Έστω $f:R\to R$ με $\left[f(x)\right]'=(2-f(x))e^{f(x)},\forall x\in R$ σχέση (1) και $f(0)=1$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το τύπο της.

r_boris

Αν η f είναι σταθερή θα πρέπει $f(x)=c,\forall x\in R$

Για $x=0: f(0)=1\Leftrightarrow c=1$ άρα $f(x)=1,\forall x\in R$ άτοπο γιατί δεν επαληθεύει την σχέση (1).

Αφού η f είναι μη σταθερή , συνεχής και ορισμένη σε ένα διάστημα η εικόνα της, $f(R)$ θα είναι ένα διάστημα.

Θα εξετάσουμε εάν το $f(R)$ έχει κάποιο άκρο κλειστό, δηλαδή εάν έχει ακρότατο.

Διερεύνηση

- Αν η f έχει ελάχιστο στο κ, τότε :
  - κ εσωτερικό σημείο του R
  - η f είναι παραγωγίσιμη στο κ
  - η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο κ άρα και τοπικό

Από θεώρημα Φερμουάρ θα έχουμε

$f'(\kappa)=0\Leftrightarrow(2-f(\kappa))e^{f(\kappa)}=0\Leftrightarrow f(\kappa)=2$ άτοπο αφού $f(0)=1<2$

Συνεπώς η f δεν έχει ελάχιστο . Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό άκρο του $f(R)$ θα είναι ανοικτό.

- Αν η f έχει μέγιστο στο κ, τότε :
  - κ εσωτερικό σημείο του R
  - η f είναι παραγωγίσιμη στο κ
  - η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο κ άρα και τοπικό

Από θεώρημα Φερμουάρ θα έχουμε

$f'(\kappa)=0 \Leftrightarrow (2-f(\kappa))e^{f(\kappa)}=0 \Leftrightarrow f(\kappa)=2$.

Συνεπώς αν η f έχει μέγιστο τότε αυτό θα είναι το 2 . Αυτό σημαίνει ότι το δεξιό άκρο του $f(R)$ θα είναι κλειστό 2.

Συνεπώς $f(x)\le 2, \forall x \in R$ που σημαίνει ότι

$f'(x)\ge 0, \forall x \in R$, δηλαδή ότι η f είναι **αύξουσα** στο R.

Έστω κ_0 το μικρότερο από τα κ στα οποία η f παρουσιάζει μέγιστο.

Έστω $\kappa_0 \le 0 \Leftrightarrow f(\kappa_0)\le 1$ άτοπο, άρα $\kappa_0>0$

Για $x>\kappa_0 \Rightarrow f(x)\ge 2$ όμως $f(x)\le 2$ άρα

$f(x)=2, \forall x \in [\kappa_0,+\infty)$ και επειδή κ_0 το μικρότερο από τα κ στα οποία η f παρουσιάζει μέγιστο, θα είναι

$f(x)<2, \forall x \in (-\infty,\kappa_0)$ου σημαίνει ότι **η f είναι γνησίως αύξουσα στο** $(-\infty,\kappa_0]$.

Ισχύει $\int_0^{\kappa_0} f'(x)dx = f(\kappa_0)-f(0)=2-1=1$

Από ΘΜΤ στην $\int_0^x f(t)dt, x\in[0,\kappa_0]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\kappa_0)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\frac{\int_0^{\kappa_0} f(t)dt-\int_0^{0} f(t)dt}{\kappa_0-0}=\frac{\int_0^{\kappa_0} f(t)dt}{\kappa_0}$$

Είναι

$$0<\xi<\kappa_0 \underset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\overset{f}{\Leftrightarrow}} f(0)<f(\xi)<f(\kappa_0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<\frac{\int_0^{\kappa_0} f(t)dt}{\kappa_0}<2 \Leftrightarrow \kappa_0<\int_0^{\kappa_0} f(t)dt<2\kappa_0$$

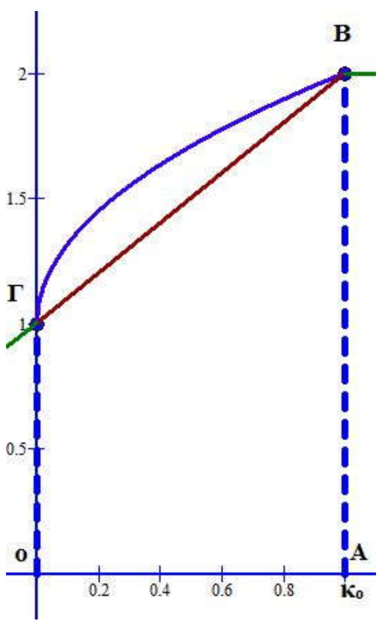
Επίσης
$0<x<\kappa_0 \Leftrightarrow f(0)<f(x)<f(\kappa_0)\Leftrightarrow 1<f(x)<2$.
Επειδή $f''(x)=(1-f(x))(2-f(x))e^{2f(x)}$, θα είναι
$f''(x)<0, \forall x\in(0,\kappa_0)$, που σημαίνει ότι **η f είναι κοίλη στο** $[0,\kappa_0]$
Ισχύει

$$\int_0^{\kappa_0} -f'(x)e^{-f(x)}dx=-\int_0^{\kappa_0}(2-f(x))dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[e^{-f(x)}\right]_0^{\kappa_0}=-[2x]_0^{\kappa_0}+\int_0^{\kappa_0} f(x)dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\kappa_0} f(x)dx=e^{-2}-e^{-1}+2\kappa_0$$

Όμως το $\int_0^{\kappa_0} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα χ'χ και τις ευθείες χ = 0, χ = κ_0



Άρα αν Ω το χωρίο, τότε
$E(\Omega)=e^{-2}-e^{-1}+2\kappa_0$

Επίσης $(OAB\Gamma)=\frac{1+2}{2}\cdot\kappa_0=\frac{3\kappa_0}{2}$

Εξαιτίας της κοιλότητας

$E(\Omega)>(OAB\Gamma)\Leftrightarrow E(\Omega)>\frac{3}{2}\kappa_0$

Συνεπώς πρέπει

$\frac{3}{2}\kappa_0 < E(\Omega) < 2\kappa_0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\kappa_0 < e^{-2} - e^{-1} + 2\kappa_0 < 2\kappa_0$ άρα

$\kappa_0 > 2\frac{e-1}{e^2}$ είναι $2\frac{e-1}{e^2} > \frac{1}{e}$