ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
3^{Ο} ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 01/02/2014

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(3 μονάδες)

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

(5 μονάδες)

Α3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, x≥0

α) Να δείξετε ότι στο x_0=0 η f δεν είναι παραγωγίσιμη

β) Να δείξετε ότι για x>0 η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(8 μονάδες)

Α4. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να γράψετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(5 μονάδες)

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος

i) Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο , ώστε f(ξ)=0 , τότε f(α)f(β)<0 **Σ Λ**

ii) Αν η f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β] , τότε η f παίρνει πάντα στο [α,β] μια μέγιστη τιμή

Σ Λ

iii) Αν f΄(x)=0 για κάθε x∈$\Re^*$, τότε η f σταθερή στο $\Re^*$

Σ Λ

iv) Αν f΄΄(x)=0 για κάθε x∈Δ , τότε f΄(x)=c , x∈Δ **Σ Λ**

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{1-x}{x}$

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

(6 μονάδες)

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2014 έχει μοναδική ρίζα.

(6 μονάδες)

Β3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}.

(7 μονάδες)

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(5^x \cdot f^{-1}(x)\right)$ (6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\mathfrak{R}$, παραγωγίσιμη τέτοια, ώστε να ισχύουν $x \cdot f'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και f(1)=0

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)= e^x+x$ είναι «1-1»

(2 μονάδες)

Γ2. Να αποδείξετε ότι f(x)=lnx

(6 μονάδες)

Γ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x+1)}{x}$, με x>0 (8 μονάδες)

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2[f(e^x)]^2 = 3\text{συν}x$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(9 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ
Δίνονται οι συναρτήσεις h,t : $(0,+\infty)\to\Re$, για τις οποίες ισχύουν:

$\left(\frac{h(x)}{t(x)}\right)' = \frac{h'(x)}{t'(x)}$, για κάθε χ>0 , $t^2(x) = t'(x)>0$, για κάθε χ>0 ,

h(1)=2 και t(1)=-1.

Δ1. Να δείξετε ότι $h(x)=1+\frac{1}{x}$ και $t(x)=-\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

(8 μονάδες)

Δ2. Έστω η συνάρτηση f(x)=t(x)+lnx. Να μελετήσετε την f΄(x) ως προς τη μονοτονία (2 μονάδες) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι f(x-2)<2f(x+1)-f(x+4)

(5 μονάδες)

Δ3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g: $(0,+\infty)\to\Re$, για την οποία ισχύει $(x-1)g(x)+\frac{g'(x)}{t(x)}=0$, για κάθε x>0 και $g\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{e}$.

i) Να αποδείξετε ότι $g(x)=\frac{e^x}{x}$, x>0

(5 μονάδες)

ii) Να λύσετε την εξίσωση ln(συνx)+ημx=ln(ημx)+συνx , $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(5 μονάδες)

Καλή Επιτυχία
Θανάσης Κοπάδης
Μαθηματικός