ΘΕΜΑ 17842

Δίνεται η συνάρτηση: 

με  θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία  και  .

α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους και να υπολογίσετε την τιμή τους. (Μονάδες 10)

β) Θεωρώντας γνωστό ότι  και ,

i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  *με* τους

άξονες. (Μονάδες 3)

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να

σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  και να εξηγήσετε πώς αυτή

σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ** (Μονάδες 6)

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης, τα διαστήματα στα οποία η είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. (Μονάδες 6 )

ΛΥΣΗ

Α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  διέρχεται από τα σημεία  και  , επομένως οι συντεταγμένες των σημείων θα επαληθεύουν την εξίσωσή της .

Δηλαδή  και 

Άρα 

και 

Με αντικατάσταση της σχέσης (1) στην σχέση (2) παίρνουμε:



Αντικαθιστώντας στην σχέση ( 1) 

Β) Αφού  και τότε .

1. Για να βρούμε τα σημεία τομής της  με τον άξονα  λύνουμε

Το σύστημα 

Είναι 

Επομένως τα κοινά σημεία της  με τον άξονα  είναι και 

Αντίστοιχα για το σημείο τομής της  με τον άξονα  βρίσκουμε το  δηλαδή το δοσμένο σημείο  .

1. Η συνάρτηση  είναι της μορφής  που η γραφική της παράσταση αποτελεί καμπύλη που την ονομάζουμε παραβολή με κορυφή το σημείο Ο(0,0) που αποτελεί και το ελάχιστο αυτής.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  αποτελεί μετατόπισης της , όπως φαίνεται και στο σχήμα , κατά  μονάδες στον άξονα  και κατά  μονάδες στον άξονα .

1. Η συνάρτηση  παρουσιάζει ελάχιστο για  που είναι το .

Στο διάστημα  είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο διάστημα  είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 17843

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* η οποία είναι της μορφής *,* με  πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  (Μονάδες 3)

ii. την περίοδο  της συνάρτησης (Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών  .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι  και , να προσδιορίσετε **αλγεβρικά** την τετμημένη  του σημείου  της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Α) Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει ότι :

1.  και 
2. Η περίοδος 

Β) Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει ότι  είναι θετικοί αριθμοί.

Επομένως 



Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει 

Και με αντικατάσταση .

Ακόμη 

Επομένως ,  και .

Γ) Αφού ,  και  τότε .

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  διέρχεται από το σημείο  , επομένως οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν την εξίσωσή της . Δηλαδή  .

Είναι 





ή 

ή 

Όμως όπως φαίνεται από το σχήμα 

Επομένως 

 αδύνατο αφού 

Επίσης 



Άρα για  έχουμε 