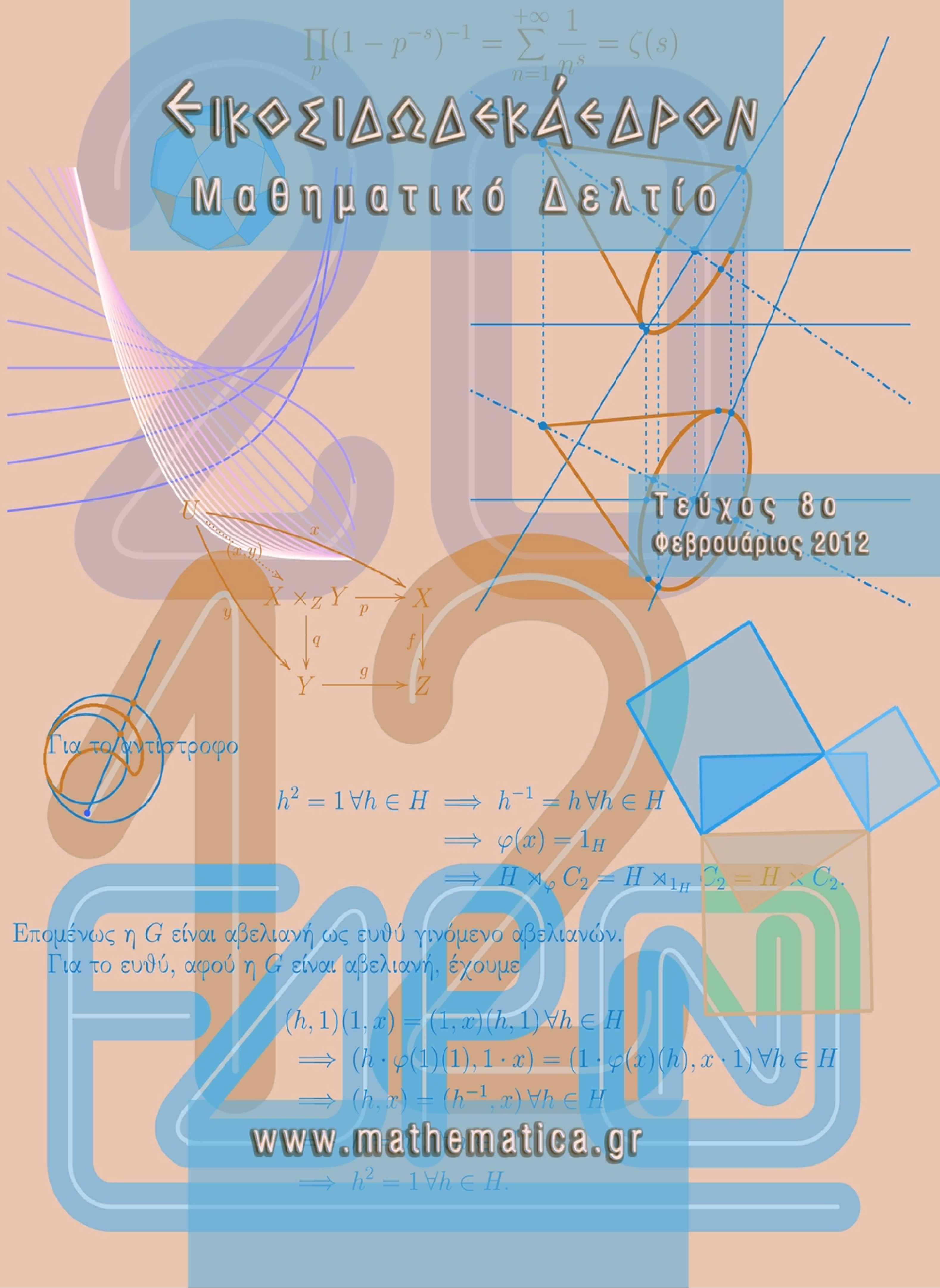
Εικοσιδωδεκάεδρον

Μαθηματικό Δελτίο

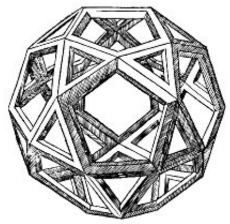


Τεύχος 8ο

Φεβρουάριος 2012

www.mathematica.gr

Το «Εικοσιδωδεκάεδρον» παρουσιάζει θέματα που έχουν συζητηθεί στον ιστότοπο http://www.mathematica.gr.
Η επιλογή και η φροντίδα του περιεχομένου γίνεται από τους Επιμελητές του http://www.mathematica.gr.
Μετατροπές σε LATEX: *Φωτεινή Καλδή, Αναστάσης Κοτρώνης* , Σχήματα: *Μιχάλης Νάννος, Χρήστος Τσιφάκης* Σελιδοποίηση: *Αναστάσης Κοτρώνης, Νίκος Μαυρογιάννης*, Εξώφυλλο: *Γρηγόρης Κωστάκος*. Στοιχειοθετείται με το LATEX.



Εικοσιδωεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στίς οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιωνεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0, 0, \pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.

Πηγή:http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron

Απόδοση: Πάνος Γιαννόπουλος

Ο δικτυακός τόπος mathematica.gr ανήκει και διευθύνεται σύμφωνα με τον κανονισμό του που υπάρχει στην αρχική του σελίδα (http://www.mathematica.gr) από ομάδα Διευθυνόντων Μελών.

Διευθύνοντα Μέλη του mathematica.gr

Συντονιστες

- Αιρετά Μέλη

  1. Φωτεινή Καλδή (Φωτεινή) Γενική Συντονίστρια
  2. Μιχάλης Λάμπρου (Mihalis_Lambrou) Γενικός Συντονιστής
  3. Νίκος Μαυρογιάννης (nsmavrogiannis) Γενικός Συντονιστής
  4. Σπύρος Καρδαμίτσης (Καρδαμίτσης Σπύρος) Υπεύθυνος Ενημέρωσης
  5. Χρήστος Κυριαζής (chris_gatos) Υπεύθυνος Προγραμματισμού
  6. Μίλτος Παπαγρηγοράκης (m.papagrigorakis) Υπεύθυνος Οικονομικών
  7. Γιώργος Ρίζος (Γιώργος Ρίζος) Υπεύθυνος Εκδόσεων

- Μόνιμα Μέλη

  1. Γρηγόρης Κωστάκος (grigkost) Διαχειριστής
  2. Αλέξανδρος Συγκελάκης (cretanman) Διαχειριστής

Επιμελητες

1. Στράτης Αντωνέας (stranton)
2. Ανδρέας Βαρβεράκης (ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΑΡΒΕΡΑΚΗΣ)
3. Κωνσταντίνος Βήττας (vittasko)
4. Νίκος Κατσίπης (nkatsipis)
5. Αναστάσιος Κοτρώνης (Κοτρώνης Αναστάσιος)
6. Βασίλης Μαυροφρύδης (mathxl)
7. Θάνος Μάγκος (matha)
8. Γιώργος Μπαλόγλου (gbaloglou)
9. Ροδόλφος Μπόρης (R BORIS)
10. Μιχάλης Νάννος (Μιχάλης Νάννος)
11. Λευτέρης Πρωτοτοπαπάς (Πρωτοπαπάς Λευτέρης)
12. Δημήτρης Σκουτέρης (dement)
13. Μπάμπης Στεργίου (Μπάμπης Στεργίου)
14. Σωτήρης Στόγιας (swsto)
15. Αχιλλέας Συνεφακόπουλος (achilleas)
16. Κωνσταντίνος Τηλέγραφος (Τηλέγραφος Κώστας)
17. Σεραφείμ Τσιπέλης (Σεραφείμ)
18. Χρήστος Τσιφάκης (xr.tsif)
19. Δημήτρης Χριστοφίδης (Demetres)

Μελη

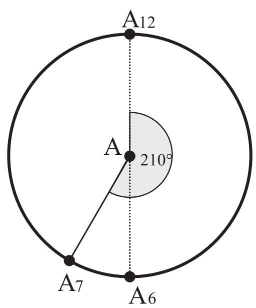
1. Σπύρος Βασιλόπουλος (spyros)
2. Παναγιώτης Γιαννόπουλος (p_gianno)
3. Κώστας Ζυγούρης (kostas.zig)
4. Γιώργης Καλαθάκης (exdx)
5. Χρήστος Καρδάσης (ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΡΔΑΣΗΣ)
6. Θανάσης Μπεληγιάννης (mathfinder)
7. Μάκης Πολλάτος (mathematica)
8. Θωμάς Ραϊκόφτσαλης (Θωμάς Ραϊκόφτσαλης)
9. Κωνσταντίνος Ρεκούμης (rek2)
10. Γιώργος Ροδόπουλος (hsiodos)
11. Σταύρος Σταυρόπουλος (Σταύρος Σταυρόπουλος)
12. Βασίλης Στεφανίδης (bilstef)

Οι Ασκήσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει (πέρα από τα γνωστά νομίσματα) και τρίευρο! Το ζητούμενο είναι αν μπορούμε να σχηματίσουμε το ποσό των 25 ευρώ χρησιμοποιώντας 10 συνολικά νομίσματα (αποκλειστικά ενός ή τριών ή πέντε ευρώ).*

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι δείκτες ενός ρολογιού στις 7 : 38.*



Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Αν*

$$A = (\frac{1}{2} - \frac{3}{4}) + (\frac{5}{6} - \frac{7}{8}) + \dots + (\frac{97}{98} - \frac{99}{100})$$

και

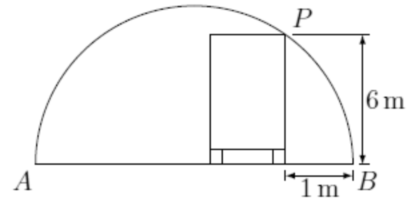
$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{98}) - (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100}),$$

να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A + B$.

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο parmenides51) Η Φωτεινή για ένα παιδικό πάρτι του παιδιού της θα πληρώσει 492 ευρώ τώρα που ο ΦΠΑ ανέβηκε στο 23%. Αν ο ΦΠΑ παρέμενε στο 13%, πόσο θα της κόστιζε το παιδικό πάρτι;*

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

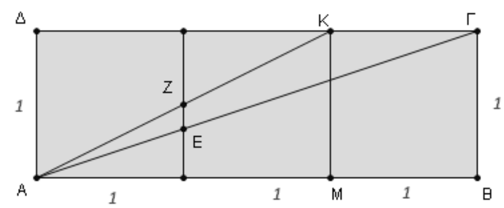
ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Το τούνελ του σχήματος έχει σχήμα ημικυκλίου. Ένα φορτηγό με ύψος 6m μπορεί να πλησιάσει το πολύ ένα 1m τις άκρες του οδοστρώματος, λόγω της καμπύλης οροφής του τούνελ. Πόσο είναι το πλάτος της βάσης του τούνελ;*



ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο KARKAR) Στο μάθημα των Μαθηματικών, το 60% των αγοριών και το 70% των κοριτσιών, «πέρασαν» την Τάξη. Αν ο αριθμός των επιτυχόντων αγοριών, είναι ίσος με τον αριθμό των επιτυχόντων κοριτσιών, βρείτε το ποσοστό των μαθητών που «πέρασαν».*

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Στο σχήμα έχουμε τρία τετράγωνα πλευράς 1 τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο.*



Να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΖΕ.

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο KARKAR) Δίνεται ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών είναι κι αυτή τέλειο τετράγωνο.*

1. *Βρείτε τους μεγαλύτερους διψήφιους, μ΄ αυτή την ιδιότητα.*
2. *Δείξτε ότι ο μεγαλύτερος από τους δύο είναι πάντα περιττός.*

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο Αντώνης Κυριακόπουλος) Να βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των πραγματικών αριθμών β και γ, για τις οποίες οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης:*

$$x^2 - \beta x + \gamma = 0$$

να είναι πραγματικές και να πληρούν τη σχέση:

$$3\rho_1 - 2\rho_2 = \beta$$

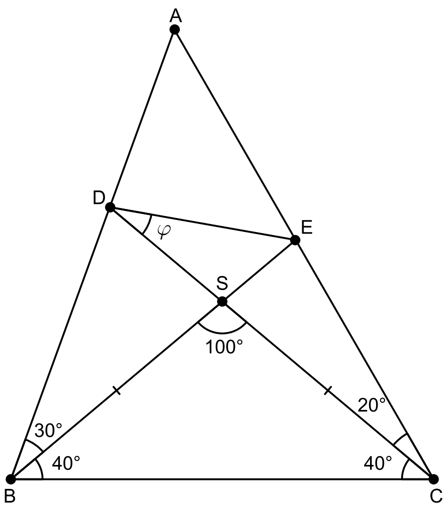
ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο irakleios) Για ποιες τιμές της παραμέτρου m μία ακριβώς ρίζα της εξίσωσης*

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$$

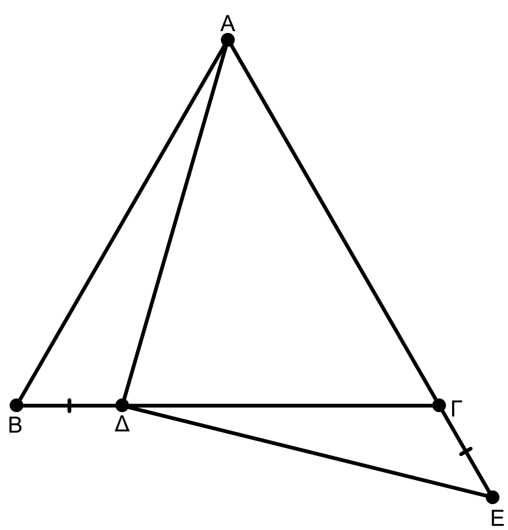
ανήκει στο διάστημα $(0, 2)$;

Μαθηματικά Α′ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο KARKAR) Τρίγωνο ABC έχει* $\widehat{B} = 70^\circ$ *και* $\widehat{C} = 60^\circ$. *Στο εσωτερικό του βρίσκεται σημείο* S, *ώστε* $B\widehat{S}C = 100^\circ$ *και* $SB = SC$. *Οι* CS, BS *τέμνουν τις πλευρές* AB, AC *στα* D, E *αντίστοιχα. Βρείτε το μέτρο της* $S\widehat{D}E = \widehat{\varphi}$.



ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο Βασίλης Στεφανίδης) Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι ισόπλευρο και ΒΔ = ΓΕ. Να δειχθεί ότι ΑΔ = ΔΕ.*



Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Γιώργος Κοτζαγιαννίδης) Αν οι θετικοί αριθμοί* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2\nu+1}$ *είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι :*

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\alpha_3}{\alpha_4}...\frac{\alpha_{2\nu-1}}{\alpha_{2\nu}} \leq \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_{2\nu+1}}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο Γιώργος Ροδόπουλος) Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο*

$$x^3 - \pi x^2 + 27\alpha x - 3\pi\alpha$$

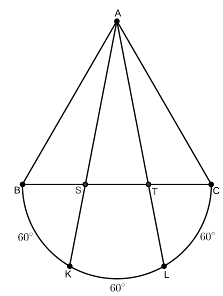
έχει τρεις θετικές ρίζες. Αφού βρείτε τον αριθμό α *να αποδείξετε ότι η εξίσωση*

$$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 6\sqrt{\alpha}$$

είναι αδύνατη.

Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Γεωμετρία

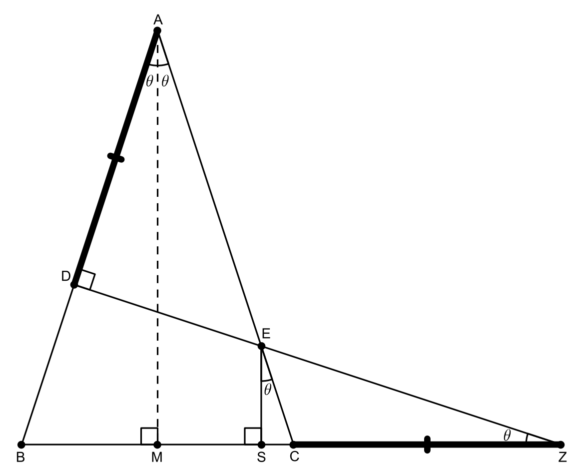
ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο KARKAR) Ημικύκλιο διαμέτρου BC και ισόπλευρο τρίγωνο με βάση την BC, βρίσκονται εκατέρωθεν της BC. Τριχοτομούμε το τόξο* $\widehat{BC}$. *Δείξτε ότι με τις δημιουργούμενες συνδέσεις τριχοτομείται η πλευρά BC !*



ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο KARKAR) Σε σημείο D της πλευράς AB του ισοσκελούς τριγώνου* $ABC, (AB = AC)$, *φέρω κάθετη, η οποία τέμνει την μεν AC στο E, τη δε προέκταση της BC στο Z.*

Αν είναι $AD = CZ$, *δείξτε ότι η απόσταση του E από την BC, είναι μισή της απόστασής του από την AB.*

Ερώτηση προς διερεύνηση : Μπορούμε να εντοπίσουμε «κατασκευαστικά», τη θέση του σημείου D ;



Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο KARKAR) Σημείο* S *κινείται επί της ευθείας* $y = \frac{1}{2}x$, *ενώ σημείο* A *κινείται επί της ευθείας* $y = -\frac{1}{2}x$ *έτσι ώστε:* $(SA) = 6$. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου* M *του τμήματος* SA.

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Έστω η υπερβολή* $C_1 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *και ο κύκλος* $C_2 : x^2 + y^2 = a^2$ *με* $a, b > 0$. *Αν* $K(x_0, y_0)$, $x_0 > 0$, *είναι το κοινό σημείο του* C_2 *με την ασύμπτωτη* $(\epsilon) : y = \frac{b}{a}x$ *της* C_1, *να δείξετε ότι η εφαπτομένη του* C_2 *στο* K *διέρχεται από την εστία* E *της υπερβολής.*

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Γενική Παιδεία

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής) Έστω μεταβλητή* X *με παρατηρήσεις* $t_1, t_2, ..., t_\nu$ *, μέση τιμή* $\overline{x} \neq 0$ *,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *και η συνάρτηση*

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x(t_1+t_2+...+t_\nu)-2\nu\overline{x}}{x^2-4}, & 0 < x \neq 2 \\ \frac{\alpha\nu\overline{x}}{2}, & x = 2 \end{array} \right\}.$$

1. *Αν η* g *είναι συνεχής στο* $x_o = 2$ *, να αποδείξετε ότι* $\alpha = \frac{1}{2}$.
2. *Αν η γραφική παράσταση της* g *διέρχεται από το σημείο* $A(3, 20)$ *, να αποδείξετε ότι* $\sum_{i=1}^{\nu} t_i = 100$.
3. *Αν* $\sum_{i=1}^{\nu} t_i f_i = 1$, *όπου* f_i *οι σχετικές συχνότητες των παρατηρήσεων, να βρεθεί το πλήθος* ν *του δείγματος.*

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Γιώργος Ροδόπουλος) Ένα δείγμα μεγέθους* ν *έχει τυπική απόκλιση* s, $s \neq 0$. *Να αποδείξετε ότι για το εύρος* R *ισχύει* $0 < 2s\sqrt{\nu}$.

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Μιγαδικοί Αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος) Έστω οι μιγαδικοί* z, w *με τις ιδιότητες*

$$4|z|^2 - 2z\overline{w} = 1, \qquad |w|^2 - 2z\overline{w} = 3.$$

1. *Να δείξετε ότι* $|2z - w| = 2$.
2. *Να δείξετε ότι οι εικόνες των* z *και* w *ανήκουν σε κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων, των οποίων να βρείτε και την ακτίνα.*
3. *Να βρείτε το* $|6z + w|$.
4. *Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών* z *και* w.

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο Τηλέγραφος Κώστας) Δίνεται η* f *συνεχής στο* $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ *με*

$$\int_1^{|z|} f(x)dx = 0 \quad \text{με} \quad f(1) = 1.$$

1. *Να δειχτεί ότι* $f(x) > 0$.
2. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των* z.
3. *Να βρείτε το όριο* $\lim_{x\to-\infty} \frac{(|z+\overline{z}|-3)\,x^3 + x}{(|z-\overline{z}|-3)\,x^2 + x}$.
4. *Αν το εμβαδόν της* f *με τον* $x'x$ *από τη* $x = 0$ *μέχρι τη* $x = 1$ *είναι μικρότερο του* $|z + 2\overline{z}|$, *να δειχτεί ότι η εξίσωση*

$$\int_0^x f(t)dt = 3x^2 + 6x - 6$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Όρια, Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Κώστας Καπένης) Έστω συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *για την οποία ισχύει:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3.$$

Να βρείτε το:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{\sin(\pi x)}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Μια συνάρτηση* f *με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$ *είναι* $1-1$ *και έχει την ιδιότητα :*

$$f(x) \cdot f(1-x) = f(ax+b), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι :

1. $a = 0$
2. $f(b) \neq 0$
3. $f(1-b) = 1$
4. *η συνάρτηση* f *δεν έχει σύνολο τιμών το* $\mathbb{R}$.

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Ροδόλφος Μπόρης)Έστω* f *παραγωγίσιμη συνάρτηση στο* $\mathbb{R}$, *με συνεχή παράγωγο* f' *με*

$$f(x + f'(x)) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1. *Δείξτε ότι η* f' *δεν μπορεί να μην έχει ρίζα*
2. *Δώστε παράδειγμα πολυωνυμικής συνάρτησης που επαληθεύει την σχέση (1)*
3. *Υποθέστε τώρα ότι η* f' *έχει δυο ρίζες* a, b *με* $a < b$. *Δείξτε ότι δεν μπορεί να υπάρχει* u *στο* (a, b) *με* $f'(u) \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Δίνεται η συνάρτηση* f *που είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο* $[4, 10]$ *με σύνολο τιμών* $f(A) = [1, 5]$ *και* $f(4) = 2$, $f(10) = 4$. *Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά* $\xi_1, \xi_2 \in (4, 10)$ *ώστε:* $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Έστω* $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ *συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει*

$$f^2(t) \leq 1 + 2\int_0^t f(u)du, \text{ για κάθε } t \in [0, 1].$$

Να αποδειχθεί ότι $f(t) \leq t + 1$, *για κάθε* $t \in [0, 1]$.

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Ας είναι* f *μια συνεχής συνάρτηση στο* $[0, 1]$ *ώστε να ισχύει*

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2} \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \geq \int_0^1 x f(x) dx.$$

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο Μάγκος Θάνος) Να αποδειχθεί ότι καθεμιά από τις εξισώσεις:*

$$\sin(\cos x) = x \quad \text{και} \quad \cos(\sin x) = x$$

έχει ακριβώς μία ρίζα. Ποια από τις δύο αυτές ρίζες είναι μεγαλύτερη;

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και $w \neq 2$ για τους οποίους ισχύουν*

$$|z-1| = 1 \quad \text{και} \quad w = \frac{2z-1}{z+1}.$$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - \sqrt{|w| - x}$.

1. *Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f,*
2. *Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται,*
3. *Να βρείτε το σύνολο τιμών της f,*
4. *Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 f^{-1}(x)\right)$.*

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Θέματα με Απαιτήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι τέτοιες ώστε*

$$f(0) = -1 \quad \text{και}$$

$$e^{-x} f'(x) = f^2(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με*

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

1. *Για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι*

$$\lim_{x\to x_0}\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = \int_0^1 e^{-x_0^2(1+t^2)}\,dt.$$

2. *Για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι*

$$g'(x_0) = -2e^{-x_0^2}\int_0^{x_0} e^{-t^2}\,dt$$

και συμπεράνετε ότι

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. *Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ και συμπεράνετε ότι*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ασκήσεις μόνο για μαθητές

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Αναστάσης Κοτρώνης) Βρείτε το*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2\ln x} - x}{(\ln x)^x + x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς) Έστω τρίγωνο ABC και I το έγκεντρό του. Οι BI, CI τέμνουν τις AC, AB στα σημεία B', C' αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το $AB' \cdot AC'$ είναι μεγαλύτερο , ίσο ή μικρότερο του AI^2 αν και μόνον αν η $\hat{A}$ είναι αμβλεία , ορθή ή οξεία αντίστοιχα.*

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Αν $a > 1$, να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για τις οποίες*

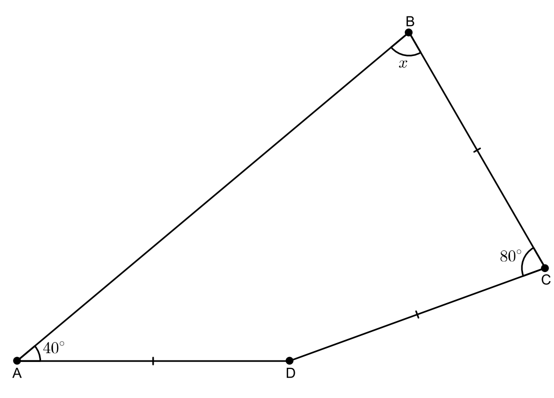
1. *$f(x) \geq a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και*
2. *$f(x+y) \geq f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.*

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση*

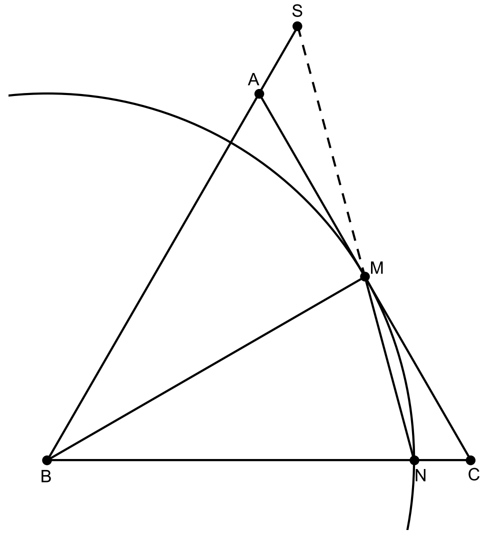
$$2^{x+1} = 2^{[x]} + 2^{\{x\}}.$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο Δημήτρης Μυρογιάννης) Έστω το τετράπλευρο $ABCD$ στο οποίο οι γωνίες $\angle BCD$, $\angle DAB$ έχουν μέτρο 80^o, 40^o, αντιστοίχως. Αν επιπλέον ισχύει ότι $BC = CD = DA$, να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\angle ABC = x$.*



ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει ο KARKAR) Στο ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle ABC$, M είναι το μέσον της AC. Ο κύκλος $(B,\ BM)$ τέμνει τη βάση BC στο σημείο έστω N. Η ευθεία NM τέμνει την προέκταση της BA στο σημείο έστω S.*
Υπολογίστε τις γωνίες, τις πλευρές και το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AMS$.



Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors,
Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Έστω $n \geq 17$ ακέραιος. Να δειχθεί ότι κάθε τετράγωνο μπορεί να διαμεριστεί σε n μικρότερα τετραγωνάκια.*

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Αθανάσιος Κοντογιώργης) Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα P, με πραγματικούς συντελεστές, τέτοια ώστε $P(0) = 0$ και $P\left((x+1)^3\right) = (P(x)+1)^3$.*

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο Σωκράτης Λυράς) Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ με $AB = AD$ και $\angle B = \angle D = 90^o$. Στις πλευρές DC, BC, έστω τα σημεία E, Z αντιστοίχως, ώστε οι AE, DZ να είναι κάθετες. Να αποδειχθεί ότι $BE \perp AZ$.*

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς) Αν I είναι έγκεντρο του τριγώνου $\triangle ABC$ και οι ευθείες IA, IB, IC τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του στα σημεία D, E, Z αντιστοίχως, αποδείξτε ότι*

$$\frac{IA}{ID} + \frac{IB}{IE} + \frac{IC}{IZ} \geq 3$$

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Αλέξανδρος Συγκελάκης - Θέμα διαγωνισμού «Ο ΘΑΛΗΣ» 1995) Σε μια σκακιέρα θέλουμε να τοποθετήσουμε πιόνια, ώστε:*

- *δύο πιόνια να μη βρίσκονται σε γειτονικά τετραγωνάκια (δηλ. τετραγωνάκια με κοινή πλευρά), και επιπλέον,*
- *σε κάθε τετραγωνάκι είτε να υπάρχει πιόνι είτε να είναι γειτονικό με ένα τετραγωνάκι με πιόνι.*

Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο και τον μέγιστο αριθμό από πιόνια που μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σκακιέρα, ώστε να ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Αν a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους $a + b + c = 1$, να δείξετε ότι*

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq \frac{1}{abc}.$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Φοιτητές

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Προτείνει ο vzf) Να βρείτε τους μοναδικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς που πρέπει να έχουν δύο εξάπλευρα ζάρια, που δεν είναι τα κανονικά ζάρια ώστε να έχουν την ίδια κατανομή πιθανότητας για το άθροισμα με τα κανονικά ζάρια.*

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Από τον διαγωνισμό Vojtech Jarník του 1997) Έστω a ένας περιττός θετικός ακέραιος. Να δειχθεί ότι αν $d|(a^2+2)$ τότε $d \equiv 1 \bmod 8$ ή $d \equiv 3 \bmod 8$.*

Άλγεβρα ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτείνει ο Σωτήρης Χασάπης) Να δειχθεί ότι :*

$$\begin{vmatrix} ac & ab & bc \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Αθανάσιος Κοντογεώργης) Έστω G μια ομάδα τέτοια ώστε για κάθε $a, b \in G$ να ισχύει ότι $a^2b = ba^2 \implies ab = ba$.*

(α) Αν η G έχει 2^n στοιχεία, να δείξετε ότι είναι αβελιανή.

(β) Βρείτε παράδειγμα τέτοιας μη αβελιανής ομάδας.

Ανάλυση ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Ας υπολογισθεί το άθροισμα*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{2^n},$$

όπου $\zeta(s)$ η συνάρτηση ζήτα του Riemann.

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτείνει ο Σεραφείμ Τσιπέλης) Αν $a = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$, να αποδειχθεί ότι:*

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{4a}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{5}$$
2. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\binom{2n}{n}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Γεωμετρία ΑΕΙ

Θεωρία Αριθμών ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων 9.999 διαδοχικών φυσικών δε μπορεί να είναι δύναμη φυσικού.*

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του ακέραιου n ώστε οι αριθμοί*

$$a = n + 3$$

και

$$b = n^2 + 3$$

να είναι συγχρόνως τέλειοι κύβοι.

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω η εξίσωση:*

$$x^5 - 40x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0$$

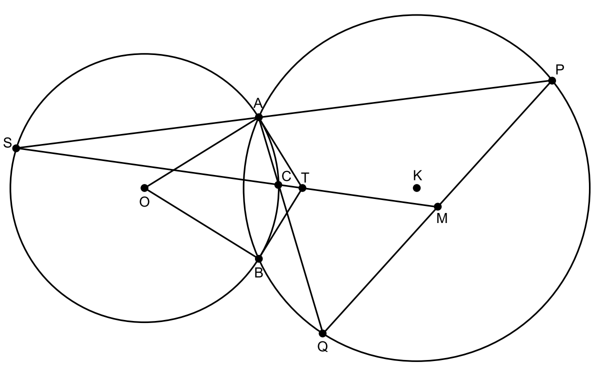
της οποίας οι ρίζες βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο. Το άθροισμα των αντιστρόφων αυτών των ριζών ισούται με 10. Να υπολογίσετε την τιμή του $|S|$.

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να συγκριθούν οι αριθμοί*

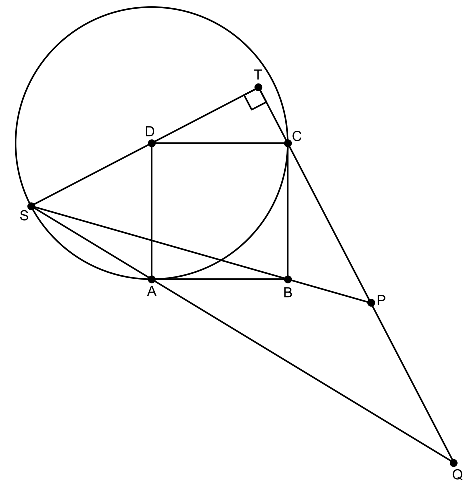
$$\sqrt{\pi^\pi e^e} \qquad \text{και} \qquad e^\pi.$$

Ο Φάκελος του καθηγητή, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο KARKAR) Οι κύκλοι (O) και (K) τέμνονται στα A, B . Οι εφαπτόμενες του πρώτου κύκλου στα σημεία A, B τέμνονται στο T. Από σημείο S του κύκλου (O) φέρω την ST η οποία επανατέμνει τον κύκλο στο C. Η SA τέμνει τον κύκλο (K) στο P, ενώ η AC στο Q. Δείξτε ότι η ST διέρχεται από το μέσο της PQ.*



ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο KARKAR)Με κέντρο την κορυφή D τετραγώνου $ABCD$ και ακτίνα DA γράφω κύκλο, επί του οποίου κινείται σημείο S. Ευθεία CT κάθετη στην SD τέμνει τις SA, SB στα Q, P αντίστοιχα. Δείξτε ότι $CP = PQ$.*



Ο Φάκελος του καθηγητή, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f, g \in \mathbb{C}[x]$, τα οποία δεν έχουν κοινή ρίζα. Αν το πολυώνυμο $f^2(x) + g^2(x)$ έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $r \in \mathbb{C}$, να αποδειχθεί ότι*

$$(f'(r))^2 + (g'(r))^2 = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτείνει ο Νίκος Μαυρογιάννης)*
Η Ανισότητα του Cauchy. *Να αποδειχθεί πως αν οι $a_1, a_2, ..., a_n$ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί τότε ισχύει*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

και η ισότητα αληθεύει αν και μόνο αν οι αριθμοί είναι ίσοι.

Στόχος βέβαια δεν είναι τόσο το να αποδειχθεί η γνωστή αυτή ανισότητα αλλά να δοθούν, χάριν της ενημέρωσης των συναδέλφων, όσο γίνεται περισσότερες αποδείξεις.

Οι Ασκήσεις και Οι Λύσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει (πέρα από τα γνωστά νομίσματα) και τρίευρο! Το ζητούμενο είναι αν μπορούμε να σχηματίσουμε το ποσό των 25 ευρώ χρησιμοποιώντας 10 συνολικά νομίσματα (αποκλειστικά ενός ή τριών ή πέντε ευρώ).*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=18414

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Δεν μπορούμε να σχηματίσουμε το ποσό γιατί αν είχαμε A νομίσματα του ενός ευρώ, B των τριών και $10 - A - B$ των πέντε, τότε

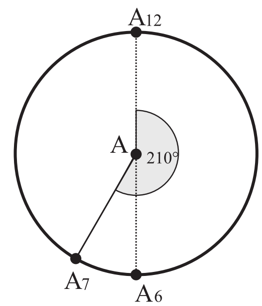
$$A + 3B + 5(10 - A - B) = 25$$

δηλαδή

$$50 - 4A - 2B = 25,$$

πού είναι άτοπο (άρτιος = περιττός).

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι δείκτες ενός ρολογιού στις* $7:38$.



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=19577

Λύση (KARKAR) Ο ωροδείκτης κάνει μια περιστροφή σε 12 ώρες, άρα κάνει 30^o την ώρα, ή μισή μοίρα το λεπτό.

Ο λεπτοδείκτης κάνει τις 360^o σε 60 λεπτά, συνεπώς κάνει 6 μοίρες το λεπτό.

Στις 7.38 ο μεν ωροδείκτης, διατρέχοντας 19^o, θα βρεθεί στις $210 + 19 = 229$ μοίρες, ενώ ο λεπτοδείκτης θα διατρέξει $6 \cdot 38 = 228$ μοίρες. Συνεπώς η γωνία των δεικτών θα είναι μόλις μία μοίρα!

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Αν*

$$A = (\frac{1}{2} - \frac{3}{4}) + (\frac{5}{6} - \frac{7}{8}) + \ldots + (\frac{97}{98} - \frac{99}{100})$$

και

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{98}) - (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{100}),$$

να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A + B$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=quote&f=33&p=113111

Λύση (Γιώργος Απόκης) Έχουμε :

$$A + B = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{8}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{97}{98} - \frac{99}{100}\right) + \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{98}\Big) - \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{100}\Big) =$$

[βγάζουμε τις παρενθέσεις]

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{7}{8} + \ldots$$
$$+ \frac{97}{98} - \frac{99}{100} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{98} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - \ldots - \frac{1}{100} =$$

[τα ¨+¨ σε ζευγάρια και τα ¨−¨ σε ζευγάρια]

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{97}{98} + \frac{1}{98}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{11}{12} + \frac{1}{12}\right) - \ldots$$
$$- \left(\frac{99}{100} + \frac{1}{100}\right) =$$

$= 1+1+1+\ldots+1-1-1-\ldots-1 = 0$ αφού οι παρενθέσεις είναι 25 που προστίθενται και 25 που αφαιρούνται.

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο parmenides51) Η Φωτεινή για ένα παιδικό πάρτι του παιδιού της θα πληρώσει 492 ευρώ τώρα που ο ΦΠΑ ανέβηκε στο 23%. Αν ο ΦΠΑ παρέμενε στο 13%, πόσο θα της κόστιζε το παιδικό πάρτι;*

---

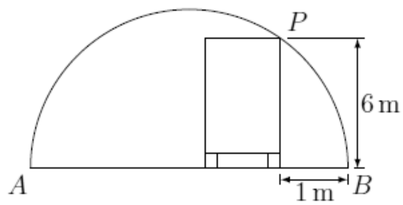
http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=quote&f=33&p=105629

Λύση (Γιώργος Απόκης) Τα 492 ευρώ είναι το αρχικό ποσό (χωρίς ΦΠΑ), μαζί με το 23 % του ΦΠΑ. Άρα, τα 492 είναι το αρχικό συν τα $\frac{23}{100}$ του αρχικού.

Έτσι, το 492 είναι το αρχικό πολλαπλασιασμένο με $1 + 0,23 = 1,23$. Επομένως, το αρχικό θα είναι $492 : 1,23 = 400$ ευρώ.

Τελικά, αν είχαμε ΦΠΑ 13 % , θα πλήρωνε (με παρόμοιο σκεπτικό) $400 \cdot 1,13 = 452$ ευρώ.

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Το τούνελ του σχήματος έχει σχήμα ημικυκλίου. Ένα φορτηγό με ύψος $6m$ μπορεί να πλησιάσει το πολύ ένα $1m$ τις άκρες του οδοστρώματος, λόγω της καμπύλης οροφής του τούνελ. Πόσο είναι το πλάτος της βάσης του τούνελ;*



---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=22032

Λύση (Γιώργος Απόκης) Αν R η ακτίνα του ημικυκλίου, K το κέντρο του και $PQ \perp AB$, τότε

$$KP = R,\ KQ = KB - QB = R - 1.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο KPQ έχουμε:

$$\begin{aligned} KP^2 &= KQ^2 + PQ^2 \\ R^2 &= (R-1)^2 + 6^2 \\ R^2 &= R^2 - 2R + 1 + 36 \\ 2R &= 37 \\ AB &= 37. \end{aligned}$$

Άρα, το πλάτος είναι $37m$.

Σχόλιο : Συνειδητοποίησα ότι η ταυτότητα $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ δεν είναι γνωστή στη Β′ Γυμνασίου, άρα μπορεί να γίνει εναλλακτικά

$$(R-1)^2 = (R-1)(R-1) = R^2 - R - R + 1 = R^2 - 2R + 1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο KARKAR) Στο μάθημα των Μαθηματικών, το 60% των αγοριών και το 70% των κοριτσιών, «πέρασαν» την Τάξη. Αν ο αριθμός των επιτυχόντων αγοριών, είναι ίσος με τον αριθμό των επιτυχόντων κοριτσιών, βρείτε το ποσοστό των μαθητών που «πέρασαν».*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=22414

Λύση (Γιώργος Απόκης) Έστω a, k το πλήθος των αγοριών και των κοριτσιών αντίστοιχα. Τα αγόρια που πέρασαν είναι $0,6a$ και τα κορίτσια που πέρασαν είναι $0,7k$. Αφού οι αριθμοί είναι ίσοι, ισχύει :

$$0,6a = 0,7k \quad \text{ή} \quad 6a = 7k \quad \text{ή}$$

$$k = \frac{6a}{7}. \tag{2}$$

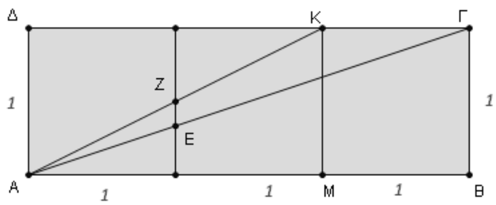
Επομένως, ισχύουν :

- Πέρασαν : $0,6a + 0,7k = 0,6a + 0,6a = 1,2a$ παιδιά.
- Η τάξη έχει : $a + k \overset{(2)}{=} a + \frac{6a}{7} = \frac{7a + 6a}{7} = \frac{13a}{7}$ παιδιά.

Άρα, το ποσοστό που πέρασε είναι :

$$p = \frac{1,2a}{\frac{13a}{7}} = \frac{8,4a}{13a} = \frac{8,4}{13} \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{840}{13}\% \approx 64,6\%.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Στο σχήμα έχουμε τρία τετράγωνα πλευράς 1 τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο.*



Να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΖΕ.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=19335

Λύση 1 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Ας ονομάσουμε Θ το σημείο τομής των τμημάτων $A\Gamma$ και KM.
Τότε το τμήμα ZE είναι το μισό του $K\Theta$.
Τα τρίγωνα $K\Theta\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια. Άρα $K\Theta = \dfrac{1}{3}$.
Επομένως $ZE = \dfrac{1}{6}$.

Λύση 2 (Parmenides 51) Έστω Θ το σημείο τομής των τμημάτων $A\Gamma$,KM και H το σημείο τομής των τμημάτων AB, ZE.

$$EH = K\Theta \tag{3}$$

διότι αν περιστρέψουμε κατά 180° γύρω από το κέντρο του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ προκύπτει πως

$$A \equiv \Gamma, B \equiv \Delta, H \equiv K, E \equiv \Theta.$$

$$ZH = \frac{KM}{2} \tag{4}$$

και

$$Z \text{ μέσο του } AK \tag{5}$$

διότι στο τρίγωνο AKM ισχύει πως $ZH//KM$ και H μέσο του AM.

$$ZE = \frac{K\Theta}{2} \tag{6}$$

διότι στο τρίγωνο $AK\Theta$ ισχύει πως $EZ//K\Theta$ και Z μέσο του AK λόγω της (5).

$$ZH = ZE + EH \overset{(3),(4),(6)}{\Longrightarrow}$$
$$\frac{KM}{2} = \frac{K\Theta}{2} + K\Theta \Rightarrow$$
$$\frac{KM}{2} = \frac{3K\Theta}{2} \Rightarrow$$
$$K\Theta = \frac{KM}{3}$$

Άρα $ZE = \dfrac{K\Theta}{2} = \dfrac{\frac{KM}{3}}{2} = \dfrac{KM}{6} = \dfrac{1}{6}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο KARKAR) Δίνεται ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών είναι κι αυτή τέλειο τετράγωνο.*

1. *Βρείτε τους μεγαλύτερους διψήφιους, μ΄ αυτή την ιδιότητα.*
2. *Δείξτε ότι ο μεγαλύτερος από τους δύο είναι πάντα περιττός.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=17146

Λύση (Νότης Κούτσικας) Έστω $\nu, \nu+1$ δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, διψήφιοι. Θέλουμε

$$(\nu+1)^2 - \nu^2 = k^2 \Leftrightarrow 2\nu + 1 = k^2.$$

Άρα ο k^2 είναι περιττός που σημαίνει ότι και ο k είναι περιττός.
Έχουμε ακόμα ότι $\nu = \dfrac{k^2-1}{2}$
Αφού ο ν είναι διψήφιος, θα πρέπει

$$10 \le \nu \le 99 \Rightarrow$$
$$10 \le \frac{k^2-1}{2} \le 99 \Rightarrow$$
$$20 \le k^2 - 1 \le 198 \Rightarrow$$
$$21 \le k^2 \le 199 \Rightarrow$$
$$\sqrt{21} \le k \le \sqrt{199} \Rightarrow$$
$$4,\ldots \le k \le 14,\ldots.$$

Άρα ο k θα είναι 5 ή 7 ή 9 ή 11 ή 13.

Αν $k = 13$ τότε $\nu = \dfrac{13^2 - 1}{2} = 84$ και $\nu + 1 = 85$

Βλέπουμε τώρα ότι $85^2 - 84^2 = 169 = 13^2$.

Άρα οι πιο μεγάλοι διψήφιοι που ζητάμε είναι οι 85 και 84.

Από τις υπόλοιπες περιπτώσεις για το k βρίσκουμε και τα άλλα ζευγάρια των διαδοχικών φυσικών που η διαφορά των τετραγώνων τους είναι και αυτή τετράγωνο. Τα ζευγάρια αυτά είναι $(61, 60), (41, 40), (25, 24)$ και $(13, 12)$.

Βλέπουμε ότι πραγματικά ο μεγαλύτερος από κάθε ζευγάρι είναι πάντα περιττός.

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο Αντώνης Κυριακόπουλος) Να βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των πραγματικών αριθμών β και γ, για τις οποίες οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης:*

$$x^2 - \beta x + \gamma = 0$$

να είναι πραγματικές και να πληρούν τη σχέση:

$$3\rho_1 - 2\rho_2 = \beta$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=22435

Λύση 1 (Μάκης Χατζόπουλος) Αναγκαίες συνθήκες. Από τύπους Vieta:

$\rho_1 + \rho_2 = \beta$, όμως δίνεται ότι $3\rho_1 - 2\rho_2 = \beta$ και από την επίλυση του συστήματος βρίσκουμε:

$$\rho_1 = \frac{3\beta}{5},\ \rho_2 = \beta - \frac{3\beta}{5} = \frac{2\beta}{5}.$$

Όμως, $\rho_1 \cdot \rho_2 = \gamma$, άρα $\frac{3\beta}{5} \cdot \frac{2\beta}{5} = \gamma$ δηλαδή $\frac{6\beta^2}{25} = \gamma$
Ικανές συνθήκες (αντιστρόφως):

Για $\dfrac{6\beta^2}{25} = \gamma$ είναι,

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1 \cdot \gamma = \frac{1}{25} \cdot \beta^2$$

με λύσεις :

$$\rho_1 = \frac{\beta + \frac{1}{5}\beta}{2} = \frac{3\beta}{5} \quad \text{και}$$

$$\rho_1 = \frac{\beta - \frac{1}{5}\beta}{2} = \frac{2\beta}{5} \quad \text{άρα} \quad 3\rho_1 - 2\rho_2 = \beta.$$

Οπότε βρήκαμε την αναγκαία και ικανή σχέση που συνδέει τα β, γ και είναι η $\dfrac{6\beta^2}{25} = \gamma$.

Λύση 2 (Αντώνης Κυριακόπουλος) Καταρχήν έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma, \tag{7}$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \beta, \tag{8}$$

$$\rho_1\rho_2 = \gamma. \tag{9}$$

Επειδή στην εκφώνηση δεν υπάρχει διάταξη των ριζών, οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να ισχύουν αυτά που θέλουμε, είναι:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ (3\rho_1 - 2\rho_2 = \beta \text{ ή } 3\rho_2 - 2\rho_1 = \beta) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ (3\rho_1 - 2\rho_2 - \beta)(3\rho_2 - 2\rho_1 - \beta) = 0 \end{cases} \overset{(7)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} \beta^2 - 4\gamma \geq 0 \\ 13\rho_1\rho_2 - 6\left(\rho_1^2 + \rho_2^2\right) - \beta(\rho_1 + \rho_2) + \beta^2 = 0 \end{cases} (*) \underset{(9)}{\overset{(8)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\begin{cases} \beta^2 - 4\gamma \geq 0 \\ 25\gamma - 6\beta^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma = \frac{6\beta^2}{25} \\ \beta^2 - 4 \cdot \frac{6\beta^2}{25} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6\beta^2 = 25\gamma \\ \beta^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 6\beta^2 = 25\gamma$$

$(*)$(επειδή $\rho_1^2 + \rho_2^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2$)

Συνεπώς η σχέση $6\beta^2 = 25\gamma$ είναι η ζητούμενη αναγκαία και ικανή συνθήκη.

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο irakleios) Για ποιες τιμές της παραμέτρου m μία ακριβώς ρίζα της εξίσωσης*

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$$

ανήκει στο διάστημα $(0, 2)$;

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=23137

Λύση (Κώστας Δόρτσιος) Κατ΄ αρχήν η τιμή $m = 0$ δίνει την εξίσωση: $x^2 - 2x = 0$ που έχει ρίζες τις $x_1 = 0, x_2 = 2$ που δεν ικανοποιούν το ζητούμενο. Έστω λοιπόν ότι $m \neq 0$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου αυτού είναι:

$$D = b^2 - 4ac = 4(2m + 1)$$

επομένως για να έχει το τριώνυμο κατ΄ αρχήν πραγματικές ρίζες θα πρέπει:

$$D > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

Θα ελέγξουμε πρώτα την περίπτωση της διπλής ρίζας: Έστω ότι: $D = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ τότε η διπλή του ρίζα είναι: $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2} \in (0, 2)$ άρα η τιμή αυτή $m = -\dfrac{1}{2}$ είναι δεκτή.

Έστω τώρα πως $D > 0$ τότε θα έχουμε δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

Ελέγχουμε τώρα τη θέση των αριθμών 0 και 2 σε σχέση με τις ρίζες αυτές. Είναι:

$$f(0) = m^2 > 0$$

άρα το 0 είναι εκτός του διαστήματος των ριζών. Επίσης:

$$f(2) = m^2 - 4m = m(m - 4).$$

Άρα για να είναι ο αριθμός 2 εντός του διαστήματος των ριζών πρέπει:

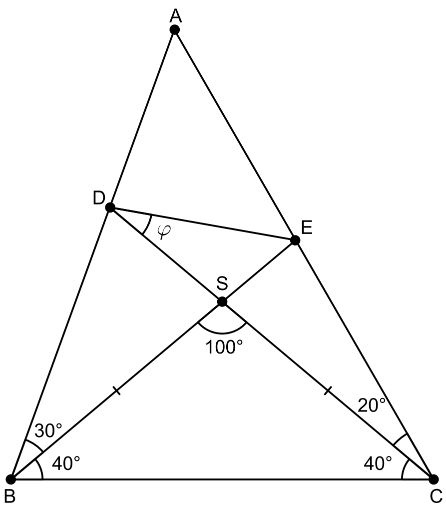
$$af(2) < 0 \Leftrightarrow m(m - 4) < 0 \Leftrightarrow m \in (0, 4)\,.$$

Δηλαδή για $m \in (0, 4)$ ο αριθμός 2 βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών και το 0 εκτός. Επομένως στο ανοιχτό διάστημα $(0, 2)$ βρίσκεται μόνον μία ρίζα του τριωνύμου αυτού.

Επομένως για να ισχύει το ζητούμενο οι τιμές του m πρέπει να ανήκουν στο σύνολο:

$$A = \left\{-\frac{1}{2}\right\} \bigcup (0, 4).$$

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο KARKAR) Τρίγωνο* ABC *έχει* $\widehat{B} = 70^\circ$ *και* $\widehat{C} = 60^\circ$. *Στο εσωτερικό του βρίσκεται σημείο* S, *ώστε* $B\widehat{S}C = 100^\circ$ *και* $SB = SC$. *Οι* CS, BS *τέμνουν τις πλευρές* AB, AC *στα* D, E *αντίστοιχα. Βρείτε το μέτρο της* $S\widehat{D}E = \widehat{\varphi}$.



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=22214

Λύση 1 (Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Από τα μέτρα των δοθεισών γωνιών και από το ότι το τρίγωνο BSC είναι ισοσκελές, προκύπτει ότι το τρίγωνο DBC είναι ισοσκελές $\left(\angle B = \angle D = 70^0\right)$, $\angle BEC = 80^0$ και το τρίγωνο ECS είναι ισοσκελές, συνεπώς

$$SC = CE. \tag{10}$$

Κατασκευάζω το ισόπλευρο ECZ. Τότε λόγω της (10) είναι και το SCZ ισοσκελές, επομένως

$$\angle SZC = 70^0 = \angle ABC \Rightarrow$$

$$SZ//BD \quad (BZSD \quad \text{ισοσκελές τραπέζιο}) \Rightarrow$$

$$DZ = BS = ZE \Rightarrow$$

τρίγωνο DZE ισοσκελές με γωνία κορυφής

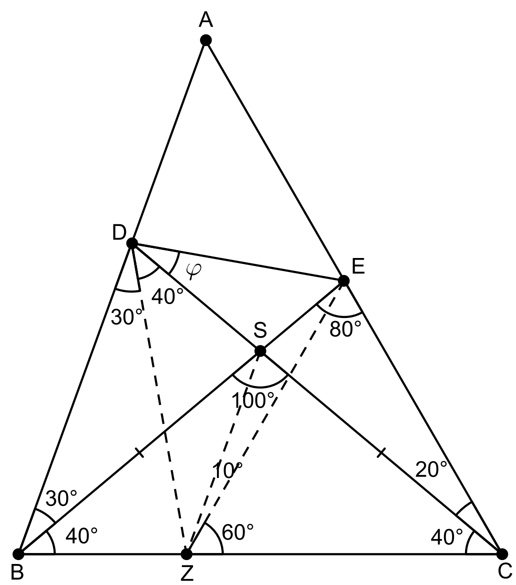
$$\angle DZE = DZS + SZE = DBS + SZE = 40^0.$$

Έτσι

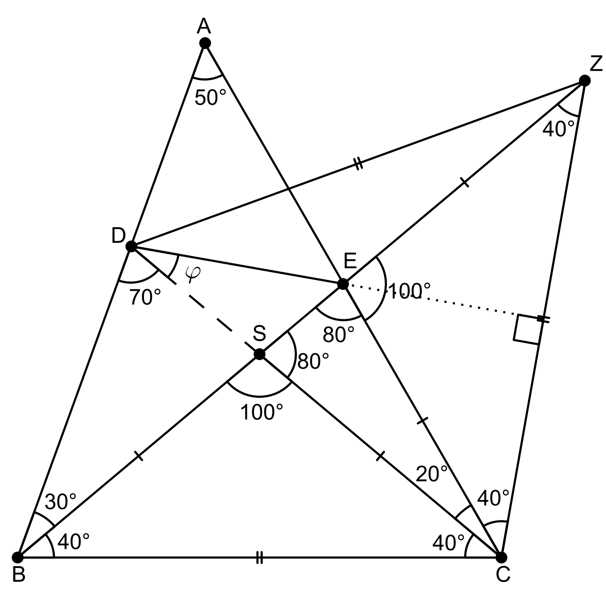
$$\angle\phi = \angle ZDE - \angle ZDC$$

$$\overset{DZ=ZC}{=} \angle ZDE - \angle DCZ$$

$$= 30^0.$$



Λύση 2 (Μιχάλης Νάννος)



Προκύπτουν εύκολα τα ισοσκελή τρίγωνα

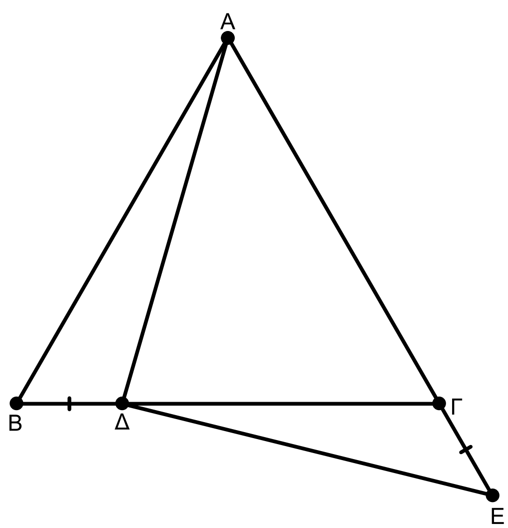
$$SBC\,(100^\circ, 40^\circ, 40^\circ)\,, \quad CBD\,(40^\circ, 70^\circ, 70^\circ)$$

και

$$CSE\,(20^\circ, 80^\circ, 80^\circ)\,.$$

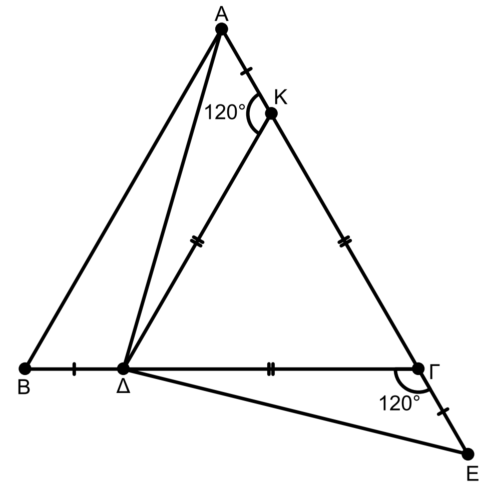
Αν στην προέκταση του BE πάρουμε τμήμα $EZ = EC$, τότε τα τρίγωνα ECZ, SBC είναι ίσα από $\Pi - \Gamma - \Pi$ (άρα $CZ = CB = CD$) και εφόσον $D\widehat{C}Z = 60^\circ$, το τρίγωνο CDZ είναι ισόπλευρο. Έτσι DE μεσοκάθετος της CZ, συνεπώς $\widehat{\varphi} = 30^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο Βασίλης Στεφανίδης) Το τρίγωνο* ΑΒΓ *του παρακάτω σχήματος είναι ισόπλευρο και* ΒΔ = ΓΕ. *Να δειχθεί ότι* ΑΔ = ΔΕ.



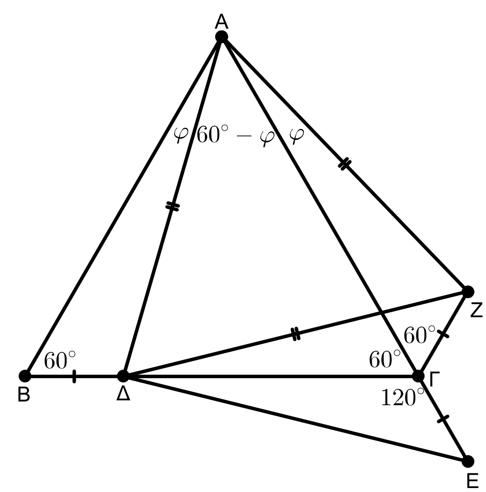
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=21523

Λύση 1 (Στάθης Κούτρας)



Φέρω ΔΚ//ΑΒ ⇒ ΑΚΔΒ ισοσκελές τραπέζιο, άρα ΑΚ = ΒΔ = ΓΕ και το τρίγωνο ΔΚΓ θα είναι ισόπλευρο (από μέτρα γωνιών). Άρα ΔΚ = ΔΓ και επειδή προφανώς $\widehat{\text{ΑΚΔ}} = \widehat{\text{ΔΓΕ}} = 120^0$ τα τρίγωνα ΑΚΔ, ΔΓΕ θα είναι ίσα (από Π − Γ − Π), συνεπώς ΑΔ = ΔΕ.

Λύση 2 (Μιχάλης Νάννος)



Στρέφω το τρίγωνο ΑΒΔ κατά 60° αριστερά ως προς Α (τρίγωνο ΑΓΖ). Είναι ΑΔ = ΑΖ και $\Delta\widehat{\text{A}}\text{Z} = 60^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισόπλευρο και από ισότητα των τριγώνων ΔΕΓ, ΔΖΓ (Π − Γ − Π) ⇒ ΔΕ = ΔΖ = ΑΔ.

Συνοπτικές λύσεις δόθηκαν από τους: KARKAR και Παναγιώτη Γιαννόπουλο.

Μαθηματικά Β' Λυκείου ('Αλγεβρα)

Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Γιώργος Κοτζαγιαννίδης)* *Αν οι θετικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2\nu+1}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι :*

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\alpha_3}{\alpha_4}...\frac{\alpha_{2\nu-1}}{\alpha_{2\nu}} \leq \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_{2\nu+1}}}.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=23056

Λύση 1 (Γιώργος Ρίζος)

$$a_1 \cdot a_3 \leq a_2^2 \Leftarrow$$

$$a\,(a+2\omega) \leq (a+2\omega)^2 \Leftarrow$$

$$a^2 + 2a\omega \leq a^2 + 2a\omega + \omega^2 \Leftarrow 0 \leq \omega^2$$

που ισχύει.

$$a_3 \cdot a_5 \leq a_4^2 \Leftarrow$$

$$(a+2\omega)(a+4\omega) \leq (a+3\omega)^2 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow a^2 + 6a\omega + 8\omega^2 \leq a^2 + 6a\omega + 9\omega^2 \Leftarrow 0 \leq \omega^2$$

που ισχύει

$$a_{2\nu-1} \cdot a_{2\nu+1} \leqslant a_{2\nu}^2 \Leftarrow$$

$$(a + (2\nu-2)\,\omega)(a+2\nu\omega) \leqslant (a+(2\nu-1)\,\omega)^2 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow a^2 + 2\,(2\nu-1)\,a\omega + \left(4\nu^2 - 4\nu\right)\omega^2 \leqslant$$

$$a^2 + 2\,(2\nu-1)\,a\omega + \left(4\nu^2 - 4\nu + 1\right)\omega^2$$

$$\Leftarrow 0 \leqslant \omega^2$$

που ισχύει
Οπότε

$$a_1 \cdot a_3 \leqslant a_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_3} \leqslant a_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \leqslant \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_3}}$$

$$a_3 \cdot a_5 \leqslant a_4^2 \Leftrightarrow \sqrt{a_3} \cdot \sqrt{a_5} \leqslant a_4 \Leftrightarrow \frac{a_3}{a_4} \leqslant \frac{\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_5}}$$

....

$$a_{2\nu-1} \cdot a_{2\nu+1} a_{2\nu}^2 \Leftrightarrow \sqrt{a_{2\nu-1}} \cdot \sqrt{a_{2\nu+1}} a_{2\nu} \Leftrightarrow \frac{a_{2\nu-1}}{a_{2\nu}}\frac{\sqrt{a_{2\nu-1}}}{\sqrt{a_{2\nu+1}}}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot ... \cdot \frac{a_{2\nu-1}}{a_{2\nu}} \leqslant \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_3}} \cdot \frac{\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_5}} \cdot ... \cdot \frac{\sqrt{a_{2\nu-1}}}{\sqrt{a_{2\nu+1}}} = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_{2\nu+1}}}$$

Λύση 2 (Μιχάλης Λάμπρου) Αν a, b, c θετικοί διαδοχικοί όροι Α.Π., τότε
$\sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2} = b$. Άρα

$$\sqrt{a_1 a_3} \leqslant a_2,\ \sqrt{a_3 a_5} \leqslant a_4, ...,\ \sqrt{a_{2n-1}a_{2n+1}} \leqslant a_{2n}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε

$$\sqrt{a_1}(a_3 a_5 ... a_{2n-1})\sqrt{a_{2n+1}} \leq a_2 a_4 ... a_{2n}$$

που δίνει την ζητούμενη αν πολλαπλασιάσουμε επί

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_{2n+1}}a_2 a_4 ... a_{2n}}$$

Λύση 3 (Γιώργος Κοτζαγιαννίδης) Μία λύση ακόμη, χρησιμοποιώντας βέβαια τη σχέση που χρησιμοποίησαν ο Γιώργος και ο Μιχάλης.

Ισχύει

$$\alpha_{i-1}\alpha_{i+1} \leq \alpha_i^2$$

με $i = 2, 3, ..., 2\nu$.

Έστω

$$x_\nu = \frac{\alpha_1\alpha_3...\alpha_{2\nu-1}}{\alpha_2\alpha_4...\alpha_{2\nu}}$$

Τότε :

$$x_\nu^2 = \frac{\alpha_1(\alpha_1\alpha_3)...(\alpha_{2\nu-3}\alpha_{2\nu-1})\alpha_{2\nu-1}}{\alpha_2^2\alpha_4^2...\alpha_{2\nu}^2} \leqslant$$

$$\frac{\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4^2...\alpha_{2\nu-2}^2\alpha_{2\nu-1}}{\alpha_2^2\alpha_4^2...\alpha_{2\nu}^2} = \frac{\alpha_1\alpha_{2\nu-1}}{\alpha_{2\nu}^2} \leqslant$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_{2\nu+1}} \Leftrightarrow x_\nu \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_{2\nu+1}}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο Γιώργος Ροδόπουλος)* *Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο*

$$x^3 - \pi x^2 + 27\alpha x - 3\pi\alpha$$

έχει τρεις θετικές ρίζες. Αφού βρείτε τον αριθμό α να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 6\sqrt{\alpha}$$

είναι αδύνατη.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=2114

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Από τους τύπους *Vieta* αν r_1, r_2, r_3 οι ρίζες της εξίσωσης, τότε

$$r_1 + r_2 + r_3 = \pi \; r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 27a \; r_1r_2r_3 = 3\pi a$$

Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε

$$r_1 + r_2 + r_3 \geq 3\sqrt[3]{r_1r_2r_3} = 3\sqrt[3]{3\pi a} = 3\sqrt[3]{3(r_1 + r_2 + r_3)a}$$

Κάνοντας πράξεις στην τελευταία παίρνουμε τελικά ότι $(r_1 + r_2 + r_3)^2 \geq 3^4 a$ (1)

Όμοια από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε

$$\begin{aligned} 27a &= r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 \geq 3\sqrt[3]{r_1^2r_2^2r_3^2} \\ &= 3\sqrt[3]{9\pi^2a^2} = 3\sqrt[3]{9(r_1 + r_2 + r_3)^2a^2} \\ &\overset{(1)}{\geq} 3\sqrt[3]{9 \cdot 3^4a^3} = 27a \end{aligned}$$

δηλαδή ισχύει η ισότητα.

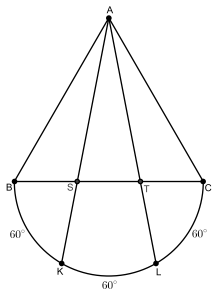
Όμως η τελευταία ισχύει σαν ισότητα όταν $r_1r_2 = r_2r_3 = r_3r_1$ δηλαδή $r_1 = r_2 = r_3 \; \left(= \frac{\pi}{3}\right)$.

άρα λοιπόν βρίσκουμε $a = \frac{\pi^2}{3^4}$.

Επειδή $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, άρα η εξίσωση γράφεται τελικά

$\eta\mu^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3} > 1$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο KARKAR) Ημικύκλιο διαμέτρου BC και ισόπλευρο τρίγωνο με βάση την BC, βρίσκονται εκατέρωθεν της BC. Τριχοτομούμε το τόξο* $\overset{\frown}{BC}$*. Δείξτε ότι με τις δημιουργούμενες συνδέσεις τριχοτομείται η πλευρά BC !*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=116634#p116634

Λύση 1 (Παναγιώτης Γιαννόπουλος) O μέσον της BC.

Είναι BOC ισόπλευρο πλευράς $AB : 2 = a : 2$

τργ $BOK \sim CSA$ με λόγο ομοιότητος

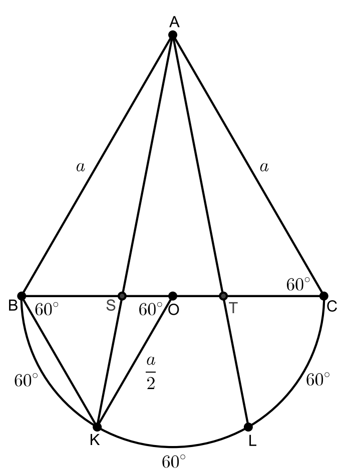
$$BK : AC = 0,5$$

συνεπώς

$$BS = 0,5SC = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}a$$

Ομοίως $TC = \frac{1}{3}a$ οπότε απομένει $ST = \frac{1}{3}a$

Έπεται το ζητούμενο



Λύση 2 (Σωτήρης Λουρίδας)

$$AB = BC = CA = BD = DC$$

και

$$BS' = S'T' = T'C, \quad K' \equiv AS \cap BD$$

και

$$L' \equiv AT \cap DC.$$

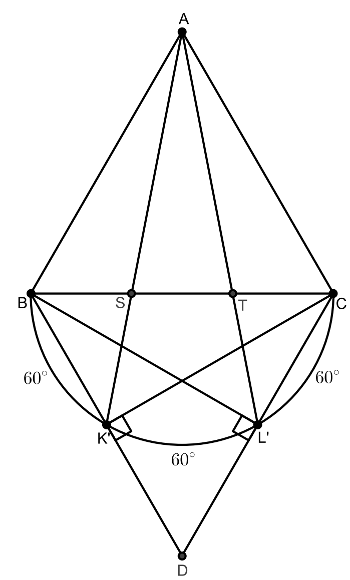
Από γνωστότατη ιδιότητα του παραλληλόγραμμου άρα και του ρόμβου παίρνουμε:

$$BK' = \frac{BD}{2} = \frac{BC}{2} \left(\mu\varepsilon\ \angle DBC = \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$BK' = K'L' = L'C, \quad CK' \perp BD, \quad \text{όμοια} \quad BL' \perp CD.$$

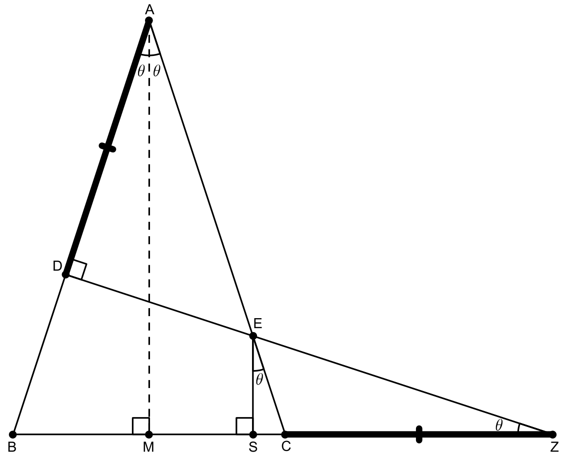
Συνεπώς ο κύκλος με διάμετρο το ευθ. τμήμα BC περνά από τα σημεία

$$K', L' \Rightarrow K' \equiv K \quad \text{όμοια} \quad L' \equiv L.$$



ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο KARKAR) Σε σημείο D της πλευράς AB του ισοσκελούς τριγώνου ABC, (AB = AC), φέρω κάθετη, η οποία τέμνει την μεν AC στο E, τη δε προέκταση της BC στο Z.*

Αν είναι AD = CZ, δείξτε ότι η απόσταση του E από την BC, είναι μισή της απόστασής του από την AB. Ερώτηση προς διερεύνηση : Μπορούμε να εντοπίσουμε «κατασκευαστικά», τη θέση του σημείου D ;



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=117040#p117040

Λύση 1 (Γρηγόρης Κακλαμάνος) Με Θ. Μενελάου στο $\triangle ABC$ προκύπτει $\frac{EC}{AE} = \frac{BD}{BZ} = cosB$ (1)

Επιπλέον είναι $sinC = sinB = \dfrac{ES}{EC}$ (2)

Επίσης $sinA = \dfrac{DE}{AE}$ (3)

Έχουμε

$$(3):(2) \Rightarrow \frac{sinA}{sinB} = \frac{\frac{DE}{AE}}{\frac{ES}{EC}} \Rightarrow$$

$$\frac{sinA}{sinB} = \frac{DE}{ES} \cdot \frac{EC}{AE} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{sinA}{sinB} = cosB \cdot \frac{DE}{ES} \Rightarrow$$

$$\frac{DE}{ES} = \frac{sinA}{sinB \cdot cosB}$$

Όμως από Ν. Ημιτόνων είναι

$$\frac{sinA}{sinB} = \frac{BC}{AC}$$

και

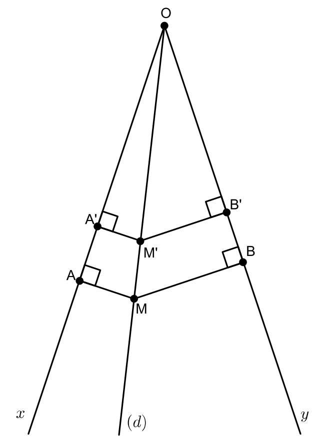
$$\frac{1}{cosB} = \frac{AC}{\frac{BC}{2}} = 2\frac{AC}{BC}$$

Συνεπώς πολλαπλασιάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει

$$\frac{DE}{ES} = 2$$

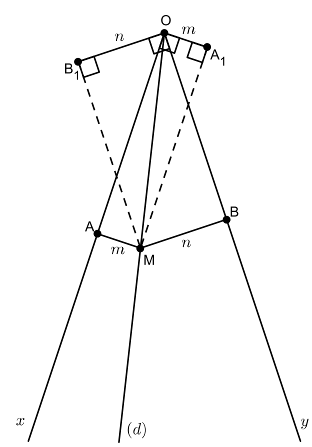
Λύση 2 (Κώστας Δόρτσιος) Για την κατασκευή του σημείου D θα χρειαστεί να κατασκευαστεί πρώτα το σημείο E κι αφού πρώτα έχει εξασφαλιστεί η ιδιότητα που έδειξε ο Γρηγόρης, δηλαδή πως το σημείο E απέχει από τις πλευρές της γωνίας B αποστάσει με λόγο $1:2$. Η ιστορία εξελίσσεται σε τρία σχήματα:

1ο) *Ο γ.τόπος των σημείων στο εσωτερικό μιας γωνίας που απέχουν από τις πλευρές της γωνίας αποστάσεις με δοθέντα λόγο είναι ημιευθεία με αρχή την κορυφή της δοθείσης γωνίας.*



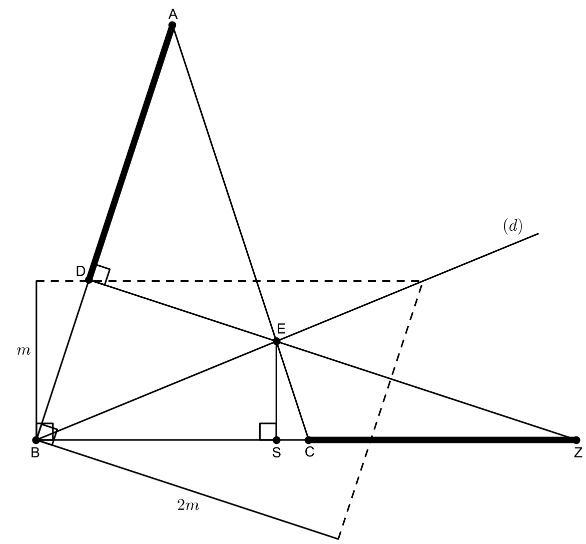
Πράγματι: Αν ένα τέτοιο είναι το σημείο M τότε $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{m}{n}$ τότε οποιοδήποτε σημείο M' της Od θα έχει την ίδια ιδιότητα όπως αυτό δείχνεται από τα δυο ζεύγη των ομοίων ορθογωνίων τριγώνων.

2ο) *Κατασκευή του γεωμετρικού αυτού τόπου.*



Φέρουμε τις κάθετες προς τις πλευρές της γωνίας και πάνω σ΄ αυτές ορίζουμε με τη σειρά των όρων του δοθέντα λόγου τα τμήματα: $OA_1 = m$, $OB_1 = n$ μετά φέρουμε από τα πέρατα των τμημάτων αυτών παράλληλες προς τις πλευρές της γωνίας και το σημείο τομής αυτών M απέχει, όπως εύκολα δείχνεται, από τις πλευρές της γωνίας αποστάσεις με τον δοθέντα λόγο.

3ο) Κατασκευή του σχήματος της άσκησης του Θανάση: Χωρίς λόγια.



Πράγματι στο σχήμα αυτό ισχύουν όλα όσα η άσκηση προαπαιτεί και στη συνέχεια απαιτεί.

Σημείωση: Ο γ.τόπος που αναφέρθηκε γενικεύεται και σε σημεία εκτός της γωνίας όπου προκύπτει ολόκληρη η ευθεία καθώς και συμπληρώνεται και από μια δεύτερη ευθεία που μαζί με την πρώτη και τις δύο πλευρές της γωνίας αποτελούν αρμονική τετράδα.

Λύση 3 (KARKAR) Από (Θ. Μενελάου) και λόγω του $DA = ZC$, παίρνω :

$$\frac{EC}{EA} = \frac{DB}{ZB} \quad (*)$$

Φέροντας τη διχοτόμο AM, οι τέσσερις θ είναι ίσες, οπότε

$$EC = \frac{ES}{\sigma\upsilon\nu\theta}, EA = \frac{DE}{\eta\mu 2\theta}$$

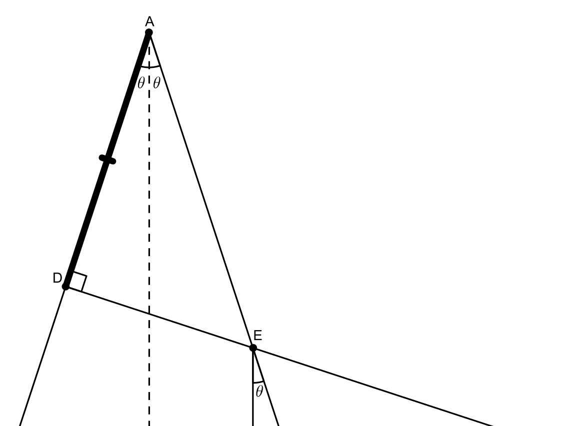
και

$$\frac{DB}{ZB} = \eta\mu\theta$$

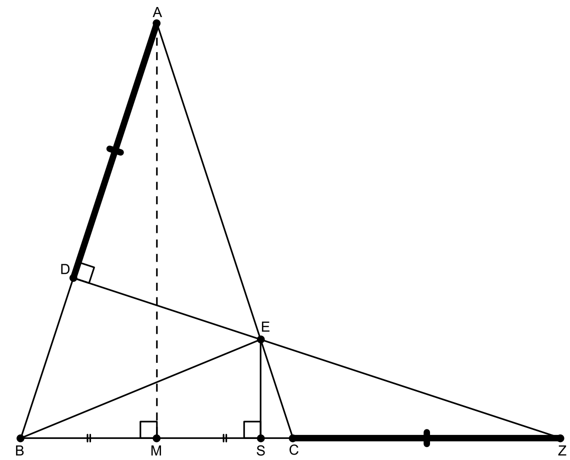
Συνεπώς (*):

$$EC = EA\eta\mu\theta \Rightarrow \frac{ES}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{DE}{\eta\mu 2\theta}\eta\mu\theta$$

$$ES = \frac{DE\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow ES = \frac{DE}{2}$$



Λύση 4 (Στάθης Κούτρας) Έστω AM το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $\triangle ABC\,(AB = AC)$ τότε και διάμεσος δηλαδή $BM = \dfrac{BC}{2}$: (1).



Είναι

$$\triangle ZDB \sim \triangle AMB$$

ορθογώνια με μια οξεία γωνία (την $\widehat{CBA}$) κοινή άρα :

$$\frac{ZB}{AB} = \frac{BD}{BM} = \frac{BD}{\frac{BC}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{ZB}{AB} = 2\frac{BD}{BC} : \quad (2)$$

Για τα τρίγωνα

$$\triangle ADE, \triangle ABC$$

με κοινή γωνία $\widehat{BAC}$ είναι:

$$\frac{(ADE)}{(ABC)} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC} \overset{AC=AB}{\Rightarrow}$$

$$\frac{(ADE)}{(ABC)} = \frac{AD \cdot AE}{AB^2} : \quad (3)$$

Για τα τρίγωνα

$$\triangle ECZ, \triangle ABC$$

με $\widehat{ECZ} + \widehat{ACB} = 180^0$ (παραπληρωματικές) είναι:

$$\frac{(ECZ)}{(ABC)} = \frac{CE \cdot CZ}{CB \cdot AC} \overset{AC=AB,CZ=AD}{\Rightarrow}$$

$$\frac{(ECZ)}{(ABC)} = \frac{CE \cdot AD}{CB \cdot AB} : (4)$$

Από

$$(3) : (4) \Rightarrow \frac{\frac{(ADE)}{(ABC)}}{\frac{(ECZ)}{(ABC)}} =$$

$$\frac{\frac{AD \cdot AE}{AB^2}}{\frac{CE \cdot AD}{CB \cdot AB}} \overset{AC=AB}{\Rightarrow}$$

$$\frac{(ADE)}{(ECZ)} = \frac{CB \cdot AE}{AB \cdot CE} : (5)$$

Από Μενέλαο στο

$$\triangle\, ABC$$

με διατέμνουσα ZED είναι:

$$1 = \frac{ZB}{ZC} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AD}{DB} \overset{ZC=AD}{\Rightarrow}$$

$$1 = \frac{ZB}{DB} \cdot \frac{CE}{AE} : (6)$$

Από

$$(5) \cdot (6) \Rightarrow \frac{(ADE)}{(ECZ)} = \frac{BC \cdot AE}{AB \cdot CE} \cdot \frac{ZB}{BC} \cdot \frac{CE}{AE} \Rightarrow$$

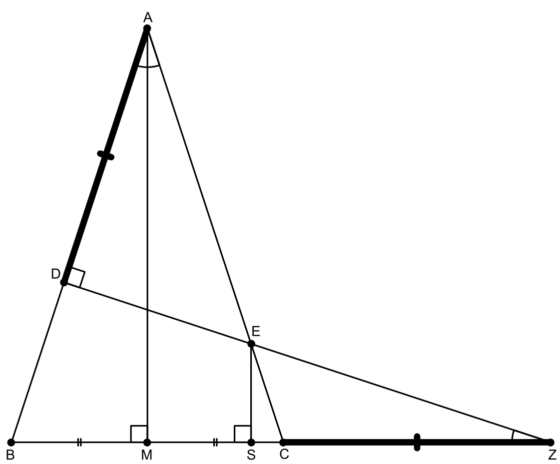
αφού $\frac{(ADE)}{(ECZ)} = \frac{ED}{ES}$(λόγος υψών προς ίσες βάσεις AD, CZ)

$$\frac{ED}{ES} = \frac{ZB}{AB} \cdot \frac{BC}{BD} \overset{(2):\frac{ZB}{AB}=2\frac{BD}{BC}}{\Rightarrow}$$

$$\frac{ED}{ES} = 2\frac{BD}{BC} \cdot \frac{BC}{BD} = 2 \Rightarrow ED = 2ES$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Λύση 4 (Κώστας Βήττας)



• Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle\ DBZ$ με διατέμνουσα την ευθεία AEC, σύμφωνα με το Θεώρημα Μενελάου, έχουμε

$$\frac{ED}{EZ} \cdot \frac{CZ}{CB} \cdot \frac{AB}{AD} = 1 \Longrightarrow$$

$$\frac{ED}{BC} = \frac{EZ}{AB} \quad ,(1)$$

(λόγω $AD = CZ$).

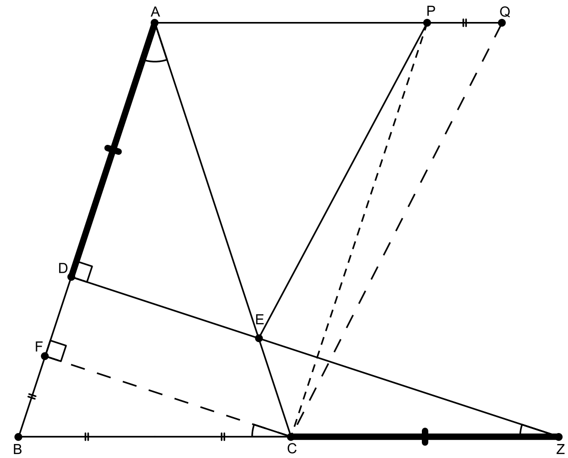
Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle\ MAB$, $\triangle\ SEZ$ έχουμε $\frac{EZ}{AB} = \frac{ES}{BM} = \frac{2ES}{BC} \quad ,(2)$ (λόγω $BC = 2BM$).

Από (1), (2)

$$\Longrightarrow \frac{ED}{BC} = \frac{2ES}{BC} \Longrightarrow$$

$$ED = 2ES \quad ,(3)$$

και το **(α)** ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



• Για το **(β)** ζητούμενο, αρκεί να προσδιοριστεί το σημείο E επί της πλευράς AC. Στο τρίγωνο $\triangle\ ABC$ με διατέμνουσα την ευθεία DEZ, σύμφωνα με το Θεώρημα Μενελάου, έχουμε

$$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{ZB}{ZC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \Longrightarrow$$

$$\frac{EA}{EC} = \frac{ZB}{DB} \quad ,(1)$$

Έστω F, η προβολή του C επί της AB και από $CF \parallel ZD$, σύμφωνα με το Θεώρημα Θαλή, έχουμε $\frac{ZB}{DB} = \frac{BC}{BF} \quad ,(2)$ Από (1), (2) $\Longrightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{BC}{BF} \quad ,(3)$ από όπου προκύπτει εύκολα ο προσδιορισμός του σημείου E ως εξής :

• Έστω P το σημείο ώστε το $ABCP$ να είναι παραλληλόγραμμο και ας είναι Q το σημείο στην προέκταση του AP, ώστε να ισχύει $PQ = BF$. Από το P φέρνουμε την παράλληλη ευθεία προς την CQ, η οποία τέμνει την AC στο σημείο E, που είναι το ζητούμενο ώστε να ισχύει η (3). Εάν τώρα, D είναι η προβολή του E επί της AB, αποδεικνύεται εύκολα ότι $AD = CZ$, όπου $Z \equiv BC \cap DE$ και το **(β)** ζητούμενο έχει λυθεί.

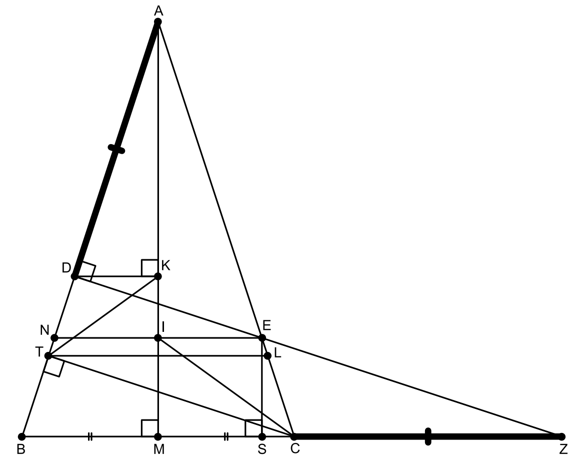
Λύση 5 (Ανδρέας Βαρβεράκης) Έστω CT ύψος, K η προβολή του D στη διάμεσο AM, N σημείο της AB με $EN \parallel BC$, I η τομή της EN με την AM και L σημείο της AC με $TL \parallel BC$. Από την ομοιότητα των τριγώνων ADK, BDZ και την παραλληλία $CT \parallel DZ$, έχουμε:

$$\frac{DK}{AD} = \frac{BD}{BZ} = \frac{TD}{ZC} \Rightarrow DK = TD$$

που σημαίνει ότι η TK διχοτομεί τη γωνία $\widehat{ATL}$ Από την ομοιότητα των τριγώνων ADK, AIE, προκύπτει ότι:

$$\frac{AK}{AI} = \frac{AD}{AE} = \frac{AT}{AC} = \frac{AT}{AB}$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι το σημείο I είναι έγκεντρο του τριγώνου ABC, καθώς το K είναι έγκεντρο του ATL και τα δύο τρίγωνα είναι ομοιόθετα με κέντρο A και λόγο $\frac{AT}{AB}$. Επομένως $EI = EC = \frac{NE}{2}$, που σημαίνει ότι τα τρίγωνα ESC, EDNείναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{ES}{ED} = \frac{1}{2}$. Επομένως, το σημείο E κατασκευάζεται, φέρνοντας παράλληλη προς τη βάση και διερχόμενη από το έγκεντρο του ABC.



ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο KARKAR) Σημείο S κινείται επί της ευθείας $y = \frac{1}{2}x$, ενώ σημείο A κινείται επί της ευθείας $y = -\frac{1}{2}x$ έτσι ώστε: $(SA) = 6$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του τμήματος SA.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=21532

Λύση 1 (Μαργαρίτα Βαρελά) Έστω

$$A\,(-2\alpha,\alpha)\,,\quad S\,(2\beta,\beta)\,,\quad \mathrm{M}\,(x,y)\,.$$

Τότε:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2\beta-2\alpha}{2} \\ y &= \frac{\beta+\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \beta-\alpha &= x \\ \beta+\alpha &= 2y \end{aligned}\right\}.$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} (SA)^2 &= 6^2 \Leftrightarrow \\ (\beta-\alpha)^2+(2\beta+2\alpha)^2 &= 36 \Leftrightarrow \\ x^2+(4y)^2 &= 36 \Leftrightarrow \\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{\frac{36}{16}} &= 1 \Leftrightarrow \\ \frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} &= 1. \end{aligned}$$

Λύση 2 (Γιώργος Απόκης) Έστω $S\left(x_1,\frac{x_1}{2}\right)$, $A\left(x_2,-\frac{x_2}{2}\right)$. Τότε $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1-x_2}{4}\right)$.
Αφού $SA=6$ έχουμε:

$$\begin{aligned} MA &= 3 \Leftrightarrow \\ \sqrt{\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}x_2-\frac{x_1-x_2}{4}\right)^2} &= 3 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2+x_1}{4}\right)^2 &= 9 \Leftrightarrow \\ (2y_M)^2+\left(\frac{x_M}{2}\right)^2 &= 9 \Leftrightarrow \\ \frac{4y_M^2}{9}+\frac{x_M^2}{36} &= 1 \Leftrightarrow \\ \frac{x_M^2}{6^2}+\frac{y_M^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} &= 1, \end{aligned}$$

δηλαδή έλλειψη με άξονες $2a=12,\ 2b=3$.

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Έστω η υπερβολή $C_1 : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ και ο κύκλος $C_2 : x^2+y^2=a^2$ με $a,b>0$. Αν $K(x_0,y_0)$, $x_0>0$, είναι το κοινό σημείο του C_2 με την ασύμπτωτη $(\epsilon) : y=\frac{b}{a}x$ της C_1, να δείξετε ότι η εφαπτομένη του C_2 στο K διέρχεται από την εστία E της υπερβολής.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=21164

Λύση 1 (Μυρτώ Λιάπη) Ο κύκλος τέμνει την ασύμπτωτη της υπερβολής στο $K(x_0,y_0)$ με

$$x_0=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2}{\gamma}\ \text{και}\ y_0=\frac{ba}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ba}{\gamma}$$

(προκύπτει αν λύσουμε το σύστημα του κύκλου και της ασύμπωτης και $E(\gamma,0)$ η εστία της υπερβολής με θετική τετμημένη). Η εφαπτομένη του κύκλου στο K είναι η $xx_0+yy_0=a^2$ και για να περνάει από την εστία $E(\gamma,0)$ αρκεί να ισχύει $\gamma x_0=a^2 \Leftrightarrow x_0=\frac{a^2}{\gamma}$ που ισχύει από παραπάνω. (Η εφαπτομένη περνά από το $E(\gamma,0)$ γιατί $x_0>0$).

Λύση 2 (Δημήτρης Ιωάννου) Η εφαπτομένη του C_2 στο σημείο K έχει εξίσωση $xx_0+yy_0=a^2$. Όμως $y_0=\frac{b}{a}x_0$ και

$$
\begin{aligned}
x_0^2 + y_0^2 &= a^2 \Rightarrow \\
x_0^2 + \frac{b^2}{a^2} x_0^2 &= a^2 \Rightarrow \\
a^2 x_0^2 + b^2 x_0^2 &= a^4.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Για να περνάει η εφαπτομένη στο K από την εστία $E(c, 0)$, θα πρέπει:

$$
\begin{aligned}
cx_0 &= a^2 \Leftrightarrow \\
c^2 x_0^2 &= a^4 \Leftrightarrow \\
(a^2 + b^2) x_0^2 &= a^4,
\end{aligned}
$$

πράγμα που ισχύει λόγω της σχέσης (11).

Μαθηματικά Γ' Λυκείου (Γενικής Παιδείας)

Επιμελητής: Χρήστος Τσιφάκης

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής) Έστω μεταβλητή X με παρατηρήσεις $t_1, t_2, ..., t_\nu$, μέση τιμή $\overline{x} \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση*

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x(t_1+t_2+...+t_\nu)-2\nu\overline{x}}{x^2-4}, & 0 < x \neq 2 \\ \frac{\alpha\nu\overline{x}}{2}, & x = 2 \end{array} \right\}.$$

1. *Αν η g είναι συνεχής στο $x_o = 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$.*
2. *Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $A(3, 20)$, να αποδείξετε ότι $\sum_{i=1}^{\nu} t_i = 100$.*
3. *Αν $\sum_{i=1}^{\nu} t_i f_i = 1$, όπου f_i οι σχετικές συχνότητες των παρατηρήσεων, να βρεθεί το πλήθος ν του δείγματος.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=21166&start=20

Λύση 1 (Δημήτρης Κατσίποδας)

1. Έχουμε

$$\overline{x} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$t_1 + t_2 + ... + t_\nu = \nu\overline{x} \qquad (12)$$

και

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x(t_1+t_2+...+t_\nu)-2\nu\overline{x}}{x^2-4} & ,0 < x \neq 2 \\ \frac{\alpha\nu\overline{x}}{2} & ,x = 2 \end{cases}. \text{ Τότε}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} g(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{x(t_1 + t_2 + ... + t_\nu) - 2\nu\overline{x}}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{\nu\overline{x}(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{\nu\overline{x}}{(x+2)} = \frac{\nu\overline{x}}{4} \end{aligned}$$

και $g(2) = \frac{\alpha\nu\overline{x}}{2}$. Αφού η g είναι συνεχής στο $x_o = 2$ έχουμε ότι

$$\frac{\nu\overline{x}}{4} = \frac{\alpha\nu\overline{x}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

2. Έχουμε

$$\begin{aligned} g(3) = 20 &\Leftrightarrow \\ \frac{3\nu\overline{x} - 2\nu\overline{x}}{9-4} = 20 &\Leftrightarrow \\ \nu\overline{x} = 100 &\overset{(12)}{\Leftrightarrow} \\ t_1 + t_2 + ... + t_\nu = 100 &\Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^{\nu} t_i = 100. \end{aligned}$$

3. Αφού κάθε παρατήρηση εμφανίζεται μία φορά έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu} t_i f_i = 1 &\Leftrightarrow \\ t_1 f_1 + t_2 f_2 + ... + t_\nu f_\nu = 1 &\Leftrightarrow \\ t_1\frac{\nu_1}{\nu} + t_2\frac{\nu_2}{\nu} + ... + t_\nu\frac{\nu_\nu}{\nu} = 1 &\Leftrightarrow \\ t_1\nu_1 + t_2\nu_2 + ... + t_\nu\nu_\nu = \nu &\Leftrightarrow \\ t_1 + t_2 + ... + t_\nu = \nu &\Leftrightarrow \\ \nu = 100. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Γιώργος Ροδόπουλος) Ένα δείγμα μεγέθους ν έχει τυπική απόκλιση s, $s \neq 0$. Να αποδείξετε ότι για το εύρος R ισχύει $0 < 2s\sqrt{\nu}$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=5875

Λύση 1 (Βασίλης Μαυροφρύδης) Είναι :

$$\begin{aligned} R &= t_{\max} - t_{\min} \\ &= (t_{\max} - \overline{x}) - (t_{\min} - \overline{x}) \Leftrightarrow \\ R^2 &= (t_{\max} - \overline{x})^2 + (t_{\min} - \overline{x})^2 - 2\,(t_{\max} - \overline{x})\,(t_{\min} - \overline{x}). \end{aligned}$$

Ισχύει ότι :

$$
\begin{aligned}
&[(t_{\max}-\overline{x})+(t_{\min}-\overline{x})]^2 \geq 0 \Leftrightarrow\\
&(t_{\max}-\overline{x})^2+(t_{\min}-\overline{x})^2+\\
&\quad 2\,(t_{\max}-\overline{x})\,(t_{\min}-\overline{x}) > 0 \Leftrightarrow\\
&2\left[(t_{\max}-\overline{x})^2+(t_{\min}-\overline{x})^2\right] \geq (t_{\max}-\overline{x})^2\\
&\qquad + (t_{\min}-\overline{x})^2\\
&\qquad - 2\,(t_{\max}-\overline{x})\,(t_{\min}-\overline{x})\\
&\qquad \Leftrightarrow\\
&2\left[(t_{\max}-\overline{x})^2+(t_{\min}-\overline{x})^2\right] \geq R^2 \Leftrightarrow\\
&\sqrt{2\left[(t_{\max}-\overline{x})^2+(t_{\min}-\overline{x})^2\right]} \geq R.
\end{aligned}
$$

Όπως επίσης ότι :

$$
\begin{aligned}
&(t_{\max}-\overline{x})^2+(t_{\min}-\overline{x})^2 \leq \sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\overline{x})^2 \Leftrightarrow\\
&2\left[(t_{\max}-\overline{x})^2+(t_{\min}-\overline{x})^2\right] \leq \frac{2\nu}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\overline{x})^2 \Leftrightarrow\\
&2\left[(t_{\max}-\overline{x})^2+(t_{\min}-\overline{x})^2\right] \leq 2\nu s^2 \Leftrightarrow\\
&\sqrt{2\left[(t_{\max}-\overline{x})^2+(t_{\min}-\overline{x})^2\right]} \leq s\sqrt{2\nu}
\end{aligned}
$$

Από μεταβατική ιδιότητα : $R \leq s\sqrt{2\nu}$ επειδή η τυπική απόκλιση δεν είναι 0 τουλάχιστον μία παρατήρηση του δείγματος δεν ισούται με την μέση τιμή, οπότε οι 3 παραπάνω ανισότητες γίνονται γνήσιες.

Λύση 2 (Γιώργος Ροδόπουλος) Επειδή $s \neq 0$ θα είναι $\nu \geq 2$ και θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον παρατηρήσεις α, β διαφορετικές της μέσης τιμής. (Μάλιστα θα ισχύει $a < \overline{x} < \beta$ η $\beta < \overline{x} < a$). Αν ονομάσουμε t_i , $i = 1, 2, ..., \nu$ τις παρατηρήσεις , τότε:

$$\nu s^2 = \sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\overline{x})^2.$$

Για την τυχαία παρατήρηση t_i θα ισχύει

$$
\begin{aligned}
&(t_i-\overline{x})^2 < \sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\overline{x})^2 \Rightarrow\\
&(t_i-\overline{x})^2 < \nu s^2 \Rightarrow\\
&|\,t_i-\overline{x}| < s\sqrt{\nu}.
\end{aligned}
$$

Έτσι

$$
\begin{aligned}
&|\,t_{\max}-\overline{x}| < s\sqrt{\nu} \Rightarrow\\
&t_{\max}-\overline{x} < s\sqrt{\nu} \Rightarrow\\
&t_{\max} < s\sqrt{\nu}+\overline{x} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
&|\,t_{\min}-\overline{x}| < s\sqrt{\nu} \Rightarrow\\
&\overline{x}-t_{\min} < s\sqrt{\nu} \Rightarrow\\
&t_{\min} > \overline{x}-s\sqrt{\nu}. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Από τις (13),(14) προκύπτει :

$$t_{\max}-t_{\min} < 2s\sqrt{\nu} \Rightarrow R < 2s\sqrt{\nu}.$$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου (Κατεύθυνση Μιγαδικοί)

Επιμελητής: Κώστας Τηλέγραφος

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος)* *Έστω οι μιγαδικοί z, w με τις ιδιότητες*

$$4|z|^2 - 2z\overline{w} = 1, \qquad |w|^2 - 2z\overline{w} = 3.$$

1. *Να δείξετε ότι $|2z - w| = 2$.*

2. *Να δείξετε ότι οι εικόνες των z και w ανήκουν σε κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων, των οποίων να βρείτε και την ακτίνα.*

3. *Να βρείτε το $|6z + w|$.*

4. *Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=21713&start=60

Λύση (Δημήτριος Κατσίποδας)

1. Αρχικά έχουμε

$$\begin{aligned} 4|z|^2 - 2z\overline{w} = 1 &\Leftrightarrow \\ 2z\overline{w} = 4|z|^2 - 1 &\Leftrightarrow \\ z\overline{w} = \left(\frac{4|z|^2 - 1}{2}\right) &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Οπότε $\quad z\overline{w} = \overline{z}w$

$$\begin{aligned} |2z - w|^2 &= (2z - w)(2\overline{z} - \overline{w}) \\ &= 4z\overline{z} - 2z\overline{w} - 2w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= 4|z|^2 - 2z\overline{w} + |w|^2 - 2z\overline{w} \\ &= 4|z|^2 - 2z\overline{w} + |w|^2 - 2\overline{z}w \\ &= 4. \end{aligned}$$

Επομένως $\quad |2z - w| = 2$

2.

$$\begin{aligned} |w|^2 - 2z\overline{w} = 3 &\Leftrightarrow \\ w\overline{w} - 2z\overline{w} = 3 &\Leftrightarrow \\ \overline{w}(w - 2z) = 3 &\Rightarrow \\ |\overline{w}|\,|w - 2z| = 3 &\overset{1}{\Rightarrow} \\ 2\,|\overline{w}| = 3 &\Rightarrow \\ |w| = \frac{3}{2} & \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 4\,|z|^2 - 2z\overline{w} = 1 &\Leftrightarrow \\ 4z\overline{z} - 2z\overline{w} = 1 &\overset{z\overline{w}=w\overline{z}}{\Leftrightarrow} \\ 4z\overline{z} - 2\overline{z}w = 1 &\Leftrightarrow \\ 2\overline{z}(2z - w) = 1 &\Rightarrow \\ |2\overline{z}|\,|2z - w| = 1 &\overset{1}{\Rightarrow} \\ 4\,|z| = 1 &\Rightarrow \\ |z| = \frac{1}{4} & \end{aligned}$$

Επομένως οι εικόνες του z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνας $\rho_1 = \dfrac{1}{4}$, ενώ του w ανήκουν σε κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνας $\rho_2 = \dfrac{3}{2}$

3. Έχουμε

$$z\overline{w} = \overline{z}w = \frac{4\frac{1}{16} - 1}{2} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{2} = \frac{-\frac{3}{4}}{2} = -\frac{3}{8}$$

και

$$\begin{aligned} |6z + w|^2 &= (6z + w)(6\overline{z} + \overline{w}) \\ &= 36z\overline{z} + 6z\overline{w} + 6w\overline{z} + w\overline{w} \\ &\overset{z\overline{w}=\overline{z}w}{=\!=\!=} 36\,|z|^2 + 12z\overline{w} + |w|^2 \\ &= \frac{36}{16} + 12\left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{9}{4} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{9}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

οπότε $|6z+w|=0$. Επομένως αν A η εικόνα του $-6z$ και B η εικόνα του w, έχουμε οτι το $A \equiv B$.

4.

$$\begin{aligned}|z-w|^2 &= (z-w)(\overline{z}-\overline{w})\\ &= z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w}\\ &\overset{z\overline{w}=w\overline{z}}{=\!=\!=} |z|^2 - 2z\overline{w} + |w|^2\\ &= \frac{1}{16} - 2\left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{9}{4}\\ &= \frac{1}{16} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\\ &= 3 + \frac{1}{16}\\ &= \frac{49}{16}\end{aligned}$$

Οπότε $|z-w| = \dfrac{7}{4}$.

Συνεπώς

$|z-w|_{\min} = |z-w|_{\max} = \dfrac{7}{4} =$ σταθερό.

Επιπλέον τρόπος : Επειδή απο το 3 έχουμε οτι η εικόνα A του $-6z$ και η εικόνα του B του w ταυτίζονται, αν Γ η εικόνα του z, έχουμε οτι τα σημεία Γ, Ο, Β είναι συνευθειακά καθώς και οτι τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{OB}}$ και $\overrightarrow{\text{OΓ}}$ είναι αντίρροπα. Οπότε

$$|z-w| = \left|\overrightarrow{\text{BΓ}}\right| = \left|\overrightarrow{BO}\right| + \left|\overrightarrow{\text{OΓ}}\right| = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο Τηλέγραφος Κώστας)* *Δίνεται η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ με*

$$\int_1^{|z|} f(x)dx = 0 \quad \textit{με} \quad f(1) = 1.$$

1. *Να δειχτεί ότι $f(x) > 0$.*
2. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των z.*
3. *Να βρείτε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(|z+\overline{z}|-3)\,x^3+x}{(|z-\overline{z}|-3)\,x^2+x}$.*
4. *Αν το εμβαδόν της f με τον $x'x$ από τη $x=0$ μέχρι τη $x=1$ είναι μικρότερο του $|z+2\overline{z}|$, να δειχτεί ότι η εξίσωση*

$$\int_0^x f(t)dt = 3x^2 + 6x - 6$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=21713&start=100

Λύση (Περικλής Παντούλας)

1. Η f είναι διάφορη του μηδενός για κάθε $x \in \Re$ και συνεπώς διατηρεί πρόσημο στο $\Re$. Αφού $f(1) = 1 > 0$, έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$
2. Η σχέση $\displaystyle\int_1^{|z|} f(x)\,dx = 0$ ισχύει για κάθε $x \in \Re$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$ Οπότε $|z| = 1$. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι ο μοναδιαίος κύκλος.
3. Για $z = a + bi, a, b \in \Re$ έχουμε $|z+\overline{z}| = 2\,|a|$ και $|z-\overline{z}| = 2\,|b|$. Οπότε

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} \frac{(|z+\overline{z}|-3)\,x^3+x}{(|z-\overline{z}|-3)\,x^2+x} =\\ &\lim_{x\to-\infty} \frac{(2\,|a|-3)\,x^3+x}{(2\,|b|-3)\,x^2+x} =\\ &\lim_{x\to-\infty} \frac{(2\,|a|-3)\,x^3}{(2\,|b|-3)\,x^2} =\\ &\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2\,|a|-3}{2\,|b|-3}x\right) = -\infty.\end{aligned}$$

   Γιατί: Η εικόνα του z κινείται στον μοναδιαίο κύκλο και συνεπώς $|a| \leq 1 < \dfrac{3}{2}$, άρα $2\,|a| - 3 < 0$. Ομοίως $2\,|b| - 3 < 0$.

4. Το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $x = 0, x = 1$ είναι $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ αφού λόγω του 1 έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &< |z+2\overline{z}|\\ &\leq |z| + 2\,|\overline{z}|\\ &= |z| + 2\,|z|\\ &= 3\,|z|\\ &= 3.\end{aligned}$$

   Άρα

$$\int_0^1 f(x)\,dx - 3 < 0. \tag{15}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση

$$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt-3x^2-6x+6$$

με $x\in[0,1]$. Η $h(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις των συνεχών $\int_0^x f(t)\,dt$ (η $f(x)$ συνεχής και άρα η $\int_0^x f(t)\,dt$ παραγωγίσιμη) και $-3x^2-6x+6$ (συνεχής ως πολυωνυμική).

Επιπλέον

$$h(0)=6>0 \quad \text{και} \quad h(1)=\int_0^1 f(x)\,dx-3<0$$

από τη σχέση (15).

Από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_o)=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_o} f(t)\,dt-3t^2-6t+6=0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Κώστας Καπένης) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3.$$

Να βρείτε το:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{\sin(\pi x)}.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=10921

Λύση 1 (Φωτεινή Καλδή)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{\sin(\pi x)} &= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{f(x)}{x-2}}{\frac{\sin(\pi x)}{x-2}}\\ &= \frac{3}{\pi}\lim_{x\to 2}\frac{\sin(\pi x)}{x-2}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{\sin(\pi u)}{u}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\pi\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Λύση 2 (Κώστας Τσουβαλάς)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{\sin 2\pi x} &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}\cdot\frac{x-2}{\sin\pi x}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}\cdot\frac{x-2}{-\sin(2\pi-\pi x)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}\frac{x-2}{\sin\pi(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)}{x-2}\right)\lim_{x\to 2}\frac{\pi(x-2)}{\sin\pi(x-2)}\frac{1}{\pi}\\ &= \frac{3}{\pi}.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι $1-1$ και έχει την ιδιότητα :*

$$f(x)\cdot f(1-x)=f(ax+b),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι :

1. $a=0$
2. $f(b)\neq 0$
3. $f(1-b)=1$
4. *η συνάρτηση f δεν έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=11884

Λύση 1 (Λευτέρης Πρωτοπαπάς)

1. Για $x=0, x=1$ βρίσκουμε ότι:

   $$f(1)f(0)=f(a+b)=f(b),$$

   και αφού η f είναι $1-1$,

   $$a+b=b\Leftrightarrow a=0.$$

2. Ισχύει: $f(x)f(1-x)=f(b)$. Έστω ότι $f(b)=0$, τότε $f(x)f(1-x)=0$. Για $x=0, x=2$, έχουμε ότι:

   - $f(0)=0$ ή $f(1)=0$ και
   - $f(2)=0$ ή $f(-1)=0$.

   Συνεπώς:

   $$\begin{aligned}f(0)&=f(2)\quad \text{ή}\\ f(0)&=f(-1)\quad \text{ή}\\ f(1)&=f(2)\quad \text{ή}\\ f(1)&=f(-1)\end{aligned}$$

   και αφού η f είναι $1-1$, θα προκύπτει

   $$0=2\quad \text{ή}\quad 2=-1\quad \text{ή}\quad 1=2\quad \text{ή}\quad 1=-1,$$

   άτοπο σε κάθε περίπτωση, άρα $f(b)\neq 0$.

3. Για $x=b$, έχουμε:

   $$f(b)f(1-b)=f(b)\Leftrightarrow f(1-b)=1.$$

4. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = 0$. Τότε για $x = x_0$, έχουμε ότι:

$$f(x)f(1-x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x)f(1-x) = 0.$$

Για $x = 2, x = 3$ έχουμε

- $f(2) = 0$ ή $f(-1) = 0$ και
- $f(3) = 0$ ή $f(-2) = 0$,

οπότε

$$\begin{aligned} f(2) = f(x_0) \quad &\text{ή} \quad f(-1) = f(x_0) \quad \text{και} \\ f(3) = f(x_0) \quad &\text{ή} \quad f(-2) = f(x_0) \end{aligned}$$

δηλαδή αφού η f είναι $1-1$,

$$\begin{aligned} 2 = x_0 \quad &\text{ή} \quad -1 = x_0 \quad \text{και} \\ 3 = x_0 \quad &\text{ή} \quad -2 = x_0, \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} 2 = x_0 = 3 \quad &\text{ή} \quad 2 = x_0 = -2 \quad \text{ή} \\ -1 = x_0 = 3 \quad &\text{ή} \quad -1 = x_0 = -2, \end{aligned}$$

άτοπο σε κάθε περίπτωση, άρα δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$, δηλαδή το 0 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών, άρα $f(A) \neq \mathbb{R}$

Λύση 2 (Βασίλης Μαυροφρύδης)

2. Έστω ότι $f(b) = 0$ τότε για $x = 0$ παίρνουμε

$$f(0) = 0 \vee f(1) = 0 \Rightarrow b = 0 \vee b = 1$$

και για $x = 3$ έχουμε

$$f(3) = 0 \vee f(-2) = 0 \Rightarrow b = 3 \vee b = -2$$

άτοπο.

4. Έστω ότι η f παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές άρα θα υπάρχει πραγματικός k που η εικόνα του θα είναι το 0 για $x = k$ παίρνουμε $0 = f(b)$ άτοπο.

   Άρα το σύνολο τιμών δεν είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Λύση 3 (KARKAR)

2. Έστω $f(b) = 0$.

   Επειδή $f(1)f(0) = 0$, $f(1/2)f(1/2) = 0$ θα έχω $f(1/2) = 0$ και κάποιος από τους $f(1), f(0)$ ίσος με 0, άτοπο.

3. Προκύπτει άμεσα για $x = b$

4. Αν $f(x) = 0$ για κάποιο x τότε και $f(b) = 0$ άτοπο.

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Ροδόλφος Μπόρης)Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο f' με*

$$f(x + f'(x)) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1. *Δείξτε ότι η f' δεν μπορεί να μην έχει ρίζα*

2. *Δώστε παράδειγμα πολυωνυμικής συνάρτησης που επαληθεύει την σχέση (1)*

3. *Υποθέστε τώρα ότι η f' έχει δυο ρίζες a, b με $a < b$. Δείξτε ότι δεν μπορεί να υπάρχει u στο (a, b) με $f'(u) \neq 0$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=22417

Λύση 1 (Ροδόλφος Μπόρης) Ανάλυση της λύσης

1. Πρέπει να αναρωτηθείτε γιατί είναι τόσο πολύπλοκη η εκφώνηση του 1ου ερωτήματος και δεν έλεγε απλά ότι η $f'(x)$ έχει ρίζα. (Εννοούμε τουλάχιστον μια όταν δεν αναφέρεται κάτι άλλο)

   Διότι όταν ακούσετε ΔΕΝ . . . συνήθως πάμε με άτοπο (άρα η εκφώνηση θέλει να βοηθήσει παρά να μπερδέψει τα πράγματα) Ας το διατυπώσουμε: έστω ότι η $f'(x)$ δεν έχει ρίζα

   Πριν προχωρήσετε καλό είναι (όχι απαραίτητο) να γράψετε το προηγούμενο με 2 τρόπους συμβολικά. $f(x) \neq$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0$.

   Πρώτο πράγμα που έρχεται στο νου μας είναι το Θ.σταθ.προσήμου δεδομένου ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής. Τότε η $f'(x)$ θα είναι ή θετική ή αρνητική άρα η $f(x)$ θα είναι η γν. αύξουσα ή φθίνουσα. Δηλαδή γνήσια μονότονη άρα και $1-1$ σε κάθε περίπτωση

   Όμως f υπάρχει μόνον στην σχεση (1)

   Τώρα θέλει λίγη φαντασία να δείτε το $x + f'(x)$ σαν A και το x σαν B οπότε από $f(A) = f(B)$, $f : 1-1$ θα πάρετε

   $$A = B \Rightarrow x + f'(x) = x \Rightarrow f'(x) = 0$$

   για κάποιο x. Αντίφαση με την υπόθεση σας. Συνεπώς γυρνάτε κάπου στην αρχή, εκεί που είπατε ¨εστω ότι...¨ και αρνείστε αυτό που υποθέσατε. Άρα η $f'(x)$ έχει ρίζα

   Ένας δεύτερος τρόπος (θέλει λίγη περισσότερη φαντασία) είναι να δείτε εξ αρχής το $x + f'(x)$ σαν A και το x σαν B οπότε η σχέση (1) γίνεται $f(A) = f(B)$ που θυμίζει Rolle

   Εδώ είναι πιο δύσκολο να σκεφτείτε τι ρόλο θα παίξει το $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ εκτός από Θ.σταθ.προσήμου. Ο ρόλος του $f'(x) \neq 0$ είναι : το $[A, B]$ ή $[B, A]$ να είναι διάστημα και όχι σημείο $\forall x \in \mathbb{R}$

   Τότε ισχύει Rolle για την f πχ στο $[A, B]$ άρα $\exists \xi$: $f'(\xi) = 0$ ενώ έχετε υποθέσει ότι $f'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Άτοπο

2. Είναι ασυνήθιστο να ζητηθεί ¨ δώστε παράδειγμα ...¨. Τι κρύβεται πίσω από την ερώτηση; Προφανώς δεν ενδιαφερόμαστε για κάποια απόδειξη αλλά επιβραβεύουμε την παρατηρητικότητα.

   Η $f(x) = c$ είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού που επαληθεύει την (1)

   Αλλιώς αν ζητούσε ΟΛΑ τα πολυώνυμα f που επαληθεύουν την (1) θα ξεκινάγαμε να προσδιορίσουμε τον βαθμό των f. Κοιτάξτε σε τι φασαρία θα μπαίνατε

   Έστω $deg(f) = n > 2, deg(f') = n-1$ τότε $deg(x + f'(x)) = n-1, n > 2$ ή $0, 1, 2$. Τότε θα έπρεπε

   $$n(n-1) = n > 2 \text{ αδύνατο αρα}$$

   $$n = 0 \text{ και } f(x) = c$$

   $$n = 1 \text{ και } f(x) = ax + b, a \neq 0. \text{ Αδύνατο}$$

   $$n = 2 \text{ και } f(x) = ax^2 + bx + c...$$
   $$a = -1, b = 0, c = 0 \Rightarrow f(x) = -x^2...$$

3. Ξέρουμε ότι $f'(a) = f'(b) = 0$ Η διατύπωση πάλι είναι περίεργη αλλά βοηθά να ξεκινήσουμε το ερώτημα πάλι με άτοπο

Το διατυπώνουμε : Έστω ότι $\forall u \in (a,b) \quad f'(u) \neq 0$

Όπως και στο 1ο ερώτημα προκύπτει ότι η f είναι $1-1$ αλλά τώρα ενδιαφερόμαστε για το (a,b) και όχι όλο το $\mathbb{R}$. Αν λοιπόν δείξουμε ότι αν $y \in (a,b) \Rightarrow y + f'(y) \in (a,b)$ καταλήξαμε στο επιθυμητό άτοπο γιατί εκεί η f είναι $1-1$.

Η $f'(x)$ έχει σταθερό πρόσημο στο (a,b) μια που είναι συνεχής και δεν έχει ρίζα στο διάστημα αυτό πχ

$$f'(x) > 0 \tag{2}$$

(εδώ είναι επικίνδυνο να πάρουμε λάθος δρόμο και να ασχοληθούμε με την μονοτονία της f , δεν βγάζει πουθενά) άρα $a < x + f'(x)$ <? μας ενδιαφέρει να μην ξεπεράσουμε το b. Μάλιστα αρκεί μόνο ένα x να ο κάνει αυτό και βγάζουμε το άτοπο, δεν χρειάζεται να το κάνουν όλα τα x της $x + f'(x)$.

Δεν γνωρίζουμε όμως κάτι για την μονοτονία της $f'(x)$ ώστε να συμπεράνουμε με ανισότητες ούτε δίνεται κάτι σχετικό προκειμένου να δούμε πόσο κοντά στο a βρίσκεται η παράσταση $x + f'(x)$. ΚΟΝΤΑ; Κοντά σημαίνει όριο. (Αυτό κατά την γνώμη μου είναι το δυσκολότερο σημείο της άσκησης όπου η φαντασία είναι ο μόνος τρόπος να τροφοδοτηθεί η λογική). Οπότε

$$\lim_{x \to a+} (x + f'(x)) = a + f'(a) = a + 0 = a.$$

Άρα η $x + f'(x)$ βρίσκεται κοντά στο a οπότε είναι μικρότερη τουb. Αυστηρότερα

$$\text{υπάρχει } x_0 \in (a,b) : x_0 + f'(x_0) < b$$

και βέβαια όπως ξαναείπαμε πριν $a < x_0 + f'(x_0)$ Τελικά $x_0, x_0 + f'(x_0) \in (a,b)$ που η f είναι $1-1$ και ισχύει η (1) άρα

$$x_0 + f'(x_0) = x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

άτοπο λόγω της (2) που σημαίνει

$$f'(x) = 0, \forall x \in (a,b).$$

Αν είχαμε $f'(x) < 0$ θα κάναμε τα ίδια αλλά πηγαίνοντας στην άλλη άκρη δηλαδή στο b.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[4,10]$ με σύνολο τιμών $f(A) = [1,5]$ και $f(4) = 2, f(10) = 4$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά $\xi_1, \xi_2 \in (4,10)$ ώστε: $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=22505

Λύση (Βασίλης Κακαβάς) Σύμφωνα με το θεώρημα μεγίστης και ελάχιστης τιμής θα υπάρχουν $x_1,\ x_2 \in [4,\ 10]$ ώστε να ισχύει

$$1 = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = 5, \quad x \in [4,10]$$

και επειδή $1 < f(4) < 5$ και $1 < f(10) < 5$ τα $x_1,\ x_2 \in (4,\ 10)$, δηλαδή είναι εσωτερικά σημεία του διαστήματος, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα ισχύει ότι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

Αν $f(x_1) = 1, f(x_2) = 5$ έστω $x_1 < x_2$.

Απο το Θ. Ενδιαμέσων τιμών (ΘΕΤ) υπάρχουν

$$a, b \in (x_1, x_2) : f(a) = 2, f(b) = 4.$$

1. Αν $a < b$ με 2 Rolle στα $[4,a]$ και $[b,10]$ τελειώσαμε

2. Αν $b < a$ απο (ΘΕΤ) στο $[a,x_2], [x_1,b]$ υπάρχει

$$c > a : f(c) = 4 \text{ και } d < b : f(d) = 2$$

οπότε πάλι με 2 Rolle στα $[4,d]$ και $[c,10]$ τελειώσαμε.

(Φυσικά είναι αδύνατον $a = b$ διότι αλλιώς $2 = 4$).

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Έστω* $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ *συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει*

$$f^2(t)\le 1+2\int_0^t f(u)du,\ \text{για κάθε}\ t\in[0,1].$$

Να αποδειχθεί ότι $f(t)\le t+1$, *για κάθε* $t\in[0,1]$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=23072

Λύση (Βασίλης Μαυροφρύδης) Επειδή για την συνεχή f, είναι $f(t)\ge 0$ για κάθε $t\in[0,1]$ θα είναι και

$$2\int_0^t f(u)du\ge 0$$

οπότε και

$$1+2\int_0^t f(u)du>0$$

Έτσι έχουμε

$$f^2(t)\le 1+2\int_0^t f(u)du\Rightarrow$$

$$|f(t)|\le\sqrt{1+2\int_0^t f(u)du}\overset{f(t)\ge 0}{\Rightarrow}$$

$$f(t)\le\sqrt{1+2\int_0^t f(u)du}\Rightarrow$$

$$\frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(u)du}}\le 1\Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{1+2\int_0^t f(u)du}-t\right)'\le 0$$

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(t)=\sqrt{1+2\int_0^t f(u)du}-t,\ t\in[0,1]\ \text{με}\ g(0)=1.$$

Η g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[0,x]$ με $x\in(0,1]$ και είναι $g'(t)\le 0, \forall t\in[0,1]$. Από το συμπέρασμα του θεωρήματος μέσης τιμής λαμβάνουμε την ύπαρξη τουλάχιστον ενός $\xi\in(0,x)$ ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

$$=\frac{\sqrt{1+2\int_0^x f(u)du}-x-1}{x}$$

$$\le 0\overset{x\in(0,1]}{\Rightarrow}$$

$$\sqrt{1+2\int_0^x f(u)du}-x-1\le 0\Rightarrow$$

$$\sqrt{1+2\int_0^x f(u)du}\le x+1$$

που με αντικατάσταση στην δοθείσα δίνει

$$f(t)\le\sqrt{1+2\int_0^t f(u)du}\Rightarrow$$

$$f(t)\le t+1\ \text{για κάθε}\ t\in(0,1].$$

Παρατηρούμε ότι για $t=0$ ισχύει η ζητούμενη μιας και δίνει ίδια συνθήκη με την $f^2(t)\le 1+2\int_0^t f(u)du$. Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Ας είναι* f *μια συνεχής συνάρτηση στο* $[0,1]$ *ώστε να ισχύει*

$$\int_x^1 f(t)dt\ge\frac{1-x^2}{2}\ \text{για κάθε}\ x\in[0,1].$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 (f(x))^2dx\ge\int_0^1 xf(x)dx.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=2583

Λύση (Χρήστος Κυριαζής) Ολοκληρώνοντας τη δοθείσα έχω:

$$\int_0^1 \int_x^1 f(t)dt \geq \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx$$

Μετά παραγοντικής ολοκληρώσεως στο πρώτο μέλος λαμβάνω:

$$\int_0^1 (x)' \int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\left[x \int_x^1 f(t)dt\right]_0^1 + \int_0^1 x f(x)dx \geq \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 x f(x)dx \geq \frac{1}{3} \qquad (2)$$

Ισχύει ότι :

$$(f(x)-x)^2 \geq 0, \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow$$

$$f^2(x) - 2x f(x) + x^2 \geq 0, \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow$$

$$f^2(x) - x f(x) \geq x f(x) - x^2, \quad \forall x \in [0,1]$$

Ολοκληρώνοντας τώρα έχω:

$$\int_0^1 (f^2(x) - x f(x))dx \geq \int_0^1 x f(x)dx - \int_0^1 x^2 dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (f^2(x) - x f(x))dx \geq \int_0^1 x f(x)dx - \frac{1}{3}$$

$$\overset{(2)}{\geq} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Ακόμα

$$\int_0^1 (f^2(x) - x f(x))dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq \int_0^1 x f(x)dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο Μάγκος Θάνος) Να αποδειχθεί ότι καθεμιά από τις εξισώσεις:*

$$\sin(\cos x) = x \quad \textit{και} \quad \cos(\sin x) = x$$

έχει ακριβώς μία ρίζα. Ποια από τις δύο αυτές ρίζες είναι μεγαλύτερη;

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&p=116855#p116855

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαππάς - Σπύρος Καπελλίδης) Η εξίσωση $\sin(\cos x) = x$ αν έχει ρίζα, αυτή θα ανήκει στο $[-1, 1]$ αφού $\sin(\cos x) \in [-1, 1]$.
Θέτω λοιπόν

$$f(x) = \sin(\cos x) - x, \quad x \in [-1, 1].$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων $\sin(\cos x)$ (σύνθεση παραγωγίσιμων) και x (πολυωνυμική) με

$$f'(x) = -\sin x \cos(\cos x) - 1, x \in [-1, 1].$$

Όμως $f'(x) < 0, x \in [-1, 1]$ αφού $\sin x, \cos(\cos x) \in (-1, 1)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα έχει το πολύ μια ρίζα.

Αφού η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset [-1, 1]$ ως διαφορά των συνεχών $\sin(\cos x)$ (σύνθεση συνεχών) και x (πολυωνυμική) και

$$f(0) = \sin 1 > 0$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0,$$

οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, άρα και στο $(-1, 1)$, οπότε λόγω της μονοτονίας θα είναι μοναδική.

Η εξίσωση $\cos(\sin x) = x$ αν έχει ρίζα, αυτή θα ανήκει στο $[-1, 1]$ αφού $\cos(\sin x) \in [-1, 1]$.
Θέτω λοιπόν

$$g(x) = \cos(\sin x) - x, \quad x \in [-1, 1].$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων $\cos(\sin x)$ (σύνθεση παραγωγίσιμων) και x (πολυωνυμική) με

$$f'(x) = -\cos x \sin(\sin x) - 1, \quad x \in [-1, 1].$$

Όμως $g'(x) < 0, x \in [-1, 1]$ αφού $\cos x, \sin(\sin x) \in (-1, 1)$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα, άρα έχει το πολύ μια ρίζα.

Αφού η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset [-1, 1]$ ως διαφορά των συνεχών $\cos(\sin x)$ (σύνθεση συνεχών) και x (πολυωνυμική) και

$$g(0) = 1 > 0$$
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0,$$

οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $g(x) = 0$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, άρα και στο $(-1, 1)$, οπότε λόγω της μονοτονίας θα είναι μοναδική.

Ας είναι x_1 η ρίζα της πρώτης και x_2 η ρίζα της δεύτερης. Έχουμε

$$x_1 = \sin(\cos x_1) = |\sin(\cos x_1)| < |\cos x_1| = \cos x_1,$$

$$\text{δηλαδή} \qquad x_1 < \cos x_1 \tag{3}$$

και

$$0 < \sin x_2 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$
$$\cos(\sin x_2) > \cos x_2 \Rightarrow$$
$$x_2 = \cos(\sin x_2) > \cos x_2,$$

$$\text{δηλαδή} \qquad x_2 > \cos x_2. \tag{4}$$

Αν $x_1 \geq x_2$, τότε

$$x_1 \overset{(3)}{<} \cos x_1 \leq \cos x_2 \overset{(4)}{<} x_2 \Rightarrow x_1 < x_2,$$

άτοπο.
Άρα $x_1 < x_2$.

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και $w \neq 2$ για τους οποίους ισχύουν*

$$|z-1| = 1 \quad \textit{και} \quad w = \frac{2z-1}{z+1}.$$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - \sqrt{|w| - x}$.

1. *Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f,*
2. *Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται,*
3. *Να βρείτε το σύνολο τιμών της f,*
4. *Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 f^{-1}(x)\right)$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&p=113735#p113735

Λύση (Μάκης Χατζόπουλος)

1. Εύρεση του μέτρου w :

   Έχουμε
   $$w = \frac{2z-1}{z+1} \Leftrightarrow z = \frac{w+1}{2-w},$$
   άρα η δεδομένη σχέση γίνεται,
   $$\begin{aligned} &|z-1| = 1 \Leftrightarrow \left|\tfrac{w+1}{2-w} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow |2w-1| = |w-2| \\ &\Leftrightarrow (2w-1)(2\overline{w}-1) = (w-2)(\overline{w}-2) \\ &\Leftrightarrow w \cdot \overline{w} = 1 \\ &\Leftrightarrow |w| = 1 \end{aligned}$$
   οπότε το πεδίο ορισμού είναι $D_f = (0, 1]$

2. Η συνάρτησή μας είναι: $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$, οπότε για κάθε $x \in (0,1)$ έχουμε
   $$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0,$$
   (προκύπτει απλά και με τον ορισμό) άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της άρα αντιστρέφεται.

3. Βρίσκουμε τα όρια ή τιμές στα άκρα του πεδίου ορισμού της f, έχουμε,
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x - \sqrt{1-x}\right) = -\infty$$
   και
   $$f(1) = \ln 1 - \sqrt{1-1} = 0$$
   και επειδή η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο διάστημα αυτό, παίρνουμε
   $$f(\Delta) = (-\infty, 0].$$

4. (Εκτός ύλης). Η αντίστροφη της f είναι συνεχής (αυτό δεν είναι εκτός ύλης·) με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0]$ και σύνολο τιμών το $(0, 1]$, επίσης
   $$f(1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 1$$
   δηλαδή
   $$\lim_{x\to 0} f^{-1}(x) = 1.$$
   Έπεται ότι το ζητούμενο όριο είναι
   $$\lim_{x\to 0}\left(x^2 \cdot f^{-1}(x)\right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι τέτοιες ώστε*

$$f(0) = -1 \quad \textit{και}$$

$$e^{-x} f'(x) = f^2(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&p=113616

Λύση 1 (Σπύρος Καπελλίδης) Κατ΄ αρχάς, λόγω της αρχικής συνθήκης δεν μπορεί να είναι λύση η μηδενική συνάρτηση. Συνεπώς υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) \neq 0$.

Λόγω συνέχειας της f θα υπάρχει διάστημα J που περιέχει το x_0 ώστε το $f(x)$ να είναι ομόσημο του $f(x_0)$ για κάθε $x \in J$.

Ονομάζω I το μεγαλυτέρου μήκους διάστημα που έχει την παραπάνω ιδιότητα. Τότε

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = e^x, \ \forall x \in I$$
$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = e^x, \ \forall x \in I$$
$$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{e^x + c}, \ \forall x \in I$$

Αν υποθέσουμε ότι κάποιο από τα άκρα του I είναι πεπερασμένο, έστω a, τότε προφανώς $f(a) = 0$. Αλλά

$$0 = f(a) = \lim_{x\to a} -\frac{1}{e^x + c},$$

άτοπο. Άρα $I = \mathbb{R}$ και από την αρχική συνθήκη βρίσκουμε $c = 0$.

Δηλαδή $f(x) = -e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, που επαληθεύει τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Λύση 2 (Βασίλης Μαυροφρύδης)

$$\begin{aligned}
e^{-x} f'(x) = f^2(x) &\Leftrightarrow \\
f'(x) - e^x f(x)\cdot f(x) = 0 &\Leftrightarrow \\
e^{\int_0^x e^t f(t)dt} f'(x) - \left(e^{\int_0^x e^t f(t)dt}\right)' \cdot f(x) = 0 &\Leftrightarrow \\
\left(\frac{f(x)}{e^{\int_0^x e^t f(t)dt}}\right)' = 0 &\Leftrightarrow \\
\frac{f(x)}{e^{\int_0^x e^t f(t)dt}} = c.&
\end{aligned}$$

Για $x = 0$ λαμβάνουμε $c = -1$. Έτσι έχουμε

$$\frac{f(x)}{e^{\int_0^x e^t f(t)dt}} = -1 \Leftrightarrow f(x) = -e^{\int_0^x e^t f(t)dt} < 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επιστρέφουμε στην εξ υποθέσεως δοσμένη σχέση και έχουμε

$$\begin{aligned}
e^{-x} f'(x) = f^2(x) &\Leftrightarrow \\
\frac{f'(x)}{f^2(x)} = e^x &\Leftrightarrow \\
\left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = (e^x)' &\Leftrightarrow \\
-\frac{1}{f(x)} = e^x + m.&
\end{aligned}$$

Για $x = 0$ λαμβάνουμε $m = 0$ Είναι λοιπόν

$$-\frac{1}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = -e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$$

Το μέλος Zarifis έδωσε στην ίδια διεύθυνση μια προσέγγιση που με την προσθήκη του Ροδόλφου Μπόρη στην ίδια διεύθυνση αποτελεί πλήρη απάντηση στην προταθείσα άσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης)* *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με*

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

1. Για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\lim_{x\to x_0}\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = \int_0^1 e^{-x_0^2(1+t^2)}\,dt.$$

2. Για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$g'(x_0) = -2e^{-x_0^2}\int_0^{x_0} e^{-t^2}\,dt$$

και συμπεράνετε ότι

$$f(x)+g(x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

3. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ και συμπεράνετε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&p=113616

Λύση (Ροδόλφος Μπόρης)

1. Έστω τυχαίο $t\in[0,1]$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$A_x = \min\{x^2(1+t^2), x_0^2(1+t^2)\}\text{και}$$

$$B_x = \max\{x^2(1+t^2), x_0^2(1+t^2)\}.$$

Από το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση e^{-x} στο διάστημα $[A_x, B_x]$ έχουμε ότι

$$-e^{-\xi} = \frac{e^{-x^2(1+t^2)} - e^{-x_0^2(1+t^2)}}{x^2(1+t^2) - x_0^2(1+t^2)} \Rightarrow$$

$$e^{-x^2(1+t^2)} - e^{-x_0^2(1+t^2)} = \frac{e^{-x^2(1+t^2)} - e^{-x_0^2(1+t^2)}}{x^2(1+t^2) - x_0^2(1+t^2)} \Rightarrow$$

για κάποιο $\xi = \xi(t,x)\in(A_x,B_x)$.

Έπεται ότι

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt - \int_0^1 e^{-x_0^2(1+t^2)}dt\right|$$

$$\leqslant \int_0^1 \left|e^{-x^2(1+t^2)} - e^{-x_0^2(1+t^2)}dt\right|$$

$$= |x^2 - x_0^2|\int_0^1 e^{-\xi}(1+t^2)dt$$

$$\leqslant 2|x^2 - x_0^2| \overset{x\to x_0}{\to} 0,$$

άρα

$$\lim_{x\to x_0}\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = \int_0^1 e^{-x_0^2(1+t^2)}\,dt.$$

2. Αρχικά έχουμε ότι

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\cdot \cdot\frac{e^{-x^2(1+t^2)} - e^{-x_0^2(1+t^2)}}{x-x_0}\,dt.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = -2x_0e^{-x_0^2}\int_0^1 e^{-(x_0t)^2}\,dt.$$

Η απόδειξη για το δεξί πλευρικό όριο είναι εντελώς όμοια.

- Αν $x_0 \le 0$, έχουμε $x\to x_0$ με $x<0$. Όπως και στο προηγούμενο υποερώτημα, για τυχαίο $t\in[0,1]$, από το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού στη συνάρτηση e^{-x} στο διάστημα $\left[x_0^2(1+t^2), x^2(1+t^2)\right]$ έχουμε ότι

$$-e^{-\xi} = \frac{e^{-x^2(1+t^2)} - e^{-x_0^2(1+t^2)}}{x^2(1+t^2) - x_0^2(1+t^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{e^{-x^2(1+t^2)} - e^{-x_0^2(1+t^2)}}{x-x_0} = -e^{-\xi}(x+x_0)(1+t^2)$$

για κάποιο

$$\xi = \xi(t,x)\in\left(x_0^2(1+t^2), x^2(1+t^2)\right).$$

Όμως η e^{-x} είναι γνησίως φθίνουσα και

$$-(x+x_0) > 0,$$

άρα

$$\begin{aligned}-e^{-x^2(1+t^2)}(x+x_0)(1+t^2) &< \\ -e^{-\xi}(x+x_0)(1+t^2) &< \\ -e^{-x_0^2(1+t^2)}(x+x_0)(1+t^2),&\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}-e^{-x^2(1+t^2)}(x+x_0)(1+t^2) &< \\ \frac{e^{-x^2(1+t^2)} - e^{-x_0^2(1+t^2)}}{x-x_0} &< \\ -e^{-x_0^2(1+t^2)}(x+x_0)(1+t^2)&\end{aligned}$$

και ολοκληρώνοντας

$$-(x+x_0)\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt < \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{e^{-x^2(1+t^2)}-e^{-x_0^2(1+t^2)}}{x-x_0}dt <$$

$$-(x+x_0)\int_0^1 e^{-x_0^2(1+t^2)}dt \qquad (5)$$

Παίρνοντας όρια για $x \to x_0^-$, από το κριτήριο παρεμβολής και το ερώτημα 1, έπεται ότι

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = -2x_0e^{-x_0^2}\int_0^1 e^{-(x_0t)^2}\,dt.$$

- Αν $x_0 > 0$, έχουμε την ίδια απόδειξη με την παραπάνω, απλά οι ανισότητες στην (5) έχουν την αντίθετη φορά.

Έπεται συνολικά λοιπόν ότι για $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt \\ &\overset{xt=u}{=} -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du. \end{aligned}$$

Αφού τώρα η e^{-x^2} είναι συνεχής, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα από το 2 θα πάρουμε

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \\ &\quad - 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du \\ &= 0, \end{aligned}$$

από όπου έπεται ότι

$$f(x)+g(x) = c \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Όμως

$$\begin{aligned} c &= f(0)+g(0) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &\overset{t=\tan x}{=} \int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} 1\,dx \\ &= \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

άρα

$$f(x)+g(x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

3. Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\le g(x) \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \\ &\le \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+0)}}{1+t^2}\,dt \\ &= e^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= e^{-x^2}\frac{\pi}{4} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Από το 2 όμως, θα είναι και $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x) = \frac{\pi}{4}$, άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-x^2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$, άρα $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Επιμελητής: Σπύρος Καπελλίδης

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Αναστάσης Κοτρώνης) Βρείτε το*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2\ln x} - x}{(\ln x)^x + x}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=78536

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Αφού για $x > e$ έχουμε $2\ln x > 2 > 1$, ισχύει $x^{2\ln x} - x > 0$. Άρα

$$0 < \frac{x^{2\ln x} - x}{(\ln x)^x + x} \le \frac{x^{2\ln x}}{(\ln x)^x + x} \le \frac{x^{2\ln x}}{(\ln x)^x}\ (*).$$

Για $x \ge e^e$ είναι $\ln x \ge e$ οπότε το τελευταίο κλάσμα στην $(*)$ είναι $< \dfrac{x^{2\ln x}}{e^x}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι το δεξί μέλος τείνει στο 0 καθώς $x \to +\infty$. Παίρνοντας λογάριθμο του δεξιού μέλους, αρκεί να δείξουμε ότι $2(\ln x)^2 - x \to -\infty$. Αλλά αυτό είναι απλό (υπάρχουν πολλοί τρόποι, π.χ. αφού πρώτα δείξουμε με l' Hospital ότι $\dfrac{2(\ln x)^2 - x}{x} \to -1$.

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς) Έστω τρίγωνο ABC και I το έγκεντρό του. Οι BI, CI τέμνουν τις AC, AB στα σημεία B', C' αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το $AB' \cdot AC'$ είναι μεγαλύτερο , ίσο ή μικρότερο του AI^2 αν και μόνον αν η $\hat{A}$ είναι αμβλεία , ορθή ή οξεία αντίστοιχα.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=19524

Λύση 1 (Βαγγέλης Μουρούκος) Είναι γνωστό ότι $\boxed{AB' = \dfrac{bc}{a+c}}$ και $\boxed{AC' = \dfrac{bc}{a+b}}$.

Επίσης, αν φέρουμε $IK \perp AB$, τότε είναι

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{AK}{AI} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{A}{2} = \frac{s-a}{AI}} \qquad (6)$$

όπου s η ημιπερίμετρος του τριγώνου ABC.

Εξάλλου, από το Νόμο των Συνημιτόνων έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} \Rightarrow \\ \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) προκύπτει ότι:

$$\boxed{AI^2 = \frac{bc(s-a)}{s}}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} &AB' \cdot AC' < AI^2 \Leftrightarrow \frac{AB' \cdot AC'}{AI^2} < 1 \Leftrightarrow \\ &\frac{\frac{b^2c^2}{(a+b)(a+c)}}{\frac{bc(s-a)}{s}} < 1 \Leftrightarrow \\ &\frac{bcs}{(a+b)(a+c)(s-a)} < 1 \Leftrightarrow \\ &bc(a+b+c) < (a+b)(a+c)(b+c-a) \Leftrightarrow \\ &\cdots \Leftrightarrow \\ &a^3 < ab^2 + ac^2 \Leftrightarrow \\ &a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \\ &\hat{A} < 90^\circ. \end{aligned}$$

Όμοια εξετάζονται και οι άλλες δύο περιπτώσεις.

Λύση 2 (Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς) Μια λύση καθαρά γεωμερτική, χωρίς τριγωνομετρικές γνώσεις.

Αν AD εσωτερική διχοτόμος και I το έγκεντρο του τριγώνου ABC , τότε από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ABD προκύπτει ότι

$$AI = \frac{cAD}{BD + c}.$$

Ως γνωστόν ισχύει

$$BD = \frac{ac}{b+c}.$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$AI = \frac{AD\,(b+c)}{a+b+c} = \frac{AD\,(b+c)}{2s}.$$

Άρα

$$AI^2 = \frac{(b+c)^2}{(2s)^2} AD^2.$$

Τον παλιό καιρό τα παιδιά μάθαιναν ότι

$$AD^2 = \frac{4bcs\,(s-a)}{(b+c)^2}.$$

Αυτό θα μπορούσε να διδάσκεται και τώρα, η απόδειξη δεν είναι κάτι δύσκολο.

Άρα αν γίνει αντικατάσταση και απλοποιήσεις προκύπτει

$$AI^2 = \frac{bc\,(s-a)}{s}.$$

Από κει και μετά η λύση μου είναι ολόιδια με την όμορφη λύση του Βαγγέλη Μουρούκου.

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Αν $a > 1$, να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ για τις οποίες*

1. $f(x) \geq a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ *και*

2. $f(x+y) \geq f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=21529

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Θέτουμε $g(x) = \log_a f(x)$, οπότε οι συνθήκες γράφονται

$$g(x) \geq x \tag{8}$$

$$g(x+y) \geq g(x) + g(y) \tag{9}$$

Θέτοντας στις (8),(9) $x = y = 0$ λαμβάνουμε

$$0 \geq g(0) \geq 0$$

άρα

$$\boxed{g(0) = 0} \tag{10}$$

Στην (9) θέτουμε $y \to -x$ και λόγω της (10) λαμβάνουμε $g(x) + g(-x) \leq 0$ δηλαδή $-g(-x) \geq g(x)$, οπότε λόγω της (1) έχουμε

$$-g(-x) \geq x \Rightarrow g(-x) \leq -x.$$

Στην τελευταία θέτουμε $x \to -x$ οπότε έχουμε $g(x) \leq x$ Αυτή, σε συνδυασμό με την (8) δίνει $g(x) = x$ για κάθε x. Άρα, η απάντηση στο αρχικό πρόβλημα είναι η $f(x) = a^x$. **Λύση 2** (Σπύρος Καπελλίδης) Και μία δι-

αφορετική προσέγγιση: Η 1. για $x = 0$ δίνει

$$f(0) \geq 1 \tag{11}$$

Η 2. για $x = y = 0$ δίνει

$$\begin{aligned} f(0) &\geq f^2(0) \Rightarrow \\ f^2(0) - f(0) &\leq 0 \Rightarrow \\ f(0)(f(0) - 1) &\leq 0 \Rightarrow \\ f(0) &\leq 1 \end{aligned} \tag{12}$$

Από τις (11) και (12) παίρνουμε $f(0) = 1$.

Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) > a^{x_0}$, τότε από τη 2. έχουμε

$$1 = f(0) = f(x_0 - x_0) \geq f(x_0)f(-x_0) > a^{x_0}a^{-x_0} = 1,$$

άτοπο.
Άρα από τη 2. έχουμε $f(x) = a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση*

$$2^{x+1} = 2^{[x]} + 2^{\{x\}}.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=20461

Λύση 1 (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Αν γράψουμε $x = [x] + \{x\}$ τότε η εξίσωση γράφεται

$$2^{[x]}\left(2 \cdot 2^{\{x\}} - 1\right) = 2^{\{x\}} \tag{13}$$

όπου $0 \leq \{x\} < 1$

Επίσης η σχέση (13) γράφεται:

$$2^{[x]} = \frac{2^{\{x\}}}{2 \cdot 2^{\{x\}} - 1} \tag{14}$$

Αν θεωρήσουμε $2^{\{x\}} = y$ τότε $1 \leq y < 2$ και ας είναι

$$f(y) = \frac{y}{2y-1} \text{ με } y \in [1, 2).$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2)$ και μάλιστα το σύνολο τιμών της είναι το

$$f([1, 2)) = \left(\frac{2}{3}, 1\right].$$

Το $[x]$ παίρνει ακέραιες τιμές και έτσι το αριστερό μέλος της (14) για $[x] \geq 1$ δίνει $2^{[x]} \geq 2$ ενώ για $[x] \leq -1$ παίρνουμε $2^{[x]} \leq 0$ πράγμα που δε μπορεί να συμβαίνει λόγω του συνόλου τιμών της f που βρήκαμε παραπάνω.

Άρα $[x] = 0$ και η εξίσωση γράφεται $2^{\{x\}} = 1$

οπότε $\{x\} = 0$ κι έτσι η μοναδική λύση της αρχικής είναι η $x = 0$.

Λύση 2 (Σωτήρης Λουρίδας) Έχουμε

$$x \geqslant 0 \Rightarrow 2^x - 2^{[x]} = 2^{\{x\}} - 2^x \text{με}$$

$$2^x - 2^{[x]} \geqslant 0 \geqslant 2^{\{x\}} - 2^x \Rightarrow$$
$$x = \{x\} = [x] \Rightarrow$$
$$x = 0.$$

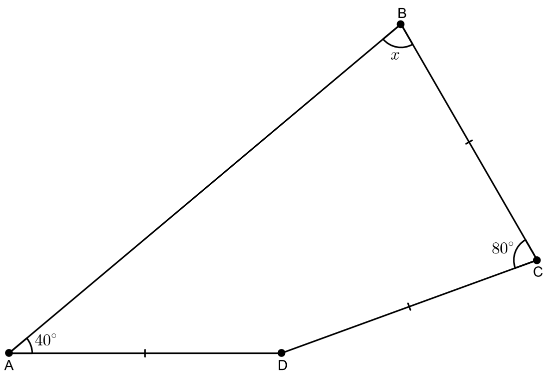
$$x < 0 \Rightarrow 2^{x+1} \geqslant 2\sqrt{2^{[x]+\{x\}}} \Rightarrow 2^x \geqslant \sqrt{2^x} \Rightarrow 2^x \geqslant 1$$

άτοπο.

Τελικά $x = 0$.

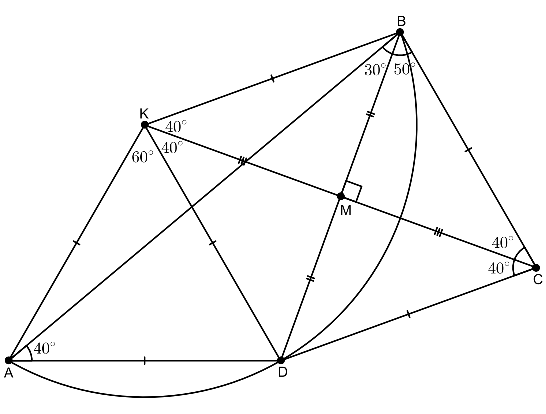
Επιμελητής: Κώστας Βήττας

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο Δημήτρης Μυρογιάννης)* *Έστω το τετράπλευρο $ABCD$ στο οποίο οι γωνίες $\angle BCD$, $\angle DAB$ έχουν μέτρο 80^o, 40^o, αντιστοίχως. Αν επιπλέον ισχύει ότι $BC = CD = DA$, να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\angle ABC = x$.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=19142

Λύση 1 (Στάθης Κούτρας) Έστω K, το συμμετρικό του C ως προς το μέσον M της BD και το παραλληλόγραμμο $KBCD$ είναι ρόμβος λόγω $BC = CD$ και άρα, οι διαγώνιές του αλληλοδιχοτομούνται κάθετα και διχοτομούν τις απέναντι γωνίες του.



Επομένως ισχύει $\angle BCK = \dfrac{\angle BCD}{2} = 40^o \Longrightarrow$ $\boxed{\angle DBC = 50^o}$, (1)

Λόγω του ρόμβου $KBCD$ ισχύει $\angle DKB = \angle BCD \Longrightarrow$ $\boxed{\angle DKB = 80^o \ \ ,(2)}$ και

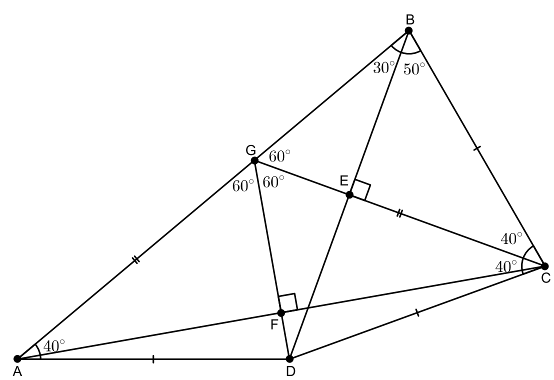
$\boxed{KB = KD = BC = CD = DA \ \ ,(3)}$

Από (2) και $\angle DAB = 40^o$, προκύπτει ότι ο κύκλος $(K,\ KB)$ περνάει από το A, αλλά και από το D λόγω $KB = KD$.

Το τρίγωνο $\triangle\ KAD$ είναι ισόπλευρο λόγω $KA = KD = CD = AD$ και άρα έχουμε $\angle AKD = 60^o \Longrightarrow$ $\boxed{\angle ABD = 30^o \ \ ,(4)}$

Άρα, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 30^o + 50^o = 80^o \Longrightarrow$ $\boxed{x = 80^o}$ και το ζητούμενο έχει βρεθεί.

Λύση 2 (Δημήτρης Μυρογιάννης) Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\angle DCB$ η οποία τέμνει την AB στο σημείο G και την BD (κάθετα λόγω του ισοσκελούς τριγώνου $\triangle\ CDD$), στο σημείο E.

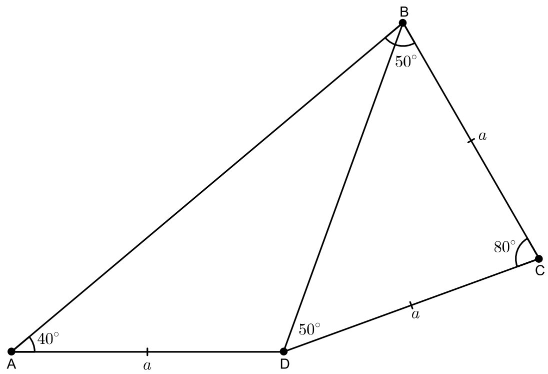


Οι γωνίες $\angle GAD$, $\angle GCD$ έχουν μέτρο 40^o η κάθε μία και από $CD = DA$, προκύπτει ότι η GD είναι μεσοκάθετη ευθεία του τμήματος AC και διχοτομεί τη γωνία $\angle AGC$.

Έτσι έχουμε $\angle AGD = \angle DGC = \angle CGB = 60^o$, (1)

Από (1) στο τρίγωνο $\triangle\ BGC$ προκύπτει $\angle ABC = 180^o - \angle BCG - \angle CGB = 80^o \Longrightarrow x = 80^o$ και το ζητούμενο έχει βρεθεί.

Λύση 3 (Γιώργος Ρίζος) Φέρνουμε την BD.



Στο τρίγωνο $\triangle BDC$ είναι $\angle DCB = 80^o$ και $BC = DC = a$ $\Longrightarrow \angle DBC = \angle CDB = 50^o$

Από Ν. Ημιτόνων:

$\dfrac{BD}{\eta\mu 80^o} = \dfrac{BC}{\eta\mu 50^o} \Longrightarrow \frac{BD}{a} = \frac{\eta\mu 80^o}{\eta\mu 50^o} = \frac{2\eta\mu 40^o \cdot \sigma\upsilon\nu 40^o}{\sigma\upsilon\nu(90^o - 50^o)} = 2\eta\mu 40^o$

Στο τρίγωνο $\triangle ABD$ από Ν. Ημιτόνων:

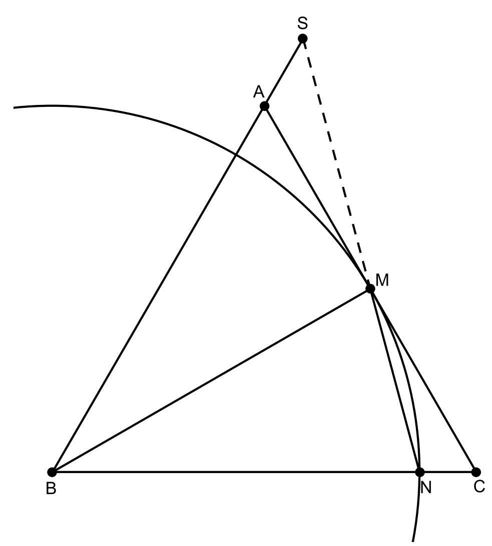
$\frac{BD}{\eta\mu 40^o} = \frac{AD}{\eta\mu\angle ABD} \Longrightarrow \frac{BD}{a} = \frac{\eta\mu 40^o}{\eta\mu\angle ABD}$

Οπότε, αφού $\angle ABD < 140^o$, είναι:

$\frac{\eta\mu 40^o}{\eta\mu\angle ABD} = 2\eta\mu 40^o \Longrightarrow \eta\mu\angle ABD = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \angle ABD = 30^o$

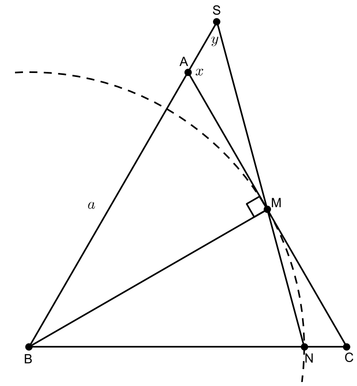
Οπότε, $x = 50^o + 30^o = 80^o$

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει ο KARKAR) Στο ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle ABC$, M είναι το μέσον της AC. Ο κύκλος (B, BM) τέμνει τη βάση BC στο σημείο έστω N. Η ευθεία NM τέμνει την προέκταση της BA στο σημείο έστω S. Υπολογίστε τις γωνίες, τις πλευρές και το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AMS$.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=20616

Λύση 1 (Κώστας Δόρτσιος) Για τις πλευρές:



Έστω πως η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου είναι a $\Longrightarrow AM = \dfrac{a}{2}$

Τότε : $BM = BN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ και $NC = a - a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο $\triangle ABC$ με διατέμνουσα την ευθεία NMS

και άρα : $\dfrac{BN}{NC} \cdot \dfrac{CM}{MA} \cdot \dfrac{AS}{SB} = 1$

$\Longrightarrow \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a(\frac{2-\sqrt{3}}{2})} \cdot \dfrac{AS}{AS + a} \Longrightarrow AS = a\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$,(1)

Την SM την υπολογίζουμε από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $\triangle SBM$ και είναι $SM = a\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,(2)

Για τις γωνίες:

$\angle x = 180^o - 60^o = 120^o$,(3)

Πάλι από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο (ή και των ημιτόνων) βρίσκουμε :

$\cos\angle y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \angle y = 45^o$,(4)

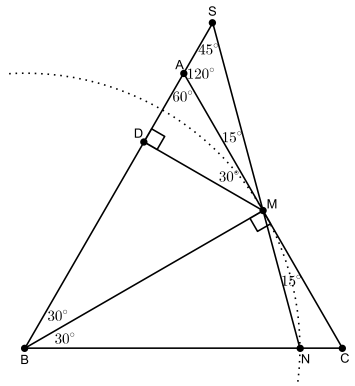
και τέλος : $\angle SMA = 180^o - 120^o - 45^o = 15^o$,(5)

Για το εμβαδόν

Επειδή τα τρίγωνα $\triangle BMA$ και $\triangle SMA$ έχουν κοινό ύψος θα είναι :

$\dfrac{(ASM)}{SA} = \dfrac{(AMB)}{AB} \Longrightarrow (ASM) = \dfrac{SA}{AB}(AMB) = ... = \dfrac{3-\sqrt{3}}{32}a^2$ (λόγω της (1) και των στοιχείων του αρχικού τριγώνου)

Λύση 2 (Μιχάλης Νάννος) 1) Η BM είναι διάμεσος - ύψος - διχοτόμος του ισοπλεύρου $\triangle ABC$ πλευράς a, οπότε (από κατακορυφήν και γωνία χορδής - εφαπτομένης) $\angle NMC = \angle SMA = \dfrac{\angle NBM}{2} = 15^o$ και εύκολα $\angle MAS = 120^o$ και $\angle MSA = 45^o$



2) Φέρω την $MD \perp SB$. Θα είναι $AMD(60^o, 30^o, 90^o)$ και εφόσον $AM = \dfrac{a}{2}$, θα ισχύει $AD = \dfrac{a}{4}$ και από Πυθαγόρειο (ή από $\sigma\upsilon\nu 30^o$) έχουμε $MD = DS = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Έτσι, $AS = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} - \dfrac{a}{4} = \dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$ και από Πυθαγόρειο στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $\triangle SDM$ προκύπτει $SM = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

3) $(AMS) = \dfrac{AS \cdot MD}{2} = \dfrac{a^2\left(3 - \sqrt{3}\right)}{32}$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί (Seniors)

Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Συνδυαστική

Επιμελητής: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Έστω $n \geq 17$ ακέραιος. Να δειχθεί ότι κάθε τετράγωνο μπορεί να διαμεριστεί σε n μικρότερα τετραγωνάκια.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=14393

Λύση (Γιώργος Βλαχος) Για $n = 1, 4, 9$ μπορούμε εύκολα να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε n ίσα τετράγωνα. Αν καταφέρουμε να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε m τετράγωνα και ένα άλλο σε n τετράγωνα, τότε χωρίζουμε ένα τυχαίο τετράγωνο σε m μικρότερα και ένα από αυτά τα m σε n τετράγωνα, παίρνοντας μια διαμέριση σε $m+(n-1)$ τετράγωνα. Άρα κάθε τετράγωνο μπορεί να διαμεριστεί σε $1 + 3k + 8l$ τετράγωνα, όπου k, l φυσικοί. Για $l = 0, 1, 2$ παίρνουμε ότι ο $1 + 3k + 8l$ παίρνει όλες τις τιμές n με $n \geq 17$ (αφού καλύπτει όλα τα υπόλοιπα $\pmod 3$). Άρα κάθε τετράγωνο μπορεί να διαμεριστεί σε $n \geq 17$ μικρότερα τετραγωνάκια.

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Αθανάσιος Κοντογιώργης) Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα P, με πραγματικούς συντελεστές, τέτοια ώστε $P(0) = 0$ και $P\left((x+1)^3\right) = (P(x)+1)^3$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=15622

Λύση (Παναγιώτης Λώλας) Για $x = 0$ είναι $P(1) = 1$. Ορίζουμε μία ακολουθία με $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = (x_n + 1)^3$ για $n \geq 1$. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $P(x_n) = x_n$ και $x_n > 0$ για κάθε $n \geq 1$. Η τελευταία σχέση δίνει $x_{n+1} > x_n$ για κάθε $n \geq 1$, κι άρα οι όροι της ακολουθίας $\{x_n\}_{n\geq 1}$ είναι σταθερά σημεία του P, οπότε και ρίζες του πολυωνύμου $P(x) - x$. Το τελευταίο πρέπει, αφού έχει άπειρες ρίζες, να είναι το μηδενικό, οπότε $P(x) = x$.

Επιμελητής: Κώστας Βήττας

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο Σωκράτης Λυράς) Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ με $AB = AD$ και $\angle B = \angle D = 90^o$. Στις πλευρές DC, BC, έστω τα σημεία E, Z αντιστοίχως, ώστε οι AE, DZ να είναι κάθετες. Να αποδειχθεί ότι $BE \perp AZ$.*

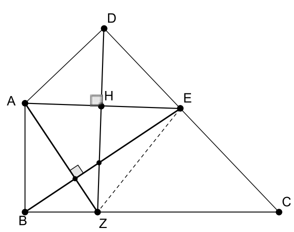
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=22060

Λύση 1 (Γρηγόρης Κακλαμάνος) Για να ισχύει το ζητούμενο αρκεί (από γνωστό κριτήριο καθετότητας) να αποδειχθεί ότι $(AE)^2 - (AB)^2 = (ZE)^2 - (ZB)^2 \quad ,(1)$
Από $AE \perp DZ \implies (AZ)^2 - (AD)^2 = (ZE)^2 - (DE)^2 \quad ,(2)$

Από (2) $\implies (AB)^2 + (ZB)^2 - (AD)^2 = (ZE)^2 - (AE)^2 + (AD)^2 \quad ,(3)$

Από (3) και $AB = AD \implies$ (1) και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Λύση 2 (Σεραφείμ Τσιπέλης) Αντιστρέφουμε τα πάντα με πόλο αντιστροφής το σημείο A και δύναμη αντιστροφής $w = (AB)^2 = (AD)^2$.

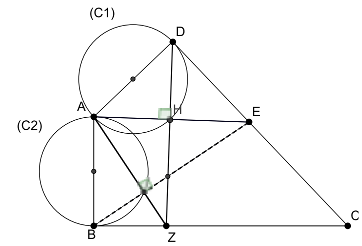


Τότε οι ευθείες BC και DC αντιστρέφονται στους κύκλους C_1 και C_2 , διαμέτρων AD και AB αντίστοιχα, το σημείο E στο E' (τομή του C_1 με την AE) και λόγω ορθής γωνίας στο E', τα D, E' και Z είναι συνευθειακά.

Αν Z' είναι το αντίστροφο του Z, τότε το Z' βρίσκεται στον κύκλο C_2, διότι είναι σημείο της BC.

Όμως το τετράπλευρο $ABZE'$ είναι εγγράψιμο (φανερά), άρα τα σημεία B, Z' και E είναι συνευθειακά (ως αντίστροφα σημεία εγγραψίμου τετραπλεύρου), που σημαίνει ότι η BE τέμνει κάθετα την AZ.

Λύση 3 (Κώστας Ρεκούμης) Έστω E', η τομή των AE, DZ και EZ', η κάθετη στην AZ (βλέπε το σχήμα της λύσης 2).



Αρκεί να δείξω ότι η BZ' είναι κάθετη στην AZ, που προκύπτει από τις προφανείς ισότητες : $(AZ')(AZ) = (AE')(AE) = (AD)^2 = (AD)^2 = (AB)^2$

Λύση 4 (Κώστας Ρεκούμης) Θεωρούμε τον κύκλο τον $(A, AD = AB)$, όπου οι ED, ZB είναι εφαπτόμενές του και ισχύει $DZ \perp AE$.

Έτσι, έχουμε ότι η πολική του E ως προς αυτόν τον κύκλο είναι η DZ και άρα, η πολική του Z ως προς τον ίδιο κύκλο, είναι η BE.

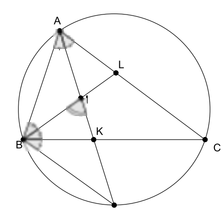
Άρα, συμπεραίνεται ότι $BE \perp AZ$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς) Αν I είναι έγκεντρο του τριγώνου $\triangle ABC$ και οι ευθείες IA, IB, IC τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του στα σημεία D, E, Z αντιστοίχως, αποδείξτε ότι*

$$\frac{IA}{ID} + \frac{IB}{IE} + \frac{IC}{IZ} \geq 3$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=22976

Λύση 1 (Στράτης Αντωνέας) Το τρίγωνο $\triangle BID$ είναι ισοσκελές, αφού $\angle BID = \angle IBD = \dfrac{\angle A + \angle B}{2}$, οπότε $ID = BD$.



Τα τρίγωνα $\triangle BKD$, $\triangle ABD$ είναι όμοια και άρα :

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AB}{BK} \implies \frac{AI + ID}{ID} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} \implies \frac{IA}{ID} + 1 = \frac{b+c}{a}$$
$$\implies \frac{IA}{ID} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1.$$

Ομοίως έχουμε : $\frac{IB}{IE} = \frac{c}{b} + \frac{a}{b} - 1$ και $\frac{IC}{IZ} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1.$

Άρα : $\frac{IA}{ID} + \frac{IB}{IE} + \frac{IC}{IZ} =$

$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) - 3 \geq$

$2 + 2 + 2 - 3 = 3.$

Λύση 2 (Θάνος Μάγκος) Από την δύναμη σημείου ως προς κύκλο και το θεώρημα *Euler* έχουμε

$(IA)(ID) = R^2 - (IO)^2 = 2Rr$ και ομοίως

$(IB)(IE) = (IC)(IZ) = 2Rr$

Άρα είναι :

$$\frac{IA}{ID} + \frac{IB}{IE} + \frac{IC}{IZ} =$$
$$\frac{(IA)^2}{(IA)(ID)} + \frac{(IB)^2}{(IB)(IE)} + \frac{(IC)^2}{(IC)(IZ)} =$$
$$\frac{(IA)^2 + (IB)^2 + (IC)^2}{2Rr}.$$

Απομένει να αποδειχθεί ότι $(IA)^2 + (IB)^2 + (IC)^2 \geq 6Rr.$

Υπολογίζουμε όμως

$(IA)^2 + (IB)^2 + (IC)^2 = s^2 + r^2 - 8Rr$ (π.χ. με χρήση των σχέσεων $(IA)^2 = r^2 + (s-a)^2$).

Οπότε, αρκεί να αποδειχθεί ότι $s^2 + r^2 - 8Rr \geq 6Rr$, δηλαδή ότι $s^2 \geq 14Rr - r^2$.

Αυτή όμως, είναι άμεση συνέπεια των ανισοτήτων $s^2 \geq 16Rr - 5r^2$ και $R \geq 2r$. (*Gerretsen* και *Euler*, αντίστοιχα).

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

Επιμελητής: Αλέξανδρος Συγκελάκης

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Αλέξανδρος Συγκελάκης - Θέμα διαγωνισμού «Ο ΘΑΛΗΣ» 1995) Σε μια σκακιέρα θέλουμε να τοποθετήσουμε πιόνια, ώστε:*

- *δύο πιόνια να μη βρίσκονται σε γειτονικά τετραγωνάκια (δηλ. τετραγωνάκια με κοινή πλευρά), και επιπλέον,*
- *σε κάθε τετραγωνάκι είτε να υπάρχει πιόνι είτε να είναι γειτονικό με ένα τετραγωνάκι με πιόνι.*

Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο και τον μέγιστο αριθμό από πιόνια που μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σκακιέρα, ώστε να ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=116050

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Για το πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι 18. Πράγματι μπορούμε να βάλουμε 18 πιόνια στα λευκά τετράγωνα (αν χρωματίσουμε την σκακιέρα εναλλάξ όπως μια κανονική σκακιέρα) ώστε να καλύπτουν όλα τα τετράγωνα. Δεν μπορούμε να βάλουμε περισσότερα από 18. Αν βάλουμε περισσότερα τότε μια στήλη πρέπει να έχει τουλάχιστον τέσσερα πιόνια και άρα τουλάχιστον δύο από αυτά θα είναι γειτονικά.

Για το δεύτερο και πιο δύσκολο ερώτημα η απάντηση είναι 10. Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει πως μπορούμε να το πετύχουμε με δέκα πιόνια.

		X			X
X				X	
			X		
	X				
		X			
X				X	

Θα δείξουμε τώρα ότι δεν γίνεται με εννιά. Αν γινόταν, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας, στις τρεις πρώτες στήλες θα υπάρχουν το πολύ 4 πιόνια. Αν γράψουμε a, b, c για τον αριθμό των πιονιών σε κάθε στήλη, για να καλυφθούν όλα τα τετράγωνα της πρώτης στήλης πρέπει $3a + b \geq 6$ αφού κάθε πιόνι στην πρώτη στήλη καλύπτει (μαζί με τον εαυτό του) το πολύ τρία τετράγωνα της πρώτης στήλης ενώ κάθε πιόνι στην δεύτερη στήλη καλύπτει ένα τετράγωνο της πρώτης στήλης. Ομοίως κοιτάζοντας την δεύτερη στήλη πρέπει $a + 3b + c \geq 6$. Άρα υπάρχουν μόνο οι ακόλουθες επιλογές για την τριάδα (a, b, c):

(α) $(1, 3, 0)$

(β) $(2, 1, 1)$

(γ) $(2, 2, 0)$

Έστω ότι d, e, f ο αριθμός των πιονιών στις στήλες 4,5,6. Αν ισχύει το (α), τότε για να καλυφθούν τα τετράγωνα της τρίτης στήλης, πρέπει $d \geq 3$. Επίσης για να καλυφθούν τα τετράγωνα της έκτης στήλης πρέπει $e + 3f \geq 6$. Επειδή όμως $d + e + f = 5$ αυτό μπορεί να ισχύει μόνο αν $d = 3, e = 0, f = 2$. Αλλά τότε τα τετράγωνα της πέμπτης στήλης δεν καλύπτονται. Αν ισχύει το (γ) για την τρίτη στήλη πρέπει $d \geq 4$ και για την έκτη πρέπει $e + 3f \geq 6$. Αλλά τότε $d + e + f \geq 6$, άτοπο. Τέλος αν ισχύει το (β), επειδή $a + 3b + c = 6$, το πιόνι που βρίσκεται στην δεύτερη στήλη δεν μπορεί να βρίσκεται ούτε στην πρώτη ούτε στην έκτη σειρά. Δεν μπορεί επίσης να βρίσκεται ούτε στην δεύτερη ή πέμπτη διότι τότε τα δυο πιόνια της πρώτης στήλης δεν μπορούν να καλύψουν τα υπόλοιπα πέντε κενά στην πρώτη στήλη. Από συμμετρία μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πιόνι της δεύτερης στήλης βρίσκεται στην τρίτη σειρά. Τότε αναγκαστικά τα πιόνια της πρώτης στήλης βρίσκονται στην πρώτη και πέμπτη σειρά. Αλλά τότε το τετράγωνο της έκτης στήλης της δεύτερης σειράς δεν έχει καλυφθεί και άρα αναγκαστικά πρέπει το πιόνι στην τρίτη στήλη να βρίσκεται στην έκτη σειρά. Μέχρι στιγμής όμως έχουν καλυφθεί μόνο τρία τετράγωνα της τρίτης στήλης. Επομένως πάλι πρέπει $d \geq 3$ και καταλήγουμε σε άτοπο όπως στην περίπτωση (α).

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Αν a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους $a + b + c = 1$, να δείξετε ότι*

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq \frac{1}{abc}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=118939

Λύση 1 (Δημήτρης Λυγκώνης) Από τη συνθήκη έχουμε: $\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \le \frac{1}{abc}$ και μετά απο πράξεις παίρνουμε

$\frac{3abc-(ab+bc+ac)-(a+b+c)+3}{(1-a)(1-b)(1-c)} \le \frac{1}{abc} \Leftrightarrow$

$3abc-(ab+bc+ac)+2 \le \frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{abc}$

Από την ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου (ΑΜ-ΓΜ) παίρνουμε

$$(b+c)(a+c)(a+b) \ge 8abc \Leftrightarrow$$
$$\frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{abc} \ge 8$$

Άρα αρκεί: $8 \ge 3abc-(ab+bc+ac)+2 \Leftrightarrow$

$6+ab+ac+bc \ge 3abc$

Και πάλι από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ παίρνουμε $ab+ac+bc \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

και αρκεί: $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge 3abc \Leftrightarrow$

$a^2b^2c^2 \ge a^3b^3c^3$ που ισχύει αφού $a,b,c \in (0,1)$

Λύση 2 (Γρηγόρης Κακλαμάνος) Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\sum abc\frac{1+a}{b+c} &= \sum \frac{bc}{b+c}(a^2+a) \le \sum \frac{b+c}{4}(a^2+a)\\ &= \frac{\sum 2ab+\sum(b+c)a^2}{4}\\ &= \frac{\sum 2ab+\sum(1-a)a^2}{4}\\ &= \frac{(a+b+c)^2-\sum a^3}{4} \overset{(\star)}{\le} \frac{1-\frac{1}{9}}{4} = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

($\star$) Από την ανισότητα των δυνάμεων είναι

$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} \ge \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \ge \frac{1}{9}$

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Προτείνει ο vzf) Να βρείτε τους μοναδικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς που πρέπει να έχουν δύο εξάπλευρα ζάρια, που δεν είναι τα κανονικά ζάρια ώστε να έχουν την ίδια κατανομή πιθανότητας για το άθροισμα με τα κανονικά ζάρια.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=21407

Λύση (Ηλίας Ζαδίκ) Η πιθανογεννήτρια του κανονικού ζαριού είναι η $\frac{1}{6}(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$. Ισοδύναμα θέλουμε δύο εξάδες θετικών ακέραιων $r_1, \ldots, r_6$ και $s_1, \ldots, s_6$ τέτοιες ώστε

$$(\sum x^{r_i})(\sum x^{s_i}) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$$

και μετά να δείξουμε ότι είναι και μοναδικές αν δεν είναι τετριμμένη η επιλογή τους. Αν για ευκολία θέσουμε $T(x) = \sum x^{r_i}$ και $S(x) = \sum x^{s_i}$, έχουμε ότι

$$ST = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2.$$

Πάνω στο $\mathbb{Z}[x]$ σε ανάγωγη μορφή είναι

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) = x(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2).$$

Οπότε

$$T(x) = x^{a_1}(1 + x)^{a_2}(1 - x + x^2)^{a_3}(1 + x + x^2)^{a_4}$$

και

$$S(x) = x^{b_1}(1 + x)^{b_2}(1 - x + x^2)^{b_3}(1 + x + x^2)^{b_4}$$

με $a_i + b_i = 2$ για κάθε i. Τώρα $T(1) = S(1) = 6$ οπότε εύκολα $a_2 = a_4 = b_2 = b_4 = 1$. Δεδομένου ότι τα ζάρια δεν έχουν το μηδέν $a_1 = b_1 = 1$ επίσης. Τώρα αν $a_3 = b_3$ παίρνουμε τα δύο συνήθη ζάρια αλλιώς (χωρίς βλάβη της γενικότητας) $a_3 = 0$ και $b_3 = 2$ οπότε

$$S(x) = x + x^2 + x^2 + x^3 + x^3 + x^4$$

και

$$T(x) = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8.$$

Άρα οι ζητούμενες εξάδες είναι οι εξής: $(1, 2, 2, 3, 3, 4)$ και $(1, 3, 4, 5, 6, 8)$.

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Από τον διαγωνισμό Vojtech Jarník του 1997) Έστω a ένας περιττός θετικός ακέραιος. Να δειχθεί ότι αν $d|(a^2 + 2)$ τότε $d \equiv 1 \bmod 8$ ή $d \equiv 3 \bmod 8$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=23187

Λύση (Αλέξανδρος Εσκενάζης) Έστω p ένας πρώτος διαιρέτης του d. Τότε $a^2 \equiv -2 \bmod p$, άρα, αφού ο p είναι περιττός, το σύμβολο Legendre $(\frac{-2}{p})$ ισούται με 1. Όμως,

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Για $p \equiv 5 \bmod 8$ το $\frac{p^2-1}{8}$ είναι περιττός και το $\frac{p-1}{2}$ άρτιος, άρα δεν μπορεί να ισχύει η παραπάνω. Για $p \equiv 7 \bmod 8$ το $\frac{p^2-1}{8}$ είναι άρτιος και το $\frac{p-1}{2}$ περιττός, άρα απορρίπτεται και αυτή. Άρα κάθε πρώτος διαιρέτης του d είναι ισότιμος είτε με $1 \bmod 8$ είτε με $3 \bmod 8$. Όμως, αφού $3^2 \equiv 1 \bmod 8$ το ίδιο ισχύει και για τον d.

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτείνει ο Σωτήρης Χασάπης) Να δειχθεί ότι :*

$$\begin{vmatrix} ac & ab & bc \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=22610

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{vmatrix} xc & xb & bc \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & x \end{vmatrix}.$$

Προφανώς, πρόκειται για μία πολυωνυμική δευτέρου βαθμού. Είναι $f(b) = f(c) = 0$ αφού σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές δύο στήλες της ορίζουσας είναι ίδιες. Άρα, $f(x) = k(x-b)(x-c)$. Είναι ακόμα

$$f(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & bc \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = bc(c-b),$$

οπότε $k = c - b$. Άρα τελικά, είναι $f(x) = (c-b)(x-b)(x-c)$ και το ζητούμενο έπεται.

Λύση 2 (Γιώργος Απόκης) Αφαιρούμε την πρώτη στήλη από τις υπόλοιπες και έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ac & ab & bc \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ac & ab-ac & bc-ac \\ 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} a(b-c) & c(b-a) \\ c-b & a-b \end{vmatrix} \\ &= -a(b-c)(a-b) + c(c-b)(b-a) \\ &= -a(b-c)(a-b) + c(b-c)(a-b) \\ &= (c-a)(b-c)(a-b). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Αθανάσιος Κοντογεώργης) Έστω G μια ομάδα τέτοια ώστε για κάθε $a, b \in G$ να ισχύει ότι $a^2b = ba^2 \implies ab = ba$.*

(α) Αν η G έχει 2^n στοιχεία, να δείξετε ότι είναι αβελιανή.

(β) Βρείτε παράδειγμα τέτοιας μη αβελιανής ομάδας.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=21186

Λύση (Ζωή Κρυφού-Δημήτρης Χριστοφίδης)

(α) Είναι γνωστό ότι η τάξη μιας ομάδας είναι ένας εκθέτης αυτής. Επομένως, για κάθε $a \in G$ έχουμε

$$a^{|G|} = a^{2^n} = \underbrace{a^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n \text{ φορές}} = e.$$

Επειδή για κάθε $b \in G$ έχουμε $eb = b = be$ τότε για κάθε $b \in G$

$$b\,\underbrace{a^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n \text{ φορές}} = \underbrace{a^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n \text{ φορές}}\,b$$

οπότε από την υπόθεση είναι

$$b\,\underbrace{a^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n-1 \text{ φορές}} = \underbrace{a^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n-1 \text{ φορές}}\,b.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας την υπόθεση n φορές έχουμε ότι $ab = ba$ για κάθε $a, b \in G$ δηλαδή η G είναι αντιμεταθετική.

(β) Αρκεί να βρούμε μια μη αβελιανή ομάδα για την οποία να ισχύει ότι $x^3 = 1$ για κάθε x. Πράγματι τότε έχουμε $a^2b = ba^2 \Rightarrow a(a^2b)a = a(ba^2)a \Rightarrow ba = ab$.

Μια τέτοια ομάδα είναι η ομάδα των πινάκων της μορφής $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ όπου $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ και οι πράξεις γίνονται mod3. Ο έλεγχος είναι απλός.

Ανάλυση (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Γρηγόρης Κωστάκος

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Ας υπολογισθεί το άθροισμα*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{2^n},$$

όπου $\zeta(s)$ η συνάρτηση ζήτα του Riemann.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=13167

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$. Η σειρά Fourier της συνάρτησης $f_x(t) = \cos(xt)$ για $t \in [-\pi, \pi]$ ισούται με

$$f_x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt),$$

όπου $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(xt)\cos(nt)\,dt =$

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} [\cos((x+n)\,t) + \cos((n-x)\,t)]\,dt =$

$\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\sin((n+x)\pi)}{n+x} + \dfrac{\sin((n-x)\pi)}{n-x}\right) =$

$\dfrac{(-1)^n}{\pi}\left(\dfrac{\sin\pi x}{n+x} - \dfrac{\sin\pi x}{n-x}\right) = (-1)^{n+1}\dfrac{2x\sin\pi x}{\pi(n^2-x^2)}.$

Επομένως

$$\cos(xt) = \frac{\sin\pi x}{\pi x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2x\sin\pi x\cos(nt)}{\pi(n^2-x^2)}.$$

Η σειρά Fourier συγκλίνει στο $f_x(t)$ σε κάθε $t \in \mathbb{R}$ επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής, $f_x(-\pi) = f_x(\pi)$ και επιπλέον $a_n = \mathcal{O}(1/n)$.

Αντικάθιστώντας $t = \pi$ και διαιρώντας με το $\sin\pi x$ παίρνουμε

$$\cot\pi x = \frac{1}{\pi x} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2-x^2}.$$

Όμως $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^{2m} = \sum_{m=1}^{+\infty} \zeta(2m)\,x^{2m}.$

Οι πιο πάνω πράξεις επιτρέπονται για κάθε $|x| < 1$ λόγω απόλυτης σύγκλισης. Επομένως

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \zeta(2m)\,x^{2m} = \frac{1 - \pi x\cot(\pi x)}{2}$$

και άρα το ζητούμενο άθροισμα ισούται με $\dfrac{2 - \pi\sqrt{2}\,\cot(\pi\sqrt{2}/2)}{4}$. □

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτείνει ο Σεραφείμ Τσιπέλης) Αν $a = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$, να αποδειχθεί ότι:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{4a}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{5}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\binom{2n}{n}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=15033

Λύση 1. (Σεραφείμ Τσιπέλης) Είναι γνωστό ότι (η απόδειξή του δεν είναι δύσκολη):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2\,4^n\,x^{2n+2}}{(n+1)\,(2n+1)!} = \arcsin^2(x).$$

Τότε $\displaystyle 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\,x^{2n+2}}{(2n+2)\,(2n+1)\binom{2n}{n}} = \arcsin^2(x) \quad\Rightarrow$

$\displaystyle 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\,x^{2n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\arcsin^2(x)\right) \overset{\lfloor 1\rfloor}{=}$

$\displaystyle \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\arcsin(x)}{(1-x^2)\,\sqrt{1-x^2}} \quad \xRightarrow{4x^2\to x}$

$\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} = 4\,\frac{\sqrt{4-x} + \sqrt{x}\,\arcsin(\frac{\sqrt{x}}{2})}{(4-x)\,\sqrt{4-x}}$, οπότε για $x = -1$ έχουμε

$\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}} = 4\,\frac{\sqrt{5} + i\,\arcsin(\frac{i}{2})}{5\sqrt{5}} \overset{\lfloor 2\rfloor}{=}$

$\displaystyle 4\,\frac{\sqrt{5} - \operatorname{arcsinh}(\frac{1}{2})}{5\sqrt{5}} \overset{\lfloor 3\rfloor}{=} \frac{4}{5} - \frac{4a}{5\sqrt{5}}.$

Τελικά $\displaystyle \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}} =$

$$-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}}-1\right)=\frac{4a}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{5}.\qquad\square$$

$\lfloor 1\rfloor$: τυπική παραγώγιση,
$\lfloor 2\rfloor$: είναι γνωστός ο τύπος $\arcsin(i\,x)=i\operatorname{arcsinh}(x)$,
$\lfloor 3\rfloor$: αποδεικνύεται εύκολα ότι $\operatorname{arcsinh}(\frac{1}{2})=\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Λύση 2. (Γιώργος Παπαδόπουλος)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\binom{2n}{n}}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\binom{2n}{n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n!)^2}{n\,(2n)!}=$$

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,n\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n)}{n\,\Gamma(2n+1)}=$$

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n(1-x)^{n-1}\,dx=$$

$$-\int_0^1\left[\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(x\,(1-x))^n\right]dx=$$

$$-\int_0^1\left[\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{+\infty}(x\,(x-1))^n\right]dx=$$

$$\int_0^1\frac{1}{1-x}\,\frac{x^2-x}{x^2-x-1}\,dx=-\int_0^1\frac{x}{x^2-x-1}\,dx=$$

$$\frac{\ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})}{\sqrt{5}}=\frac{2\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{\sqrt{5}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}.\qquad\square$$

Θεωρία Αριθμών (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Νίκος Κατσίπης

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων 9.999 διαδοχικών φυσικών δε μπορεί να είναι δύναμη φυσικού.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=23220

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Το άθροισμα κάθε εννέα διαδοχικών τετραγώνων είναι ισότιμο με $6 \bmod 9$. Αυτό συμβαίνει αφού οι εννιά αριθμοί είναι (με κάποια σειρά) ισότιμοι με $0, 1, \ldots 8 \bmod 9$ και άρα τα τετράγωνά τους είναι ισότιμα με $0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1 \bmod 9$. Άρα το άθροισμα των τετραγώνων 9999 διαδοχικών αριθμών είναι ισότιμο με $6666 \equiv 6 \bmod 9$. Επομένως το άθροισμα είναι πολλαπλάσιο του 3 αλλά όχι του 9 και άρα δεν μπορεί να είναι τέλεια δύναμη φυσικού.

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του ακέραιου n ώστε οι αριθμοί*

$$a = n + 3$$

και

$$b = n^2 + 3$$

να είναι συγχρόνως τέλειοι κύβοι.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=23284

Λύση (Παύλος Μαραγκουδάκης) Αν υπάρχει n ακέραιος τέτοιος ώστε οι $n+3, n^2+3$ να είναι συγχρόνως τέλειοι κύβοι, τότε θα είναι τέλειος κύβος και το γινόμενό τους Όμως

$$\begin{aligned}(n+3)\left(n^2+3\right) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 9 \\ &= (n+1)^3 + 8.\end{aligned}$$

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$(n+1)^3 < (n+1)^3 + 8 < (n+3)^3$$

όταν $n < -3$ ή $n > -1$. Ο μοναδικός τέλειος κύβος ανάμεσα στους

$$(n+1)^3 \quad \text{και} \quad (n+3)^3$$

είναι ο $(n+2)^3$. Η εξίσωση $(n+1)^3 + 8 = (n+2)^3$ είναι αδύνατη στους ακεραίους αφού είναι ισοδύναμη με την $3n^2 + 9n = 1$. Άρα οι μόνες πιθανές τιμές είναι $n = -3, -2, -1$. Καμμία από αυτές δεν κάνει τους $n+3, n^2+3$ να είναι συγχρόνως τέλειοι κύβοι.

Άρα δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος.

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω η εξίσωση:*

$$x^5 - 40x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0$$

της οποίας οι ρίζες βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο. Το άθροισμα των αντιστρόφων αυτών των ριζών ισούται με 10*. Να υπολογίσετε την τιμή του* $|S|$*.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=22408

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Ας είναι $\frac{a}{k^2}, \frac{a}{k}, a, ak, ak^2$ οι ρίζες της εξίσωσης.
Από τους τύπους Vieta το άθροισμά τους είναι ίσο με 40 και το γινόμενό τους ίσο με $-S$.
Παίρνουμε λοιπόν

$$a\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + 1 + k + k^2\right) = 40.$$

Από τα δεδομένα, το άθροισμα των αντιστρόφων των παραπάνω αριθμών είναι ίσο με 10 άρα

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + 1 + k + k^2\right) = 10.$$

Διαιρώντας τις παραπάνω δύο σχέσεις παίρνουμε $a^2 = 4$ δηλαδή $|a| = 2$.
Όμως το γινόμενο των παραπάνω ριζών είναι ίσο με a^5 άρα $|S| = |a|^5 = 2^5 = 32$.

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να συγκριθούν οι αριθμοί*

$$\sqrt{\pi^\pi e^e} \qquad \text{και} \qquad e^\pi.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=22605

Λύση 1 (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{2}\ln x - x + \frac{e}{2}, \qquad x > 0$$

η οποία έχει παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x - 1)$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα για $x > e$ οπότε

$$f(\pi) > f(e) = 0 \text{ άρα } f(\pi) > 0$$

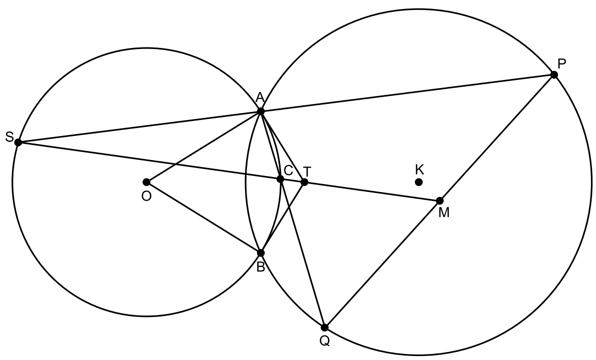
που δίνει τελικά ότι

$$\sqrt{\pi^\pi e^e} > e^\pi.$$

Λύση 2 (Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης) Παρομοίως την ίδια δουλειά κάνει και η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - 2x$ η οποία ειναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > e$. Άρα

$$\begin{aligned} f(\pi) &> f(e) \Leftrightarrow \\ \pi\ln\pi - 2\pi &> -e \Leftrightarrow \\ \pi\ln\pi + e &> 2\pi \Leftrightarrow \\ \ln(\pi^\pi e^e) &> \ln e^{2\pi} \Leftrightarrow \\ \pi^\pi e^e &> e^{2\pi} \Leftrightarrow \\ \sqrt{\pi^\pi e^e} &> e^\pi. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο KARKAR) Οι κύκλοι* (O) *και* (K) *τέμνονται στα* A, B *. Οι εφαπτόμενες του πρώτου κύκλου στα σημεία* A, B *τέμνονται στο* T*. Από σημείο* S *του κύκλου* (O) *φέρω την* ST *η οποία επανατέμνει τον κύκλο στο* C*. Η* SA *τέμνει τον κύκλο* (K) *στο* P*, ενώ η* AC *στο* Q*. Δείξτε ότι η* ST *διέρχεται από το μέσο της* PQ*.*



---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=115044#p115044

Λύση 1 (Γρηγόρης Κακλαμάνος)

Καταρχάς στο πλήρες τετράπλευρο $PCAMSQ$ το B είναι το σημείο $Miquel$.

Άρα στο εγγράψιμο $SPMB$ ισχύει $\widehat{BPQ} = \widehat{BSC}$

ενώ στο εγγράψιμο $BCMQ$ είναι $\widehat{BQM} = \widehat{BCS}$.

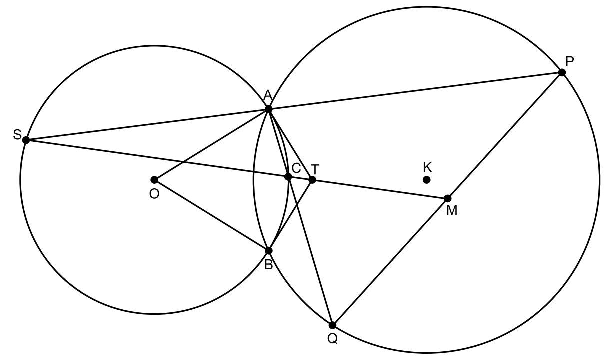
Οι δύο προηγούμενες σχέσεις δίνουν ότι $\triangle SBC \sim \triangle PBQ$.

Από γνωστή πρόταση στο αρμονικό τετράπλευρο $SACB$ η BA είναι συμμετροδιάμεσος στο $\triangle SBC$.

Αν θεωρήσουμε M' το μέσο της CS θα ισχύει $\widehat{M'BC} = \widehat{ABS}$ (1).

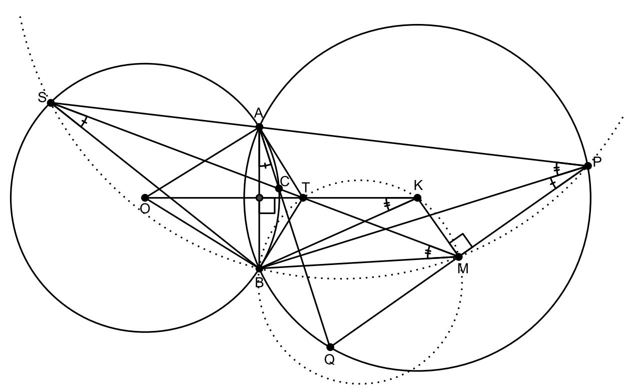
Επιπλέον λόγω του εγγράψιμου $BCMQ$ είναι $\widehat{QBM} = \widehat{QCM} = \widehat{SCA} = \widehat{ABS} \overset{(1)}{=} \widehat{M'BC}$.

Επομένως στα όμοια τρίγωνα $\triangle SBC \sim \triangle PBQ$ ισχύει $\widehat{QBM} = \widehat{M'BC}$ και αφού M' είναι μέσο το M θα είναι επίσης μέσο.

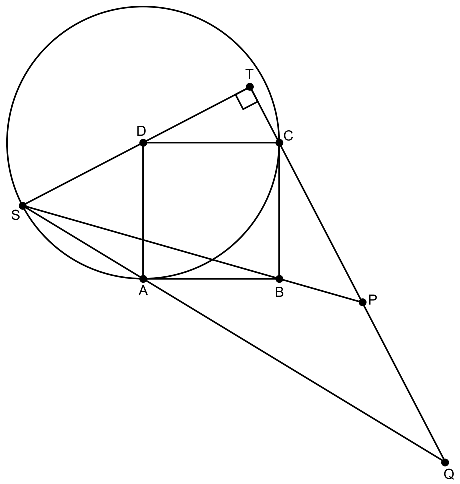


Λύση 2 (Στάθης Κούτρας) Είναι γνωστό ότι η διάκεντρος OK των τεμνομένων κύκλων (O), (K) είναι μεσοκάθετη στην κοινή τους χορδή AB και διχοτομεί τις γωνίες των αντικών τους και επειδή $TA = TB$ (εφαπτόμενα τμήματα στον (O)) το T ανήκει στη μεσοκάθετη της AB δηλαδή O, T, K συνευθειακά.

Επίσης από $\widehat{BPM} = \widehat{BAQ} = \widehat{BSM}$ το $SBMP$ προκύπτει εγγράψιμο, οπότε είναι εγγράψιμο και το $TKMB$ καθώς $\widehat{TKB} = \widehat{APB} = \widehat{SMB}$. Από την εγγραψιμότητα των $SBMP$ και $TKMB$ προκύπτουν οι ισότητες $\widehat{BMQ} = \widehat{BSA} = \widehat{AOT}$ και $\widehat{KMB} = \widehat{OTB} = \widehat{ATO}$, αντίστοιχα, και με πρόσθεση κατά μέλη η $\widehat{KMQ} = 90^0$: άρα το KM είναι απόστημα στη χορδή PQ και το M μέσο της PQ.



ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο KARKAR)Με κέντρο την κορυφή* D *τετραγώνου* $ABCD$ *και ακτίνα* DA *γράφω κύκλο, επί του οποίου κινείται σημείο* S*. Ευθεία* CT *κάθετη στην* SD *τέμνει τις* SA, SB *στα* Q, P *αντίστοιχα. Δείξτε ότι* $CP = PQ$*.*

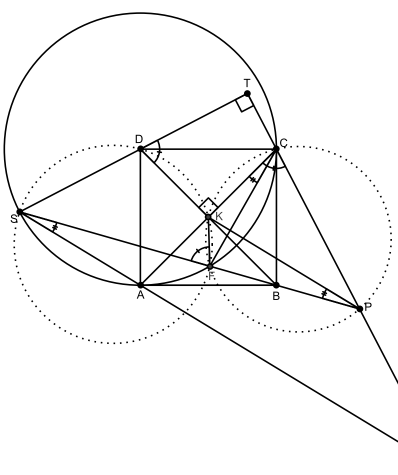


http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=22133

Λύση 1 (Σωτήρης Λουρίδας) Αν $F \equiv (D) \cap SB$ και $CK = KA$ τότε $BC^2 = BK \cdot BD = BF \cdot BS$, άρα τα S, F, K, D είναι ομοκυκλικά.

Από $\angle KFS = \angle KDT = \angle KCP$ προκύπτουν ομοκυκλικά και τα K, F, P, C.

Από $\angle KPF = \angle KCF = \angle ASF$ έχουμε $KP \parallel AQ$, οπότε από την $CK = KA$ προκύπτει η $CP = PQ$.

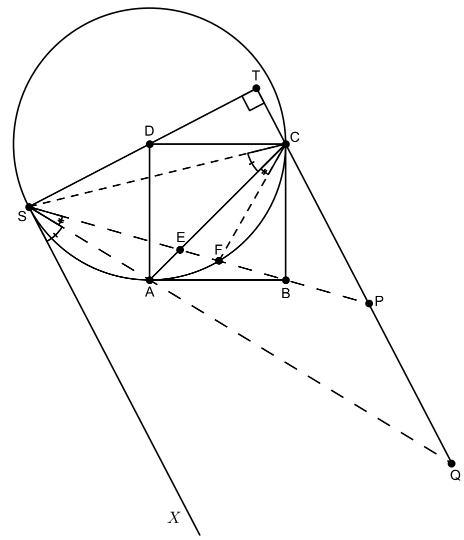


Λύση 2 (Κώστας Βήττας) Έστω SX η εφαπτομένη (το X προς το μέρος του A) του κύκλου (D) με κέντρο το D και ακτίνα το AD και έστω τα σημεία $E \equiv AC \cap SB$ και $F \equiv (D) \cap SB$.

Η ευθεία AC είναι η πολική του B ως προς τον κύκλο (D) και άρα έχουμε ότι η σημειοσειρά S, E, F, B, είναι αρμονική και επομένως η δέσμη $C.SEFB$ είναι επίσης αρμονική.

Επειδή τώρα, ισχύει $\angle XSQ = \angle SCE$ και $\angle QSP = \angle ECF$ και $\angle PSC = \angle FCB$ προκύπτει ότι και η δέσμη $S.XQPC$ είναι αρμονική.

Άρα, από $CQ \parallel SX$ συμπεραίνεται ότι $CP = PQ$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f, g \in \mathbb{C}[x]$, τα οποία δεν έχουν κοινή ρίζα. Αν το πολυώνυμο $f^2(x) + g^2(x)$ έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $r \in \mathbb{C}$, να αποδειχθεί ότι*

$$(f'(r))^2 + (g'(r))^2 = 0.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=23507

Λύση (Χρήστος Κυριαζής) Είναι:

$$f^2(x) + g^2(x) = (x - r)^2 P(x)$$

(Προφανώς θα είναι και $f^2(r) + g^2(r) = 0$)

Τώρα παραγωγίζοντας ως προς x έχω:

$$f(x)f'(x) + g(x)g'(x) = (x - r)P(x) + (x - r)^2 P'(x)$$

και πάλι θα ισχύει:

$$f(r)f'(r) + g(r)g'(r) = 0$$

Τώρα εκμεταλλεύομαι πως δεν έχουν κοινή ρίζα. Άρα αποκλείεται να αληθεύει ταυτοχρόνως

$$f(r) = g(r) = 0$$

Ας είναι, χωρίς βλάβη

$$f(r) \neq 0$$

Τότε

$$f'(r) = -\frac{g(r)}{f(r)} g'(r)$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}(f'(r))^2 + (g'(r))^2 &= \left[-\frac{g(r)}{f(r)} g'(r)\right]^2 + (g'(r))^2 \\ &= [g'(r)]^2 \frac{f^2(r) + g^2(r)}{f^2(r)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Παρόμοια αποτελέσματα θα είχαμε αν υποθέταμε πως $g(r) \neq 0$

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτείνει ο Νίκος Μαυρογιάννης)* ***Η Ανισότητα του Cauchy****. Να αποδειχθεί πως αν οι $a_1, a_2, ..., a_n$ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί τότε ισχύει*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

και η ισότητα αληθεύει αν και μόνο αν οι αριθμοί είναι ίσοι.

Στόχος βέβαια δεν είναι τόσο το να αποδειχθεί η γνωστή αυτή ανισότητα αλλά να δοθούν, χάριν της ενημέρωσης των συναδέλφων, όσο γίνεται περισσότερες αποδείξεις.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=17875

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Η λέξη κλασικό ίσως είναι λίγη για να περιγράψει το πόσο κλασική είναι αυτή η ανισότητα. Και δεδομένου ότι την έχω χρησιμοποιήσει «άπειρες» φορές, νιώθω υποχρεωμένος να παραθέσω μία απόδειξη. Επιλέγω μία σύντομη, η οποία (αν θυμάμαι καλά) οφείλεται στον George Polya. Θυμάμαι ακόμα, να έχω διαβάσει ότι την απόδειξη αυτή την είδε στον «ύπνο» του σε ένα από τα μαθηματικά του όνειρα. Γράφουμε:

$$\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}}_{A} \geqslant \underbrace{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}_{G}$$

Ξεκινάμε από την γνωστή ανισότητα

$$e^{x-1} \geq x$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$ Εφαρμόζουμε την παραπάνω ανισότητα για τους αριθμούς $\dfrac{x_i}{A}$, οπότε λαμβάνουμε

$$e^{\frac{x_1}{A} - 1} \geq \frac{x_1}{A}$$

$$e^{\frac{x_2}{A} - 1} \geq \frac{x_2}{A}$$

...

$$e^{\frac{x_n}{A} - 1} \geq \frac{x_n}{A}$$

Με πολλαπλασιασμό των παραπάνω σχέσεων προκύπτει:

$$e^0 \geq \frac{x_1 x_2 ... x_n}{A^n} \Rightarrow 1 \geq \frac{G^n}{A^n} \Rightarrow A \geq G.$$

Άξια ιδιαίτερης μνείας είναι η απόδειξη που έδωσε ο Cauchy εφαρμόζοντας την «μπρος πίσω» επαγωγική μέθοδο. Άλλη απόδειξη χρησιμοποιεί την ανισότητα Jensen (η οποία αποδεικνύεται με την ίδια «μπρος πίσω» επαγωγική μέθοδο).

Λύση 2 (Φωτεινή Καλδή) Μια άλλη απόδειξη με χρήση της ανισότητας του Jensen για τη συνάρτηση

$$f(x) = lnx, \quad x > 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

οπότε

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \Rightarrow$$

$$\frac{\ln(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)}{n} \leq \ln(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \Rightarrow$$

$$\ln(x_1x_2\ldots x_n) \leqslant \ln(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n})^n \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{(x_1x_2\ldots x_n)} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

με την ισότητα να ισχύει όταν οι αριθμοί είναι ίσοι

Λύση 3 (Σπύρος Φίλιππας)

Παραθέτω και εγώ δύο αποδείξεις, μια με αναδιάταξη και μια τελείως στοιχειώδη.

1. Υποθέτουμε ότι $x_i > 0$, και θέτουμε

$$c = \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$

και

$$a_1 = \frac{x_1}{c}, a_2 = \frac{x_1x_2}{c^2}, a_3 = \frac{x_1x_2x_3}{c^3}.....a_n = \frac{x_1...x_n}{c^n} = 1$$

και

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, b_2 = \frac{1}{a_2}, b_n = \frac{1}{a_n} = 1$$

Οι ακολουθίες a_i , b_i είναι διατεταγμένες αντιθέτως άρα από αναδιάταξη έχουμε:

$$a_1b_1 + a_2b_2... + a_nb_n \leq a_1b_n + a_2b_1 + a_3b_2 + ... + a_nb_{n-1}$$

ή

$$1 + 1 + 1... + 1 \leq \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c}... + \frac{x_n}{c}$$

ή

$$n \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{c} \Leftrightarrow c \leq \frac{x_1 + ...x_n}{n}$$

2. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$

Προχωρούμε σε μια σειρά ενεργειών πού θα αφήσουν αμετάβλητο το αριστερό μέλος ενώ θα μεγαλώσουν το δεξιό. Θέτουμε

$$a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Όταν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι η ανισότητα ισχύει. Αν δεν είναι όλοι ίσοι αφού

$$\min\ x_i \leq a \leq \max\ x_j$$

θα υπάρχουν i, j ώστε $x_i < a < x_j$

Τώρα, στη θέση του x_i βάζουμε το $\hat{x}_i = a$ και στη θέση του x_j το $\hat{x}_j = x_i + x_j - a$.

Αυτή η διαδικασία αφήνει αμετάβλητο το αριστερό μέλος ενώ μεγαλώνει το δεξί. Πράγματι:

$$\hat{x}_i\hat{x}_j = a(x_i + x_j - a) = x_ix_j + (x_j - a)(a - x_i) > x_ix_j$$

ενώ οι άλλοι όροι παραμένουν ίδιοι.

Παρατηρούμε ,ότι με αυτή τη διαδικασία ,ο αριθμός των x_i πού ισούνται με a αυξάνεται κατά μια μονάδα. Η διαδικασία αυτή όμως δεν μπορεί να γίνεται επ΄ άπειρον, κάποια στιγμή όλοι οι αριθμοί θα είναι ίσοι με a , τότε το δεξί μέλος θα πάρει τη μέγιστη τιμή του η οποία είναι το αριστερό μέλος, όπως θέλαμε.

Λύση 4 (Αλέξανδρος Συγγελάκης) Εκτός τις παραπάνω κομψότατες αποδείξεις θα παραθέσω την απόδειξη που αποδίδεται στον Cauchy και η οποία παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ειδικά στο 3ο βήμα.

1ο Βήμα Ανισότητα για $n = 2$ Θα δείξουμε ότι

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$$

Απόδειξη Υψώνουμε στο τετράγωνο και η προς απόδειξη ανισότητα καταλήγει στην $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ που ισχύει

2ο Βήμα Ανισότητα για $n = 2^k, \quad k \in \mathbb{N}$

Απόδειξη Θα γίνει με τη βοήθεια της ισχυρής μορφής της μαθηματικής επαγωγής. Για $k = 1$ ισχύει από το 1ο βήμα Έστω λοιπόν $k \geq 2$ και ας υποθέσουμε ότι η προς απόδειξη ανισότητα ισχύει για όλους τους εκθέτες l για τους οποίους $1 \leq l \leq k - 1$. Τότε

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} =$$

$$\frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} + \frac{x_{2^{k-1}+1}+x_{2^{k-1}+2}+\cdots+x_{2^k}}{2^{k-1}}}{2} \geqslant$$

$$\frac{\sqrt[2^{k-1}]{x_1x_2\cdots x_{2^{k-1}}} + \sqrt[2^{k-1}]{x_{2^{k-1}+1}x_{2^{k-1}+2}\cdots x_{2^k}}}{2} \geqslant$$

$$\sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{x_1x_2\cdots x_{2^{k-1}}}\ \sqrt[2^{k-1}]{x_{2^{k-1}+1}x_{2^{k-1}+2}\cdots x_{2^k}}} =$$
$$\sqrt[2^k]{x_1x_2\cdots x_{2^k}}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη του 2ου βήματος

3ο Βήμα Ανισότητα όταν $n \neq 2^k$

Απόδειξη Όταν το n δεν είναι δύναμη του 2 , υπάρχει αριθμός m που είναι δύναμη του 2 και είναι μεγαλύτερος από το n . Αν με x συμβολίσουμε τον αριθμητικό μέσο των $x_1, x_2, \ldots, x_n$, θεωρούμε τους $m-n$ αριθμούς $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_n$ ώστε $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = x$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι:

Λήμμα: Αν x είναι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τότε

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (m-n)x}{m}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα έχουμε:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (m-n)x}{m} =$$
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m}{m} \overset{(\star)}{\geqslant}$$
$$\sqrt[m]{x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}x_{n+2}\cdots x_m} =$$
$$\sqrt[m]{x_1x_2\cdots x_nx^{m-n}}$$

($\star$) : Η συγκεκριμένη ισχύει λόγω του βήματος 2 αφού ο m έχει επιλεγεί να είναι δύναμη του 2. Υψώνοντας πλέον την $x \geq \sqrt[m]{x_1x_2\cdots x_nx^{m-n}}$ στη δύναμη m παίρνουμε ότι $x \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ που είναι και η ζητούμενη.

τεξτβφΛύση 5 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Το αποτέλεσμα είναι προφανές για $n = 1$ οπότε θα υποθέσουμε $n \geqslant 2$. Θα δείξουμε ότι αν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μη αρνητικοί με $x_1 + \cdots + x_n = 1$, τότε $x_1\cdots x_n \leqslant (1/n)^n$ με ισότητα αν και μόνο αν $x_1 = \cdots = x_n = 1/n$. Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στα $x_1 = a_1/(a_1 + \cdots + a_n), \ldots, x_n = a_n/(a_1 + \cdots + a_n)$ παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. Για την απόδειξη, παίρνουμε μη αρνητικά $x_1, \ldots, x_n$ με $x_1 + \cdots + x_n = 1$ ώστε το γινόμενο $x_1\cdots x_n$ να είναι το μέγιστο δυνατό. (*) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα x_i είναι θετικά. Αρκεί να δείξουμε ότι $x_1 = \cdots = x_n$. Αν όμως δεν ισχύει αυτό τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 \neq x_2$. Αλλά τότε ορίζοντας

$$x_1' = x_2' = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

έχουμε

$$x_1' + x_2' + x_3 + \cdots + x_n = 1$$

αλλά

$$\left(x_1'x_2'x_3\cdots x_n\right) - (x_1x_2x_3\cdots x_n) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 x_3 \ldots x_n$$
$$> 0$$

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι το $x_1\cdots x_n$ είναι το μέγιστο δυνατό.

(*) Εδώ θέλει προσοχή και δυστυχώς κάνει την πιο πάνω απόδειξη μη στοιχειώδη. Πρέπει να δειχθεί ότι μπορούμε πράγματι να βρούμε x_i που να μεγιστοποιούν το $x_1\cdots x_n$. Το μέγιστο πράγματι υπάρχει επειδή η συνάρτηση $x_1\cdots x_n$ είναι συνεχής και το σύνολο

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, \ldots, x_n 0 \wedge x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Λύση 6 (Βασίλης Ευαγγέλου) Μπορεί να αποδειχθεί με την βοήθεια του λήμματος:

Λήμμα: Αν $a_1, a_2, ..., a_n$ θετικοί αριθμοί με $a_1a_2...a_n = 1$ να αποδειχθεί ότι $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

Απόδειξη (προστέθηκε από τον Επιμελητή): Μπορούμε να εργασθούμε με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ το αποδεικτέο ισχύει. Ψποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\alpha_{k+1} = 1$$

και θα δείξουμε ότι

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1} \geq k + 1$$

Οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot\cdot, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ έχουν γινόμενο 1 και επομένως δε μπορούν να είναι όλοι μικρότεροι του 1 ούτε μπορούν να είναι όλοι μεγαλύτεροι του 1 άρα θα υπάρχει ένας τουλάχιστον που θα είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1 και θα υπάρχει ένας τουλάχιστον που θα είναι μικρότερος ή ίσος του 1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha_k \geq 1$, $\alpha_{k+1} \leq 1$. Είναι

$$\alpha_1\alpha_2\cdots(\alpha_k\alpha_{k+1}) = 1$$

και επειδή οι k αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot\cdot, (\alpha_k\alpha_{k+1})$ έχεουν γινόμενο 1 το άθροισμα τους θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το k δηλαδή:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + (\alpha_k\alpha_{k+1}) \geq k$$

Θέλουμε

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1} \geq k + 1$$

Αρκεί:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1} \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + (\alpha_k\alpha_{k+1}) + 1$$

ή ισοδύναμα:

$$\alpha_k + \alpha_{k+1} - \alpha_k\alpha_{k+1} - 1 \geq 0$$

Η τελευταία σχέση ισχύει αφού:

$$\alpha_k + \alpha_{k+1} - \alpha_k\alpha_{k+1} - 1 = (\alpha_k - 1)(1 - \alpha_{k+1}) \geq 0$$

Κυρίως Απόδειξη Εφαρμόζουμε το Λήμμα στους αριθμούς

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt[n]{\alpha_1...\alpha_n}}, ..., \frac{\alpha_n}{\sqrt[n]{\alpha_1...\alpha_n}}$$

Λύση 7 (Βαγγέλης Μουρούκος) Στο βιβλίο Proofs from THE BOOK των M.Aigner και G.Ziegler υπάρχει η ακόλουθη απόδειξη του H. Alzer (1996) για τη γενικότερη ανισότητα

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n} \leq p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n,$$

όπου οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ είναι θετικοί και $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Θέτουμε

$$A := p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n$$

και

$$G := a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}.$$

Δίχως βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.

Παρατηρούμε ότι $a_1 \leq G \leq a_n$, οπότε υπάρχει $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ τέτοιος, ώστε $a_k \leq G \leq a_{k+1}$. Θα ισχύει τότε η σχέση

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \int_{a_i}^{G} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G}\right)dt + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{t}\right)dt \geq 0 \quad (1)$$

αφού η παράσταση μέσα σε κάθε ολοκλήρωμα είναι μη αρνητική.

Η σχέση (1) τώρα γράφεται ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{G}dt \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{a_i - G}{G} \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i (\ln a_i - \ln G) \Leftrightarrow$$

$$\frac{A}{G} - 1 \geqslant \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right) - \ln G = 0 \Leftrightarrow$$

$$A \geqslant G$$

και το συμπέρασμα έπεται!

Για να ισχύει η ισότητα, θα πρέπει όλα τα ολοκληρώματα στην (1) να είναι ίσα με μηδέν, οπότε θα πρέπει $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = G$.

Λύση 8 (Δημήτρης Χριστοφίδης)Ψάχνοντας στην βιβλιογραφία μπορείς να βρεις διάφορες αποδείξεις. Θα βάλω μερικές όταν βρω χρόνο. Κάνω την αρχή με Newman, D. J. Classroom Notes: Arithmetic, Geometric Inequality. Amer. Math. Monthly 67 (1960), no. 9, 886 Επαγωγή στο n . Η περίπτωση $n = 1$ είναι προφανής. Έστω ότι έχει αποδειχθεί η περίπτωση $n = k$. Για την περίπτωση $n = k+1$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 \cdots x_{k+1} = 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $x_{k+1} \geqslant 1$. Επειδή

$$x_1 \cdots x_k = \frac{1}{x_{k+1}}$$

από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε

$$x_1 + \cdots + x_k \geqslant \frac{k}{\sqrt[k]{x_{k+1}}}$$

και άρα

$$x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geqslant \frac{k}{\sqrt[k]{x_{k+1}}} + x_{k+1}$$

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι αν $x \geqslant 1$, τότε

$$\frac{k}{\sqrt[k]{x}} + x \geqslant k+1$$

Μια απόδειξη του πιο πάνω είναι να δειχθεί, παραγωγίζοντας, ότι η συνάρτηση

$$\frac{k}{\sqrt[k]{x}} + x$$

είναι αύξουσα. Ένας άλλος τρόπος είναι χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli που λέει ότι

$$(1+y)^r \geqslant 1 + ry$$

για κάθε $y \geqslant 0$ και r φυσικό. (Αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ή με το διωνυμικό θεώρημα.) Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα για $y = \sqrt[k]{x}$ και $r = k+1$ παίρνουμε

$$x\sqrt[k]{x} \geqslant 1 + (k+1)(\sqrt[k]{x} - 1) = (k+1)\sqrt[k]{x} - k$$

και διαιρώντας με το $\sqrt[k]{x}$ παίρνουμε το αποτέλεσμα.

Λύση 9 (Βαγγέλης Μουρούκος) Στο βιβλίο του P.S.Bullen Handbook of Means and their Inequalities (2003), μπορεί κανείς να βρει 74 αποδείξεις της ανισότητας αριθμητικου-γεωμετρικού μέσου. Δίχως αμφιβολία, θα υπάρχουν και άλλες...

Η παρακάτω απόδειξη του A.Hurwitz (1891) είναι αξιοσημείωτη, γιατί δίνει την ανισότητα αριθμητικούγεωμετρικού μέσου ως αποτέλεσμα ενός απέυθείας υπολογισμού της διαφοράς τους. Για μια συνάρτηση

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

των n πραγματικών μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$, θα συμβολίζουμε

$$P\left(f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\right):=\sum_{\sigma\in S_n} f\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right),$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται για όλες τις ($n!$ το πλήθος) δυνατές μεταθέσεις των μεταβλητών $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Για παράδειγμα, αν

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=x_1x_2\cdots x_n,$$

τότε

$$P\left(f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\right)=n!x_1x_2\cdots x_n,$$

ενώ αν

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=x_1^n,$$

τότε

$$P\left(f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\right)=(n-1)!\left(x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n\right).$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις φ_k , με $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$\varphi_k:=P\left(\left(x_1^{n-k}-x_2^{n-k}\right)\left(x_1-x_2\right)x_3x_4\cdots x_{k+1}\right).$$

Παρατηρούμε ότι αν $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ και $x_i\geq 0$ για $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, τότε $\varphi_k\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\geq 0$. Πράγματι, είναι

$$\varphi_k\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=$$
$$P\left(\left(x_1-x_2\right)^2\left(x_1^{n-k+1}+\cdots+x_2^{n-k+1}\right)x_3x_4\cdots x_{k+1}\right)\geq 0$$

με το ίσον να ισχύει αν και μόνο αν $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Επίσης, έχουμε ότι

$$\varphi_1:=P\left(\left(x_1^{n-1}-x_2^{n-1}\right)\left(x_1-x_2\right)\right)=$$

$$P\left(x_1^n\right)+P\left(x_2^n\right)-P\left(x_1^{n-1}x_2\right)-P\left(x_2^{n-1}x_1\right)\Rightarrow$$

$$\varphi_1=2P\left(x_1^n\right)-2P\left(x_1^{n-1}x_2\right)$$

και όμοια

$$\varphi_2=2P\left(x_1^{n-1}x_2\right)-2P\left(x_1^{n-2}x_2x_3\right),$$

$$\varphi_3=2P\left(x_1^{n-2}x_2x_3\right)-2P\left(x_1^{n-2}x_2x_3x_4\right),$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{n-1}=2P\left(x_1^2x_2x_3\cdots x_{n-1}\right)-2P\left(x_1x_2\cdots x_n\right).$$

Με πρόσθεση των παραπάνω σχέσεων κατά μέλη βρίσκουμε ότι

$$\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_{n-1}=2P\left(x_1^n\right)-2P\left(x_1x_2\cdots x_n\right),$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{n}-x_1x_2\cdots x_n=$$

$$\frac{1}{2n!}\left(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_{n-1}\right),$$

οπότε

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{n}-x_1x_2\cdots x_n\geq 0,$$

αποτέλεσμα ισοδύναμο με την αποδεικτέα ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου.

Λύση 10 (liolios19) Μιά απόδειξη με διαφορικό λογισμό Γ Λυκείου

Έστω:

$$f(x_1)=x_1+x_2+\cdots+x_n-n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n)}$$

με $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ και $n\in\mathbb{N}^*$ τότε :

$$f'(x_1)=1-(x_1)^{\frac{1-n}{n}}(x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

και έτσι:

$$f'(x_1)\geq 0\Leftrightarrow x_1\geq (x_2x_3\cdots x_n)^{1/(n-1)}$$

(Είναι $n{-}1\geq 0$) Άρα η $f(x_1)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x_1=(x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{1}{n-1}}$ Το ολικό ελάχιστο είναι τότε:

$$(x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{1}{n-1}}+x_2+\cdots x_n-n((x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{1}{n-1}}x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$=(x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{1}{n-1}}+x_2+\cdots x_n-n((x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{n}{n-1}})^{\frac{1}{n}}$$

$$=x_2+\cdots x_n-(n-1)(x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{1}{n-1}}$$

Όμως τότε η

$$g(x_2)=x_2+\cdots x_n-(n-1)(x_2x_3\cdots x_n)^{1/(n-1)}$$

έχει μορφή παρόμοια προς την φ άρα το ολικό ελάχιστό της παρουσιάζεται για

$$x_2=(x_3x_4\cdots x_n)^{1/(n-2)}$$

Και αναδρομικά το ελάχιστο όλων των ελαχίστων θα παρουσιάζεται για $x_n=x_{n-1}$, οπότε

$$x_{n-2}=\sqrt{x_nx_{n-1}}=x_n$$

και όμοια

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

Στην περίπτωση αυτή είναι εύκολο να δεί κανείς ότι το ελάχιστο (των ελαχίστων), δηλαδή το ελάχιστο της αρχικής παράστασης είναι το 0.

Η απόδειξη αυτή δεν επιδεικνύει μια γενική μέθοδο αλλά για πρώτη φορά την είδα σε κείμενο του Τρικαλινού μαθηματικού Δημήτριου Κατσαρού.

Λύση 11 (Νίκος Ζανταρίδης)

$$a_1+a_2+...+a_n\geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\quad(1)$$

• Αν ένας τουλάχιστον από τους $a_1,a_2,...,a_n$ είναι μηδέν τότε είναι φανερό ότι η (1) ισχύει $\ln x$ και μάλιστα θα ισχύει ως ισότητα μόνον όταν: $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

• Έστω τώρα $a_1, a_2, ..., a_n > 0$

Αν είναι $a_1 = a_2 = ... = a_n$ τότε η (1) ισχύει ως ισότητα. Έστω τώρα ότι οι $a_1, a_2, ..., a_n$ δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους. Θέτουμε:

$$M = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

και

$$b_k = \frac{a_k}{M}, \quad k = 1, 2, ..., n$$

Είναι φανερό ότι: $b_1 b_2 ... b_n = 1$ και ένας τουλάχιστον από τους $b_1, b_2, ..., b_n$ είναι διαφορετικός του 1 . Θεωρώ τη συνάρτηση:

$$f(x) = b_1^x + b_2^x + ... + b_n^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$f'(x) = b_1^x \ln b_1 + b_2^x \ln b_2 + ... + b_n^x \ln b_n$$

$$f''(x) = b_1^x (\ln b_1)^2 + b_2^x (\ln b_2)^2 + ... + b_n^x (\ln b_n)^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f'(x) > f'(0) = \ln b_1 + \ln b_2 + ... + \ln b_n$$

$$= \ln(b_1 b_2 ... b_n) = \ln 1 = 0$$

και η f συνεχής στο $[0, +\infty)$ Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα ισχύει:

$$f(1) > f(0) \Rightarrow$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_n > n \Rightarrow$$

$$\frac{a_1}{M} + \frac{a_2}{M} + ... + \frac{a_n}{M} > n \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n > n.M \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n > n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνον όταν:

$$a_1 = a_2 = ... = a_n$$

Βασικές βιβλιογραφικές αναφορές από τους Θάνο Μάγκο και Βαγγέλη Μουρούκο:

1. G.Hardy, E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library

2. E.F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Springer Verlag

3. P.S. Bullen, *Handbook of Means and their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers.

4. M.Aigner, G.Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer Verlag