώς ο μαθητής γίνεται κοινωνός της; Μέσω της επιλογής του πιο ενημερωμένου προγυμναστή ή μέσω της επιλογής δυο – τριών βιβλίων και κατάλληλων ασκήσεων που θα τον βοηθήσουν να εμβαθύνει;

Πολλές φορές βλέπω την εμφανέστατη προσπάθεια των θεματοδοτών να «πρωτοτυπήσουν». Να μερικοί τρόποι:

1. Κάνοντας να φαίνεται περίπλοκο ένα θέμα με τη μπερδεμένη διατύπωσή του: Δείτε, για παράδειγμα το 2^{o} θέμα του 2007. Τόσος κόπος για να ορίσουμε δύο στοιχειωδέστατους μιγαδικούς!

> **β.** Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \dfrac{2+ai}{a+2i}$ για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

Δείτε και το 1Β του 1996 της 4^{ης} δέσμης. Ποτέ ένα μηδενικό δεν είχε τόσο μεγάλη αξία!

> Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ και το πολυώνυμο $f(x)=-x^2+3x+1$.
>
> **α)** Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\left|A - \lambda I\right| = 0$, όπου **I** ο μοναδιαίος πίνακας.
>
> **β)** Αν Β συμβολίζει τον πίνακα $(f(3)-1)(A-I)^2+A-f(1)I$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μη μηδενικός πίνακας στήλη Χ τέτοιος ώστε ΒΧ=**Ο** όπου **Ο** ο μηδενικός πίνακας.

2. Επιλέγοντας θέματα – συνολικά- «αντι-sos» όπως θα λέγαμε. Με άλλα λόγια μη αναμενόμενα. Ποιος περίμενε – επανέρχομαι – δύο διαδοχικές χρονιές (2006, 2007) χωρίς θεωρήματα; Σας τη φέραμε, λοιπόν! Δεν σκέφτονται όμως οι θεματοδότες πως ό,τι είναι πολυδιαφημισμένο και πολυφορεμένο είναι μάλλον και το πιο σημαντικό; Γιατί πρέπει να μένει στο περιθώριο;

3. Συνδυάζοντας τα ασυνδύαστα: Δείτε ένα μνημείο ομορφιάς των δεσμών όπου μέσα στον πολτό των μαθηματικών ιδεών βρέθηκε χώρος για τα πάντα…

ΖΗΤΗΜΑ 3^{ο}

α) Δίνεται ο νxν πίνακας Α με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς για τον οποίο ισχύει: A^2-2(λ-2)^{2}A+I=**O** όπου Ι είναι ο μοναδιαίος νxν πίνακας και λ πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι ο πίνακας Α+Ι είναι αντιστρέψιμος για κάθε λ.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)|A+xI|+(x-1)|A-xI|=1-x^2$, όπου Α είναι ο πίνακας του ερωτήματος α) και x πραγματικός αριθμός έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (-1,1). Με $|A+xI|$ και $|A-xI|$ συμβολίζουμε την ορίζουσα του πίνακα Α+xΙ και Α-xΙ αντίστοιχα.

γ) Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ με πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων που ικανοποιούν τις σχέσεις 2P(1)=2P(3)=2P(5)=2P(7)=3P(2)=3P(4)=3P(6)=3P(8) και το ενδεχόμενο $B=\left\{\lambda\in\Omega \middle\langle \begin{matrix}\text{το σύστημα ΑΧ=Χ έχει}\\ \textit{τουλάχιστονδύολύσεις}\end{matrix}\right\}$ όπου Χ ένας νx1 άγνωστος πίνακας και Α ο πίνακας του ερωτήματος α). Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Β.

δ) Δίνεται το τριώνυμο f(x)=x^2+γx+4 όπου ο συντελεστής γ επιλέγεται τυχαία από το δειγματικό χώρο Ω του ερωτήματος γ). Αν $\Gamma=\left\{\gamma\in\Omega \middle\langle \begin{matrix}\text{η εξίσωση f(x)=0 έχει}\\ \textit{πραγματικέςρίζες}\end{matrix}\right\}$, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ και να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Β (του ερωτήματος γ) και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Αυτό ήταν το 3^{ο} θέμα της 1^{ης} δέσμης του 1998. Θυμηθείτε οι παλαιότεροι – αλλά μη μάθετε οι νεότεροι- τον καταιγισμό χαζοθεμάτων που αναγκαστήκατε να διδάξετε… Καλά τα έλεγε ο Χάρης ο Βαφειάδης σε ένα μικρό αρθράκι του στη Μαθηματική Παιδεία (τ.1, 1996)[(2)]:

Της Μόδας Τα Καμώματα…

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο f(x)=2g(x)-1 όπου g(x)=αx-(-β) με α και β τέτοια ώστε $\alpha=\gamma\cdot\lim_{x\to 2}(x^2-1)$ και $\beta=\begin{vmatrix}1 & \delta\\ -1 & 2\end{vmatrix}$ όπου γ και δ είναι $\gamma=\int_0^1 kx\,dx$ και δ=λ με k και λ τέτοια ώστε $k=|z-2i|$ και $\lambda=|\overrightarrow{OM}|$ όπου z=2ν-i και $\overrightarrow{OM}=\mu\vec{i}-\vec{j}$ ώστε τα ν και μ να είναι: $\nu=\max\{0,\rho\},\rho>0$ και μ=P(ω$_1$) όπου ρ η τεταγμένη του σημείου που η ευθεία y=2x-τ τέμνει τον y΄y και P(ω$_1$)=φ/6.

Αν τ=h΄(3) και φ=2d-1 όπου $h(x)=\dfrac{bx^2}{2}$ και d η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης x^2-5x+2λ=0 ώστε για τα b και λ να ισχύουν 3b=λ και λ=S(x) όπου S(x) μία σταθερή συνάρτηση που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(x,θ) με θ τετμημένη του κέντρου του κύκλου που έχει εξίσωση: $(x-x_0)^2+(y-1)^2=\lim\limits_{x\to 1}(4x^2)$ και x_o η τετμημένη του σημείου επαφής της φ(x)=cx^2 και y=6x-9 όπου c=c_1+c_2c_4-3c_3-(c_5-3) και c_1 το ατομικό βάρος του οξυγόνου, c_2=k_c η ηλεκτρική σταθερά του Coulomb, c_3 το PH του ουδέτερου υδατικού διαλύματος, c_4 το φορτίο Q=1 nCb σε Cb και c_5 το πλήθος των γραμμάτων της λέξης **ντροπή.**
Να αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1.

5ο Κριτήριο: Τα Αυτονόητα

Η πρώτη παράμετρος που θα εξετάσουμε είναι η αναφορά σε ήδη **υπάρχοντα στη βιβλιογραφία θέματα**. Υποτίθεται ότι πρέπει να αποφεύγονται κι αυτός ο περιορισμός είναι ίσως το μεγαλύτερο βάσανο των θεματοδοτών. Ένας τρόπος για να τον ξεπεράσουν θεωρήθηκε κάποτε ότι είναι να τον αντιστρέψουν: να θέσουν θέματα πασίγνωστα! Δείτε για παράδειγμα την άσκηση:
«Αν $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=|z|$ αποδείξτε ότι: $\operatorname{Re}\left(z^2\right)=-\dfrac{1}{2}$», που εμφανίστηκε ως ερώτημα το 2004. Υπάρχει στο βιβλίο «Άλγεβρα – Αναλυτική Γεωμετρία 1ης Δέσμης» των Δ. Γεωργακίλα – Τ. Θεοδωρακόπουλου (εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη 1998)(3) και σε πολλά ακόμη βιβλία…
Άλλο παράδειγμα: «Έστω f συνάρτηση συνεχής στο [α,β], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και τέτοια ώστε να είναι f(α)=f(β)=0 και f(γ)>0 όπου $\gamma\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να είναι f΄΄(ξ)<0». Βρίσκεται στο βιβλίο «Ανάλυση 1ης Δέσμης» του Δ. Γεωργακίλα (εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη 1998)(4) και σε αρκετά ακόμη… Το 2003, στο περίφημο 4ο Θέμα, επιλέχθηκε η ιδέα να «διπλασιάσουν» την άσκηση! Έτσι, ελέγχουμε αν μπορεί ο μαθητής να εφαρμόσει 6 φορές το θεώρημα Μέσης Τιμής (αντί για 3):

ΘΕΜΑ 4ο
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α,β), δ∈(α,β), έτσι ώστε f(γ)·f(δ)<0, να αποδείξετε ότι:
α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β).
Μονάδες 8
β. Υπάρχουν σημεία ξ_1, ξ_2 ∈ (α,β) τέτοια ώστε f΄΄(ξ_1)<0 και f΄΄(ξ_2)>0.
Μονάδες 9

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι δεν είναι ασυμβίβαστο η επιλογή ενός γνωστού θέματος να συμβαδίζει με την **κακοποίησή** του. Καλύτερο παράδειγμα από το προηγούμενο υπάρχει και βρίσκεται στο μακρινό 1996. Δείτε το πρώτο ερώτημα του $1^{ου}$ θέματος για την $1^{η}$ Δέσμη:

ΖΗΤΗΜΑ $1^{ο}$

Α. Δίνονται οι νxν πίνακες Α, Β, Γ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις Α+Β+1996ΑΒ=**Ο**, Β+Γ+1996ΒΓ=**Ο**, Γ+Α+1996ΓΑ=**Ο,** όπου **Ο** ο μηδενικός πίνακας.
α) Να αποδείξετε ότι οι πίνακες Ι+1996Α, Ι+1996Β, Ι+1996Γ είναι αντιστρέψιμοι και ότι ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ, όπου Ι ο μοναδιαίος πίνακας.
β) Να αποδείξετε ότι Α=Β=Γ.

Προκύπτει ότι οι πίνακες Ι+1996 Α, Ι+1996 Β και Ι+1996 Γ είναι αντίστροφοι ανά δύο οπότε προφανώς, λόγω της μοναδικότητας του αντίστροφου: Α=Β=Γ ! Τι νόημα έχει, λοιπόν, να ζητείται στο (α) ερώτημα η απόδειξη του « ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ» ; Μα μπορεί οι θεματοδότες να το έλυσαν έτσι, ίσως να είναι μια πρώτη σκέψη. Το θέμα αυτό όμως βρίσκεται στο βιβλίο των G. Andrei – C. Caragea – G. Bordea «Algebra» (Constanta 1993)[5] με την εξής διατύπωση: « Αν Α, Β, Γ είναι τετραγωνικοί πίνακες και Α+Β+λΑΒ=Β+Γ+λΒΓ=Γ+Α+λΓΑ=**Ο** , όπου λ τυχαίος μιγαδικός, αποδείξτε ότι: Α=Β=Γ». Η ελληνική μας πινελιά στην υπόθεση απεδείχθη , λοιπόν, αποτυχημένη!

Δεν είναι πρωτότυπο φαινόμενο η κακοποίηση ενός θέματος, δηλαδή η παράλογη σειρά στη διατύπωση των ερωτημάτων. Στο $4^{ο}$ θέμα των επαναληπτικών εξετάσεων του 2007 που προαναφέραμε, ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z_1 (β ερώτημα) προκύπτει στην πορεία απάντησης του (α) ερωτήματος!

Επίσης, στο $3^{ο}$ θέμα του 2006:

ΘΕΜΑ $3^{ο}$

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.
α. Να αποδείξετε ότι:
i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$

Μονάδες 9

ii. $|z_1 - z_2|^2 \le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) \ge -1$

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

προκύπτουν οι ισότητες $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ και $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$, οι οποίες καθιστούν γελοίο – ως ερώτημα – το α)ii). Γιατί αν σπείρουμε τη σύγχυση μεταξύ των εννοιών «σταθερή τιμή» και «φράγμα» τότε πώς θα διακρίνουν οι μαθητές μας το «ακρότατο» από το «φράγμα»; (Για τις συνέπειες αυτής της παράνοιας, με αφορμή το συγκεκριμένο θέμα του 2006, δες «Λ. Θαρραλίδη: Ακρότατα και Φράγματα στα Μέτρα Μιγαδικών»)[(6)(7)]. Φαίνεται, λοιπόν, ότι και οι θεματοδότες έλυσαν το θέμα με τριγωνική ανισότητα. Οπότε ας θεωρήσουμε θεμιτό κι ένα ερώτημα της μορφής: «Αποδείξτε ότι $|z_1 - z_2|^2 \leq 2008$»!

Δείτε τώρα κι ένα θέμα από τις «δύσκολες» επαναληπτικές εξετάσεις στα μαθηματικά γενικής παιδείας (2001):

Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω Α το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα.

α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα. Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι: $P(Γ - Α) \leq \frac{3}{5}$ Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα. Μονάδες 8

δ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές. Μονάδες 7

Διαβάστε το σχόλιο του Γιώργου Ρίζου:

«Προσέξτε ότι: "Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες", άρα αφού 340 από τους 400 παρακολουθούν Αγγλικά, οι υπόλοιποι 60 παρακολουθούν ***μόνο*** *Γαλλικά. Επίσης οι 400 – 240 = 160,* ***μόνο*** *Αγγλικά και οι υπόλοιποι 180 και τις δύο, οπότε ... λύθηκε η άσκηση. Στο ερώτημα (β), βεβαίως, μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την P(Γ – Α) = 0,15 και όχι απλά να "αποδείξουμε" ότι είναι μικρότερη του 0,60...Όταν οι εκφωνήσεις των ασκήσεων και των προβλημάτων σε εξετάσεις είναι προφανώς τεχνητές, περισσότερα προβλήματα δημιουργούν στους μαθητές, γιατί μοιάζουν να περιέχουν και μία δόση ειρωνείας.Τα θέματα των εξετάσεων ας είναι υποδείγματα ορθής κριτικής σκέψης. Θα*

είναι ένα σημαντικό βήμα για να διορθωθεί η κατάσταση, γιατί τα θέματα αυτά αποτελούν κατά κανόνα πρότυπο των συγγραφέων σχολικών βοηθημάτων.»[8]

Για να επιστρέψω, τελειώνοντας, στις κρυφές πηγές των θεματοδοτών, όταν η φαντασία στερεύει. Είναι γνωστές οι δυσκολίες των υποψηφίων στην αντιμετώπιση του δεύτερου ερωτήματος των φετινών εξετάσεων:

ΘΕΜΑ 4°

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει f(0) > 0. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει g(x) > 0 για κάθε $x \in [0,1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt \ , \ x \in [0,1] \quad , \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt \ , \ x \in [0,1].$$

α. Να δειχθεί ότι F(x) > 0 για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι: f(x) G(x) > F(x) για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 6

Η επόμενη άσκηση βρίσκεται στο βιβλίο του κ. Σωτήρη Ντούγια «Απειροστικός Λογισμός ΙΙ» (Leader Books 2007)[9]:

«Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς, θετικές στο [α,β] και τέτοιες ώστε f(x)=φ(x)g(x), $\forall x \in [\alpha, \beta]$, όπου φ είναι μια αύξουσα συνάρτηση στο [α,β]. Αν $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ και $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, τότε να αποδείξετε ότι $F(x) \le \phi(x)G(x)$.

Επίσης να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{F}{G}$ είναι αύξουσα στο [α,β].»

Πριν καταλήξουμε, θα επισημάνουμε μία ακόμη παράμετρο. Μετά τη διεξαγωγή των εξετάσεων, τα γραπτά των υποψηφίων βαθμολογούνται στα διάφορα κέντρα της χώρας. Η διατύπωσή τους καθώς και η μοριοδότηση των ερωτημάτων, θα πρέπει να επιτρέπει την επιμέρους μοριοδότηση στο εσωτερικό κάθε ζητήματος με τρόπο αντικειμενικό και ομοιόμορφο στο σύνολο της χώρας, ώστε να διασφαλίζεται η δίκαιη βαθμολόγηση όλων των υποψηφίων, που είναι το κύριο ζητούμενο των εξετάσεων. Στο εξαιρετικό, κατά τα άλλα, φετινό τρίτο θέμα , υπήρξαν πολλές διαφωνίες σχετικά με τις βαθμολογικές επιπτώσεις της λανθασμένης παραγώγισης της σταθεράς θ στο σύνολο των ερωτημάτων:

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2ημ^2θ$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $Γ(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2ημ^2θ$.

Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2ημ^2θ$.

Μονάδες 7

Συμπεράσματα - Προτάσεις

- Οι επισημάνσεις που έκανα παραπάνω, αφορούν στην αρνητική όψη της θεματοδοσίας των τελευταίων ετών και συνιστούν – εξ ορισμού – «προτάσεις προς αποφυγήν».
- Υποψιάζομαι, φυσικά, τη δύσκολη θέση των θεματοδοτών: πρέπει να ελέγξουν, με τα ίδια θέματα, το σύνολο του μαθητικού πληθυσμού της χώρας, παραβλέποντας διάφορες ιδιαιτερότητες. Και μάλιστα πρέπει να τους ταξινομήσουν σε διακριτές βαθμολογικά ομάδες.
- Οι παραπάνω επιφυλάξεις, δεν αναιρούν, ωστόσο, το εξής: Η επαρκής κάλυψη της εξεταστέας ύλης, η σαφήνεια των εκφωνήσεων και η συμβατότητα με το σχολικό βιβλίο, ο σεβασμός στην κοινή λογική του λύτη είναι στοιχεία εξίσου σημαντικά με την μέτρηση των «εξωτικών» επιδόσεων. Κανείς θεματοδότης δε θα κατηγορηθεί επειδή ασπάστηκε το παραπάνω

δόγμα. Είναι, λοιπόν, καιρός να επιστρέψουμε στο σχολικό βιβλίο, στη διδασκαλία στην τάξη. Και να διαλυθεί, ο μύθος, ότι τάχα δεν μπορούν να φτιαχτούν δύσκολες ασκήσεις στηριγμένες σε ιδέες ασκήσεων του σχολικού. Το βιβλίο αυτό, δυστυχώς δεν είναι προσπελάσιμο από την πλειονότητα των μαθητών. Ο καθηγητής του σχολείου συχνά δεν το διδάσκει γιατί θεωρεί δεδομένο ότι οι μαθητές το διδάχτηκαν «αλλού» και ο … «εκεί αλλού»… είναι βέβαιος ότι θα το διδαχθούν στο σχολείο!

Προτείνω προς μακροχρόνια και όχι συμπτωματική θεραπεία τα εξής:

1. Μετά την αρχική επιλογή των θεμάτων, να παρεμβαίνει μία ανεξάρτητη επιτροπή η οποία να ελέγχει τη συμβατότητα των θεμάτων με το σχολικό βιβλίο, τη δυνατότητα επίλυσής τους από τους μαθητές στη χρονική προθεσμία, τη σαφήνεια, την αναλογικότητα και την ορθολογική διατύπωση. Η τελική επιλογή να είναι αποτέλεσμα της συνεργασίας των δύο ομάδων.
2. Να υπάρχει συνεργασία μεταξύ της ΚΕΓΕ και του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου. Δεν είναι δυνατόν, για παράδειγμα, οι τύποι του Vieta να είναι αρχικά παραγκωνισμένοι (στα πλαίσια του ασφυκτικού ωρολογίου προγράμματος της Άλγεβρας της Α Λυκείου) και να αναβαθμίζονται, αίφνης, στην Γ Λυκείου. Βέβαια, πολλοί καθηγητές αγνοούμε τις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου κι έτσι φτιάχνει ο καθένας μας από ένα δικό του Αναλυτικό Πρόγραμμα…
3. Επιλεγμένα θέματα του πρόσφατου παρελθόντος να προστίθενται – υπό μορφή επαναληπτικών ασκήσεων – στις νέες εκδόσεις των βιβλίων μαθηματικών της Γ Λυκείου. Είναι υποκριτικό να αγνοούμε τον κεντρικό ρόλο των εξετάσεων στη σχολική διδασκαλία. Αν θέλουμε να αποδεσμεύσουμε **το σχολείο** από τις εξετάσεις αλλά και να κερδίσουμε την εκτίμηση των μαθητών μας, πέρα των πολλών υπολοίπων που πρέπει να γίνουν, πρέπει **πρώτα να δικαιώσουμε το ρόλο μας μέσα σ' αυτό**.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(1) Περιοδικό «Το φ», τεύχος 3, σελ. 226
(2) Περιοδικό «Μαθηματική Παιδεία», τεύχος 1, σελ. 114
(3) «Άλγεβρα – Αναλυτική Γεωμετρία 1ης Δέσμης» (Δ. Γεωργακίλας – Τ. Θεοδωρακόπουλος, εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη 1998, σελ. 360)
(4) «Ανάλυση 1ης Δέσμης» (Δ. Γεωργακίλας, εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη 1998, σελ.260)
(5) «Algebra» (G. Andrei – C. Caragea – G. Bordea , Constanta 1993)
(6) Περιοδικό «Το φ», τεύχος 4, σελ. 95 – 106
(7) Περιοδικό «Απολλώνιος», τεύχος 5, σελ. 80 – 99
(8) «Οι περιπέτειες του Προβλήματος στα σχολικά Μαθηματικά» (Γ. Ρίζος, εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη 2005, σελ. 100)
(9) «Απειροστικός Λογισμός ΙΙ» (Σ. Ντούγιας, εκδ.Leader Books 2007, σελ. 237)