Συνεχής συνάρτηση με σύνολο ριζών υπεραριθμήσιμο σύνολο άρρητων

Γρηγόρης Κωστάκος

4 Ιανουαρίου 2025

Ισχυρισμός. Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει ως σύνολο ριζών ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ενώ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus A$ ισχύει $f(x) \neq 0$.

Απάντηση: Ψευδής. Θα κατασκευασθεί, με μέθοδο ανάλογη εκείνης της κατασκευής του συνόλου Cantor, συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο ριζών ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο άρρητων αριθμών.

$1^{\text{ο}}$ βήμα: Στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ορίζουμε την συνάρτηση $f_{1,1}\colon \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}\,;$

$$f_{1,1}(x) = 2^2\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right)^2\left(x - \tfrac{2\pi}{3}\right)^2,$$

η οποία μηδενίζεται μόνο στα άκρα του $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

$2^{\text{ο}}$ βήμα: Στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\right]$ ορίζουμε, αντίστοιχα, τις συναρτήσεις $f_{2,1}\colon \left[\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}\right] \longrightarrow \mathbb{R}\,;$

$$f_{2,1}(x) = 2^6\left(x - \tfrac{\pi}{9}\right)^2\left(x - \tfrac{2\pi}{9}\right)^2,$$

και $\;f_{2,2}\colon \left[\frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\right] \longrightarrow \mathbb{R}\,;$

$$f_{2,2}(x) = 2^6\left(x - \tfrac{7\pi}{9}\right)^2\left(x - \tfrac{8\pi}{9}\right)^2,$$

οι οποίες μηδενίζονται μόνο στα άκρα του πεδίου ορισμού τους.

Επαναλαμβάνουμε αναδρομικά την ίδια διαδικασία. Στο n-στό βήμα το σύνολο

$$K_{n-1} = \left(\bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1}\left[\tfrac{(3k+1)\pi}{3^n}, \tfrac{(3k+2)\pi}{3^n}\right]\right) \Big\backslash \left(\bigcup_{k=0}^{3^{n-2}-1}\left[\tfrac{(3k+1)\pi}{3^{n-1}}, \tfrac{(3k+2)\pi}{3^{n-1}}\right]\right),\ n \geqslant 2\,,$$

αποτελείτε από 2^{n-1}, ξένα μεταξύ τους, κλειστά διαστήματα $I_{n,m}$, $m = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$, σε καθένα από τα οποία ορίζουμε, με παρόμοιο τρόπο, την αντίστοιχη συνάρτηση. Π.χ. για το διάστημα $I_{n,1} = \left[\frac{\pi}{3^n}, \frac{2\pi}{3^n}\right]$ ορίζουμε $f_{n,1} \colon \left[\frac{\pi}{3^n}, \frac{2\pi}{3^n}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$f_{n,1}(x) = 2^{n(n+1)}\left(x - \frac{\pi}{3^n}\right)^2\left(x - \frac{2\pi}{3^n}\right)^2 ,$$

η οποία μηδενίζεται μόνο στα άκρα του $\left[\frac{\pi}{3^n}, \frac{2\pi}{3^n}\right]$.

Συνεχίζοντας, επ' άπειρο, την διαδικασία, το σύνολο

$$\mathfrak{K} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$$

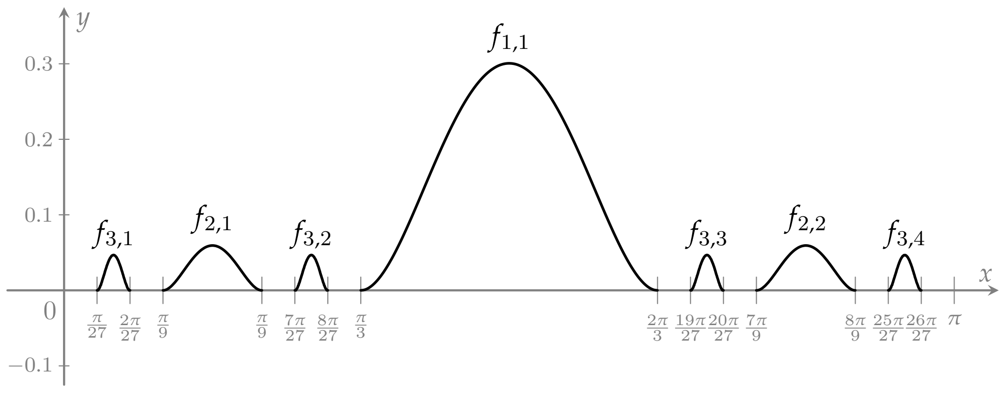
είναι το $[0, \pi]$. Έτσι, ορίζεται, κατά μοναδικό τρόπο, μια συνάρτηση $f \colon [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f|_{I_{n,m}} = f_{n,m}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $m = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$, η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και έχει σύνολο ριζών το σύνολο

$$[0, \pi] \setminus \mathfrak{K}_0 = [0, \pi] \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n^{\circ} = \partial \mathfrak{K}_0 .$$

Δηλαδή το σύνολο ριζών της f είναι ακριβώς το "τροποποιημένο" σύνολο Cantor $\mathfrak{C}_\pi$ το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο και έχει στοιχεία μόνο άρρητους αριθμούς.

Για να έχουμε μια συνάρτηση $\tilde{f} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα της f αρκεί να "επαναλάβουμε" περιοδικά την f με περίοδο π, ορίζοντας, για κάθε $x \in [0, \pi]$, $m \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{f}(x + m\pi) = f(x) .$$



Σχήμα 1

Σημείωση: Στο Σχήμα 1 απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των $f_{1,1}$, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$, $f_{3,1}$, $f_{3,2}$, $f_{3,3}$ και $f_{3,4}$.

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $\tilde{f}$ είναι και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, της οποίας το σύνολο ριζών είναι υπεραριθμήσιμο και έχει στοιχεία μόνο άρρητους αριθμούς. $\square$