ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210–3616532 – 3617784 - Fax: 210 – 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210–3616532 – 3617784 - Fax: 210 – 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΡΟΚΡΙΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΙΚΡΩΝ
ΑΘΗΝΑ, 11 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2009

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Κάποιος μαθητής έχει 7 φύλλα χαρτί.. Παίρνει μερικά από αυτά και σκίζει το καθένα σε 7 κομμάτια. Στη συνέχεια, επιλέγει μερικά από τα κομμάτια χαρτιού που έχει και σκίζει πάλι το καθένα σε 7 κομμάτια. Συνεχίζει την ίδια διαδικασία αρκετές φορές με τα κομμάτια που έχει κάθε φορά. Θα μπορέσει κάποια στιγμή να έχει συνολικά 2009 κομμάτια χαρτιού ;

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι στην αρχή επιλέγει α_1 από τα 7 κομμάτια χαρτιού τα οποία σκίζει σε 7 κομμάτια. Τότε συνολικά θα έχουμε $7-\alpha_1+7\alpha_1=7+6\alpha_1$ κομμάτια χαρτιού. Αν υποθέσουμε ότι μετά επιλέγει α_2 κομμάτια χαρτιού τα οποία σκίζει σε 7 κομμάτια, τότε συνολικά θα έχουμε $7+6\alpha_1-\alpha_2+7\alpha_2=7+6(\alpha_1+\alpha_2)$ κομμάτια χαρτιού. Αν συνεχίσουμε την διαδικασία κ φορές, τότε με όμοιο τρόπο θα μείνουν $7+6(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\kappa)$ κομμάτια χαρτιού. Αν λοιπόν στο τέλος μπορούσε να έχει 2009 κομμάτια χαρτιού τότε θα έπρεπε να ισχύει

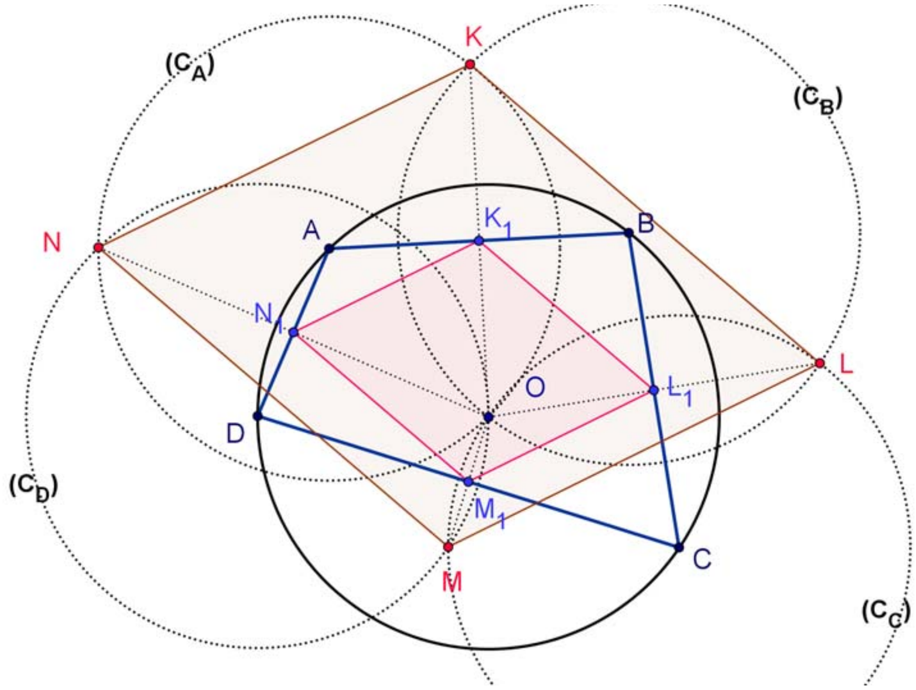
$$7+6(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\kappa)=2009 \Rightarrow 6(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\kappa)=2002,$$

που είναι άτοπο γιατί το 2002 δεν διαιρείται από το 6.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Με κέντρα τις κορυφές του τετραπλεύρου και ακτίνα R θεωρούμε κύκλους $C_A(A,R)$, $C_B(B,R)$, $C_C(C,R)$, $C_D(D,R)$. Οι κύκλοι C_A και C_B τέμνονται στο σημείο K , οι κύκλοι C_B και C_C τέμνονται στο σημείο L, οι κύκλοι C_C και C_D τέμνονται στο σημείο M και οι κύκλοι C_D και C_A τέμνονται στο σημείο N (τα σημεία K,L,M,N είναι τα δεύτερα κοινά σημεία των δύο κύκλων, δεδομένου ότι όλοι διέρχονται και από το σημείο O). Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KLMN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος)



Το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι η διάκεντρος των κύκλων C_A και C_B, οπότε θα είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους OK. Επειδή όμως οι κύκλοι έχουν την ίδια ακτίνα το τετράπλευρο $AOBK$ είναι ρόμβος, άρα το σημείο K_1 είναι το μέσο του AB.

Με όμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι το σημείο L_1 είναι το μέσο του BC, το σημείο M_1 είναι το μέσο του CD και το σημείο N_1 είναι το μέσο του AD.

Από τα τρίγωνα OKL, OLM, OMN και ONK συμπεραίνουμε ότι: $KL \parallel K_1L_1$, $LM \parallel L_1M_1$, $MN \parallel M_1N_1$ και $NK \parallel N_1K_1$ (διότι τα ευθύγραμμα τμήματα K_1L_1, L_1M_1, M_1N_1 και N_1K_1 συνδέουν τα μέσα των πλευρών τριγώνου).

Επομένως τα τετράπλευρα $KLMN$ και $K_1L_1M_1N_1$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες. Γνωρίζουμε όμως ότι τα μέσα των πλευρών οποιουδήποτε κυρτού τετραπλεύρου ορίζουν παραλληλόγραμμο. Άρα το τετράπλευρο $KLMN$ είναι παραλληλόγραμμο.

$2^{ος}$ τρόπος

Η KO είναι η κοινή χορδή των ίσων κύκλων C_A και C_B, οπότε με τη διάκεντρο AB τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. Άρα το τετράπλευρο $KAOB$ είναι ρόμβος, οπότε θα είναι

$$AK =\parallel OB . \qquad (1)$$

Ομοίως το τετράπλευρο $LCOB$ είναι ρόμβος και είναι

$$CL =\parallel OB . \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι το τετράπλευρο $KACL$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι

$$KL =\parallel AC . \qquad (3)$$

Εργαζόμενοι ομοίως αποδεικνύουμε ότι και το τετράπλευρο $MNAC$ είναι παραλληλόγραμμο και

$$NM =\parallel AC . \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έπεται ότι το τετράπλευρο $KLMN$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται οι μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί *α, β, γ* για τους οποίους ισχύει ότι ο αριθμός

$$\frac{\alpha\sqrt{2}+\beta\sqrt{3}}{\beta\sqrt{2}+\gamma\sqrt{3}}$$

είναι ρητός. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

είναι ακέραιος.

Λύση

Καταρχήν αν ισχύει σχέση της μορφής $\alpha_1\sqrt{2}+\alpha_2\sqrt{3}=\alpha_3\sqrt{2}+\alpha_4\sqrt{3}$ με $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{Q}^*$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $\alpha_1=\alpha_3$ και $\alpha_2=\alpha_4$.

Η απόδειξη είναι απλή, αν γράψουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\left(\alpha_1-\alpha_3\right)\sqrt{2}=(\alpha_4-\alpha_2)\sqrt{3}.$$

Αν τώρα $\alpha_1-\alpha_3\neq 0$, τότε $\dfrac{\alpha_4-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, που είναι άτοπο διότι το πρώτο μέλος είναι ρητός και το δεύτερο μέλος είναι άρρητος. Άρα είναι $\alpha_1=\alpha_3$ και $\alpha_2=\alpha_4$.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $\dfrac{\alpha\sqrt{2}+\beta\sqrt{3}}{\beta\sqrt{2}+\gamma\sqrt{3}}=\kappa\in\mathbb{Q}$, τότε, λόγω της προηγούμενης πρότασης, ισχύει $\alpha=\kappa\beta$ και $\beta=\kappa\gamma$, δηλαδή είναι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}\Leftrightarrow\beta^2=\alpha\gamma.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2=\alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2-\alpha\gamma\\&=(\alpha+\gamma)^2-\beta^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma),\end{aligned}$$

οπότε, πράγματι, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο ακέραιος $\alpha-\beta+\gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να προσδιορίσετε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y,z που είναι λύσεις του συστήματος

$$x+y+z=xy+yz+zx$$
$$xyz=1$$

και έχουν το ελάχιστο δυνατό άθροισμα.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Γράφουμε το δεδομένο σύστημα στη μορφή

$$xy+yz+zx=x+y+z \qquad (1)$$
$$xyz=1. \qquad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$xyz-\left(xy+yz+zx\right)=1-\left(x+y+z\right)$$
$$\Leftrightarrow xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1=0$$

$$\Leftrightarrow xy(z-1)-x(z-1)-y(z-1)+(z-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (z-1)(xy-x-y+1)=0$$
$$(z-1)(x-1)(y-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } y=1 \text{ ή } z=1.$$

Για $x=1$, από τις (1) και (2) λαμβάνουμε την εξίσωση $yz=1$, η οποία έχει τις λύσεις
$$(y,z)=\left(a,\frac{1}{a}\right),\ a>0\,,$$
οπότε λύσεις του προβλήματος είναι οι τριάδες
$$(x,y,z)=\left(1,a,\frac{1}{a}\right),\ a>0.$$

Ομοίως, αν θεωρήσουμε $y=1$ ή $z=1$ προκύπτουν οι λύσεις
$$(x,y,z)=\left(a,1,\frac{1}{a}\right) \text{ ή } (x,y,z)=\left(a,\frac{1}{a},1\right),\ a>0.$$

Επειδή για κάθε $a>0$ αληθεύει η ανισότητα
$$x+y+z=1+a+\frac{1}{a}\geq 1+2=3\,,$$
και η ισότητα αληθεύει μόνο για $a=1$, έπεται ότι μεταξύ των λύσεων του προβλήματος, η τριάδα $(x,y,z)=(1,1,1)$ είναι εκείνη που κάνει το άθροισμα $x+y+z$ ελάχιστο.

2^{ος} τρόπος

Έστω ότι η τριάδα θετικών πραγματικών αριθμών (x,y,z) είναι λύση του δεδομένου συστήματος. Τότε, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, λαμβάνουμε
$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow x+y+z\geq 3\,,$$
ενώ η ισότητα ισχύει για $x=y=z$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $x+y+z$ που είναι λύση του δεδομένου συστήματος είναι 3 και συμβαίνει για $x=y=z$.

Για $x=y=z$ από την εξίσωση $xyz=1,\ x,y,z>0$ προκύπτει ότι $x=y=z=1$, η οποία είναι η ζητούμενη λύση αφού ικανοποιεί και την εξίσωση $x+y+z=xy+yz+zx$.