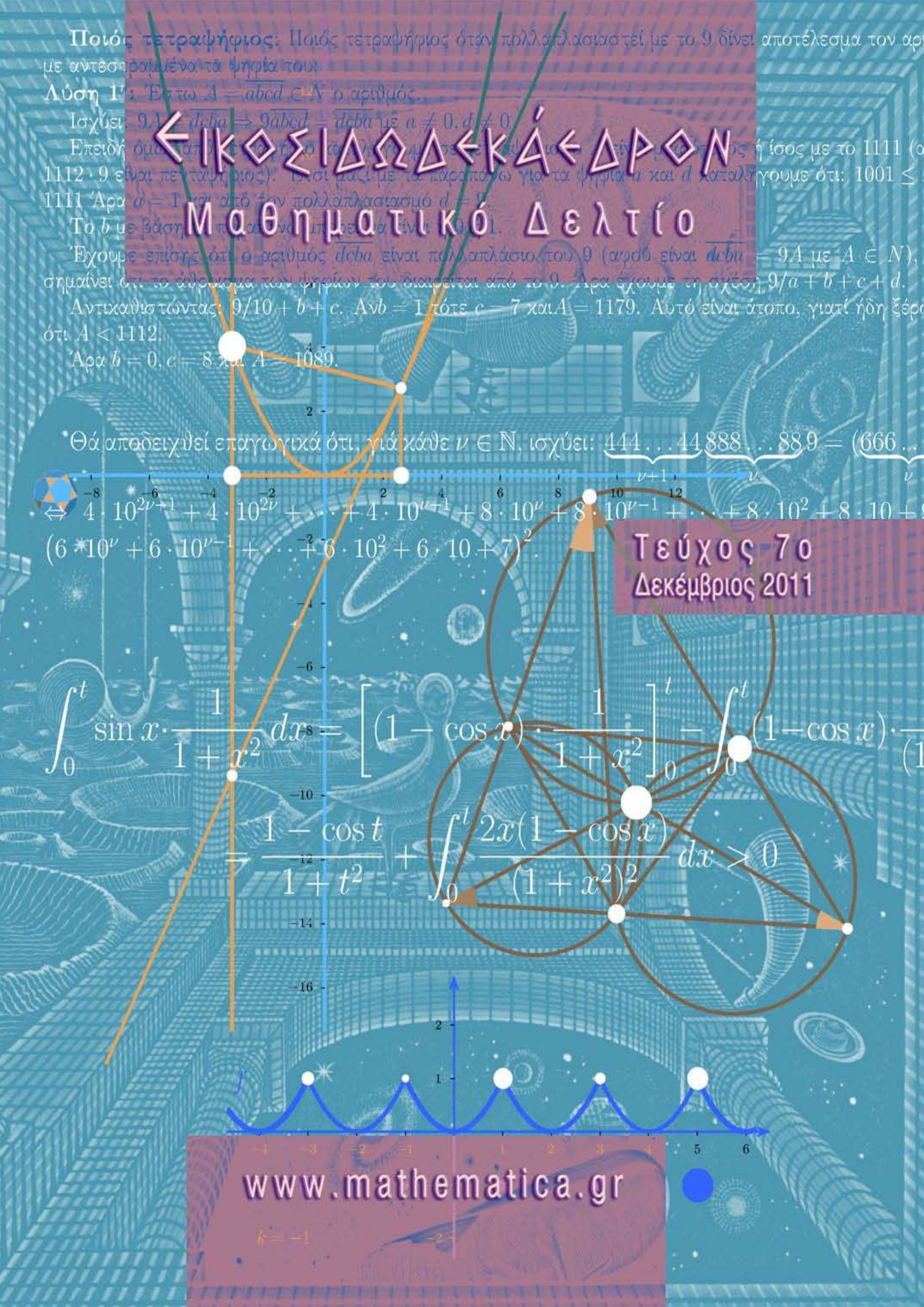
Εικοσιδωδεκάεδρον

Μαθηματικό Δελτίο

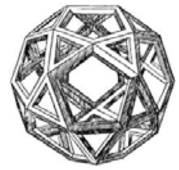


Τεύχος 7ο

Δεκέμβριος 2011

www.mathematica.gr

Το «Εικοσιδωδεκάεδρον» παρουσιάζει θέματα που έχουν συζητηθεί στον ιστότοπο http://www.mathematica.gr.
Η επιλογή και η φροντίδα του περιεχομένου γίνεται από τους Επιμελητές του http://www.mathematica.gr.
Μετατροπές σε LaTeX: *Φωτεινή Καλδή, Νίκος Κατσίπης, Αναστάσης Κοτρώνης, Θάνος Μάγκος, Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Αλέξανδρος Συγκελάκης, Αχιλλέας Συννεφακόπουλος Δημήτρης Χριστοφίδης* , **Σχήματα:** *Μιχάλης Νάννος, Χρήστος Τσιφάκης* **Σελιδοποίηση:** *Αναστάσης Κοτρώνης, Νίκος Μαυρογιάννης, Αλέξανδρος Συγκελάκης*, **Εξώφυλλο:** *Γρηγόρης Κωστάκος.* Στοιχειοθετείται με το LaTeX.



Εικοσιδωεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στις οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιωνεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0, 0, \pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.
Πηγή:http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron , Απόδοση: *Παναγιώτης Γιαννόπουλος*

Οι Ασκήσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Atemlos) Ο κ. Χρήστος έγραψε δυο αριθμούς στον πίνακα και ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το γινόμενο. Το ψηφίο μονάδων του ενός από τους δυο αριθμούς ήταν 8 άλλα δεν ήταν γραμμένο καθαρά. Ο Γιάννης το πήρε λανθασμένα για 6 και η απάντησή του ήταν 4740 ενώ η Μαίρη το πέρασε για 3 και η απάντησή της ήταν 4695. Ποια είναι τελικά η σωστή απάντηση;*

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Να βρεθεί τετραψήφιος ακέραιος που είναι τέλειο τετράγωνο και έχει την ιδιότητα: Αν αυξήσουμε τα ψηφία του κατά μία μονάδα, προκύπτει τέλειο τετράγωνο.*

Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να συγκρίνετε τους αριθμούς* $16^{18}, 18^{16}$ *χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις.*

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Τους φυσικούς αριθμούς* $1, 2, 3, 4, \ldots,$ *τους γράφουμε όπως δείχνει το παρακάτω διάγραμμα:*

$$\begin{array}{lllllll} 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}$$

(α) *Ποιος είναι ο πρώτος και ποιος ο τελευταίος αριθμός της 20ης σειράς, αν συνεχίσουμε να συμπληρώνουμε τον πίνακα;*

(β) *Σε ποια γραμμή και σε ποια στήλη θα μπει ο αριθμός* 2011*;*

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο KARKAR) Το ένα ορθογώνιο αποτελείται από δύο τετράγωνα πλευράς* a*.*

Συγκρίνατε τα εμβαδά των δύο ορθογωνίων και βρείτε το τμήμα x *συναρτήσει της* a*.*

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) Να συγκριθούν οι αριθμοί:*

(α) $A = 3^{183}$ *και* $B = 2^{307} - 2^{306} - 2^{305}$.

(β) $\Gamma = \dfrac{3^{20}}{2^{30}}$ *και* $\Delta = \dfrac{5^{18}}{2^{42}}$.

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Αν για τις πλευρές* a, b, c *ενός τριγώνου* ABC *ισχύει ότι* $\dfrac{a(b+c)}{a+b} + \dfrac{c(a+b)}{b+c} = a + c$*, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές με κορυφή το* B*.*

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης) Υπολογίστε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:*

1) $A = \sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{\sqrt{5}}{18}} - \sqrt{\dfrac{1}{6} - \dfrac{\sqrt{5}}{18}}$

2) $B = \sqrt{1 + \dfrac{2}{5}} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{2}{6}} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{2}{7}} \cdots \sqrt{1 + \dfrac{2}{58}}$

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα

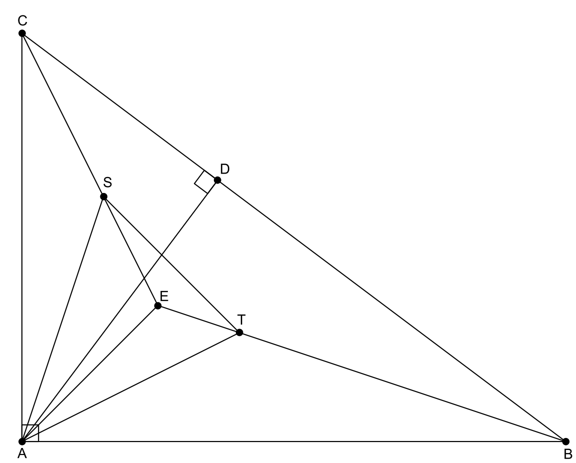
ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο KARKAR) Να βρεθούν οι αριθμοί* x, y*, για τους οποίους ισχύει :* $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = x + \dfrac{y}{4}$

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο Κώστας Καπένης) Αν* x, y, z *μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει* $x + y + z = 0$ *να αποδείξετε ότι:*

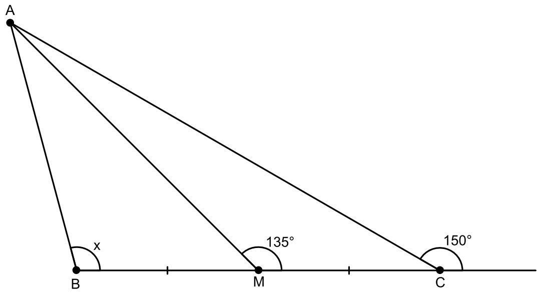
$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{z + x} = \frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy}.$$

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο KARKAR) Στο ορθογώνιο τρίγωνο* $ABC\,(\widehat{A} = 90^\circ)$*,* E *είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του και* AD *το ύψος προς την υποτείνουσα. Οι διχοτόμοι των* $\widehat{DAC}$*,* $\widehat{DAB}$ *τέμνουν τις* CE*,* BE *στα* S*,* T *αντίστοιχα. Δείξτε ότι* $AE \perp ST$*.*



ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο KARKAR Σε τρίγωνο* ABC *φέρω τη διάμεσο* AM*. Αν είναι* $\widehat{C}_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = 150^\circ$*,* $\widehat{AMC} = 135^\circ$*, να βρείτε την* $\widehat{ABC}$*.*



Μαθηματικά Β΄ Λυκείου,
Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει η Φωτεινή Καλδή) Να δειχθεί η συνεπαγωγή*

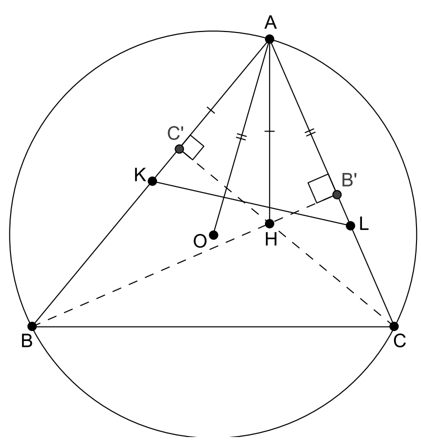
$$\eta\mu^{111}(x) + \sigma\upsilon\nu^{111}(x) = 1 \Longrightarrow \eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x) = 1.$$

(Συμπλήρωση από το Μιχάλη Λάμπρου: Ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή)

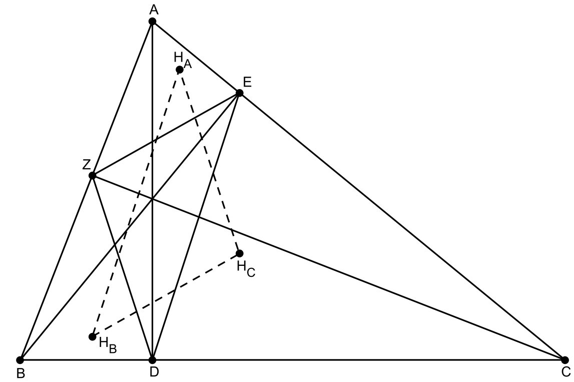
ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει η Ζωή Κρυφού) Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί* a, b *αν είναι γνωστό ότι οι αριθμοί* $\frac{y_1}{3}, -2x_1$ *είναι ρίζες του πολυωνύμου* $P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 6$, *όπου* (x_1, y_1) *είναι η λύση του συστήματος:* $\begin{cases} y = 3^x + 6 \\ x + \log_3 y = 3 \end{cases}$.

Μαθηματικά Β΄ Λυκείου,
Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Δίνεται τρίγωνο* $\triangle\, ABC$ *εγγεγραμμένο σε κύκλο* (O, R) *και* H *το ορθόκεντρό του. Αν* $K \in AB : AK = AH$ *και* $L \in AC : AL = AO$ *να δειχθεί ότι:* $KL = R$.



ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Έστω τρίγωνο* $\triangle\, ABC$ *και* AD, BE, CZ *τα ύψη του. Αν* H_A, H_B, H_C *είναι τα ορθόκεντρα των τριγώνων* $\triangle\, ZAE$, $\triangle\, DBZ$, $\triangle\, ECD$ *αντίστοιχα, να δειχθεί ότι* $\triangle\, H_AH_BH_C = \triangle\, DEZ$.



Μαθηματικά Β΄ Λυκείου,
Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο KARKAR) Θέλοντας να τριχοτομήσουμε την πλευρά* BC *ενός τριγώνου* ABC, *ακολουθούμε την εξής πορεία: Βρίσκουμε το μέσο* M *της* BC, *στη συνέχεια το μέσο* N *της* AM *και ακολούθως το μέσο* L *της* BN. *Η προέκταση της* AL *τέμνει την* BC *στο σημείο* S. *Να αποδείξετε ότι*

$$BS = \frac{1}{6}BC.$$

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) Θεωρούμε διάνυσμα* $\vec{a}$ *με* $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ *καθώς και ένα άλλο διάνυσμα* $\vec{b}$ *που είναι τέτοιο, ώστε να ισχύει ότι:* $3\left|\vec{b} - \vec{a}\right|\vec{b} = \left|5\vec{b} + 3\vec{a}\right|\vec{a}$. *Να βρείτε τον αριθμό* $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου,
Γενική Παιδεία

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Απόκης Γιώργος) Δίνεται η συνάρτηση*

$$f(x) = xe^{\alpha x + \alpha}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha > 0.$$

(α) *Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση*

$$f''\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \alpha f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \alpha^2 f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0.$$

(β) *Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του* α *ώστε η εφαπτομένη της* C_f *στο* $M(0, f(0))$ *να σχηματίζει γωνία* 45° *με τον* xx'.

(γ) *Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της* f.

(δ) *Να βρείτε την τιμή του* α *ώστε το ελάχιστο της* f *να πάρει τη μέγιστη τιμή του.*

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Περικλής Παντούλας) Έστω*

$$f(x) = x^2 + (3 - \alpha)x - (\alpha + 5), \qquad x, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Για ποια τιμή του α *το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της* f *είναι ελάχιστο;*

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου,
Κατεύθυνση, Μιγαδικοί
Αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο Σάκης) Έστω οι* z_1, z_2, z_3, z_4 *που ανήκουν στο* $\mathbb{C}$, *ώστε* z_1, z_2 *διάφοροι του* 0 *και* $\frac{z_1}{z_2}$ *να ανήκει στο* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Έστω ότι οι* $\frac{z_1 + z_3 + z_4}{z_2}$, $\frac{z_2 + z_3 + z_4}{z_1}$ *είναι πραγματικοί. Δείξτε ότι* $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο Γιώργος Κ77) Οι διανυσματικές ακτίνες των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών z, w σχηματίζουν γωνία $60°$. Να δείξετε ότι $|z+w| \leq \sqrt{3}|z-w|$.*

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Όρια, Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \xi$.*

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Chris) Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Αν ισχύει: $f(2008) = 1$, $f(2009) = 10$

και $\dfrac{f(f(x))}{f(f(x)+2)} = \dfrac{f(f(x)+3)}{f(f(x)+1)}, \forall x \in \mathbb{R}$ τότε:

- *Α) Να δείξετε οτι $f(2)f(3) = f(4)f(5)$.*
- *Β) Να δείξετε οτι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in [2,3]$ τέτοιο ώστε: $f^2(\rho) = f(2)f(3)$.*
- *Γ) Δείξτε οτι η f δεν είναι $1-1$.*
- *Δ) Αν η f είναι γνησίως αυξουσα στο $[2008, 2009]$ και $x_1, x_2 \in [2008, 2009]$, να δείξετε οτι υπάρχει ένα μοναδικό $x_0 \in [2008, 2009]$ τέτοιο ώστε:*

$$3f(x_0) = f(x_1) + 2f(x_2).$$

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφύδης) Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:*

$$f(x + f'(x)) \geq f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Pla.pa.s) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση*
$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$f'(x)\left(\ln(f^2(x)+x^2)+x^4\right) =$$

$$f'(x)\left(\eta\mu(f^2(x)+x^2) - \frac{1}{f^2(x)}\right) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Να βρεθεί η παράγωγος της.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνουν οι Σωτήρης Λουρίδας - Μυρτώ Λιάπη) Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση*

$$3\int_0^x f(t)dt - \int_1^{-x} f(t)dt = 2x^2 + 2x + 1 \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνουν οι Μίλτος Παπαγρηγοράκης - Κώστας Καπένης) Έστω συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει*

$$\int_0^x f(t)dt < f(x), \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0, \quad \forall x \in [0, +\infty)$.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο BAGGP93) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(0) = 1$ και $f^2(x) \neq 6x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Ισχύει επίσης ότι*

$$216x^3 - 2[2f'(x)f(x) - 6] = f^6(x) - 18xf^4(x) + 108[xf(x)]^2,$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

- *i) Να δείξετε ότι $f^2(x) - 6x = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ με $x \in [0, +\infty)$.*
- *ii) Να υπολογίσετε την παράσταση*

$$\int_1^{e-1}\left[f^4(x) - 12xf^2(x)\right]dx + 72\int_1^{e-1}\int_0^x t dt$$

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα $[a, b]$, ώστε να ισχυουν οι παρακάτω:*

1. *$f''(x) = -f(x), \forall x \in [a, b]$*
2. *$f(x) > f'(x), \forall x \in [a, b]$*
3. *$f(b) - f'(b) = f(a) - f'(a)$.*

Να δείξετε ότι:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(x) - f'(x)}dx = \frac{1}{2}(b-a).$$

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Θέματα με Απαιτήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to R$ που είναι τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{x}{4}\right) = 2x$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να βρείτε τον τύπο της f.*

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Έστω οι συναρτήσεις: $f : R_+ \to R$ παραγωγίσιμη και $g : R \to R$ αύξουσα, για τις οποίες ισχύει: $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(x) + g(f(x)) = 0, \forall x \geq 0$. Να δειχθεί ότι: $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.*

Ασκήσεις μόνο για μαθητές

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Βρείτε το*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2\ln x} - x}{(\ln x)^x + x}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες*
$f(0) = 0$ και $f(x+y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Δίνεται η εξίσωση*

$$x(x+1) = pq(x-y),$$

όπου p, q πρώτοι, διαφορετικοί μεταξύ τους. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$, στις οποίες το y είναι κοινό.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ ώστε*

$$\frac{f(x)+y}{x+f(y)} + \frac{f(x)y}{xf(y)} = \frac{2(x+y)}{f(x+y)}, \ \forall x, y \in \mathbb{N}^*$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο Γιάννης Τσόπελας) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle ABC$ με $AB = AC$ και έστω τα σημεία K, L μεταξύ των A, B, ώστε να είναι $AK = KC$ και CL διχοτόμος της γωνίας $\angle ACK$ και $BK = 2KL$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του $\triangle ABC$.*

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει ο Πέτρος Ράπτης) Με δοσμένο το κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ κατασκευάζουμε ένα νέο τετράπλευρο ως εξής : Παίρνουμε το σημείο E έτσι ώστε το A να είναι το μέσον του DE. Ομοίως το σημείο Z ώστε το B να είναι μέσον του AZ. Ομοίως το σημείο H ώστε το C να είναι μέσον του BH και τέλος το σημείο K ώστε το D να είναι μέσον του CK. Αποδείξτε ότι $(EZHK) = 5(ABCD)$.*

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Κάποια κελιά ενός 2011×2011 πίνακα έχουν μολυνθεί από μια ασθένεια. Η ασθένεια επεκτείνεται και στα υπόλοιπα κελιά με βάση τον ακόλουθο κανόνα:*

Για κάθε τέσσερα γειτονικά κελιά που σχηματίζουν ένα 2×2 υποπίνακα, αν τα τρία είναι μολυσμένα, τότε μολύνεται και το τέταρτο.

Να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός μολυσμένων κελιών ώστε να μπορούν να μολύνουν με βάση τον πιο πάνω κανόνα όλα τα υπόλοιπα κελιά.

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρείτε τους μη μηδενικούς πραγματικούς $x_1, x_2, \ldots, x_n$ για τους οποίους ισχύει*

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = x_2 + \frac{1}{x_3} = \cdots = x_{n-1} + \frac{1}{x_n} = x_n + \frac{1}{x_1} = 2$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο Γρηγόρης Κακλαμάνος) Έστω οξυγώνιο $\triangle ABC$. Ο κύκλος με διάμετρο το ύψος BD τέμνει τις πλευρές AB και BC στα σημεία K και L αντίστοιχα. Οι εφαπτόμενες στα σημεία K και L τέμνονται στο σημείο X. Να αποδειχθεί ότι η BX διχοτομεί την AC.*

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Έστω τρίγωνο $\triangle ABC$ και (I) ο εγγεγραμμένος κύκλος του. Οι κάθετες ευθείες επί των AI, BI, CI στο σημείο I, τέμνουν τυχούσα εφαπτομένη του (I) σε σημείο του έστω S, στα σημεία M, N, P, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AM, BN, CP τέμνονται στο ίδιο σημείο έστω T.*

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της πραγματικής σταθερής M έτσι ώστε*

$$(a+bc)(b+ac)(c+ab)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq Mabc$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c για τους οποίους $a + b + c = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Στο επίπεδο δίνονται*

(α) *100 σημεία. Να δείξετε ότι υπάρχει ευθεία που αφήνει σε κάθε ημιεπίπεδο που ορίζει, ακριβώς 50 από αυτά τα σημεία.*

(β) *2010 σημεία. Να δείξετε ότι υπάρχει κύκλος που περιέχει στο εσωτερικό του ακριβώς 1005 από αυτά τα σημεία και τα υπόλοιπα 1005 σημεία βρίσκονται στο εξωτερικό του.*

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Φοιτητές

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Προτείνει ο Πέτρος Βαλέττας) Έστω $f : [0,1] \to [0,\infty)$ κοίλη συνάρτηση. Να δειχθεί ότι*

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Να εξεταστεί αν υπάρχουν άπειρα πολυώνυμα της μορφής $x^n - 1$ με n περιττό τα οποία να έχουν διαιρέτες όλων των βαθμών μικρότερου ή ίσου του n στο $\mathbb{Z}[x]$.*

Άλγεβρα ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Σε μια ομάδα G υπάρχουν στοιχεία a, b τέτοια ώστε $a^3b = ba^2$ και $a^2b = ba^3$. Να δείξετε ότι $a^5 = e$, όπου e είναι το ταυτοτικό στοιχείο της G.*

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Βαγγέλης Μουρούκος) Έστω H μια αβελιανή ομάδα και $C_2 = \langle x \rangle$ η κυκλική ομάδα τάξης 2 με γεννήτορα x. Θεωρούμε τον ομομορφισμό ομάδων $\varphi : C_2 \to \mathrm{Aut}(H)$ που ορίζεται από τη σχέση $\varphi(x)(h) = h^{-1}$ για κάθε $h \in H$. (Εφόσον η H είναι αβελιανή, η φ είναι καλά ορισμένη). Θεωρούμε το ημιευθύ γινόμενο $G := H \rtimes_\varphi C_2$. Να αποδείξετε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή αν και μόνο αν ισχύει $h^2 = 1$ για κάθε $h \in H$.*

Ανάλυση ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Αναστάσιος Κοτρώνης) Η x_n ορίζεται αναδρομικά για κάποια x_0 , x_1 από τον τύπο*

$$x_n = \frac{(n-1)\,c}{1+(n-1)\,c}\,x_{n-1} + \frac{1}{1+(n-1)\,c}\,x_{n-2}\,,\ \text{όπου } c > 0\ .$$

Βρείτε το $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Σπύρος Καπελλίδης) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *με*

$$|f(x) - f(y)| \geq d(x, y)\,,\ \text{για όλα τα } x, y \in \mathbb{R}^2,$$

όπου d *είναι η Ευκλείδεια απόσταση στον* $\mathbb{R}^2$.

ΑΕΙ Μαθηματική Λογική και Θεμέλια Μαθηματικών

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει η Φωτεινή Καλδή) Να βρείτε όλα τα σύνολα* $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ *για τα οποία ισχύει:*

$$(B \vartriangle C) \cup X = (B \cup X) \vartriangle (C \cup X)$$

όπου B, C *δύο δοθέντα σύνολα (υποσύνολα του* Ω*).*

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Προτείνει η Φωτεινή Καλδή) Να βρείτε όλα τα σύνολα* $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ *για τα οποία ισχύει:*

$$A - (X - B) = (A - X) - B$$

όπου A, B *δύο δοθέντα σύνολα (υποσύνολα του* Ω*).*

Θεωρία Αριθμών ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Γιώργος Κοτζαγιαννίδης) Να δείξετε ότι για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}^*$ *ισχύει* $169 \mid 3^{3n+3} - 26n - 27$.

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο Σωτήρης Χασάπης) Θεωρούμε* a *και* b *θετικούς αριθμούς. Η διαίρεση με υπόλοιπο τών* $a \cdot b$ *με το* $a + b$ *μάς δίδει 2 μονοσήμαντα ορισμένους αριθμούς* q *και* r *με*

$$a \cdot b = q(a + b) + r \ \text{με}\ 0 \leq r < a + b.$$

Βρείτε όλα τα ζεύγη (a, b) *για τα οποία ισχύει*

$$q^2 + r = 2011.$$

Ο Φάκελος του καθηγητή, Ανάλυση

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *για τις οποίες* $f(0) = 0$ *και για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *έχουμε* $f(2x) \geq x + f(x)$ *και* $f(3x) \leq 2x + f(x)$.

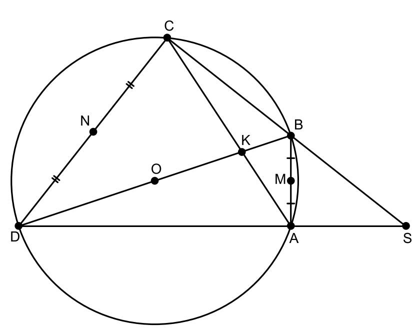
ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Έστω* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση τέτοια ώστε* $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, *για κάθε* $x,\ y \in [0, 1]$. *Να δείξετε ότι*

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt \right) dx + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx.$$

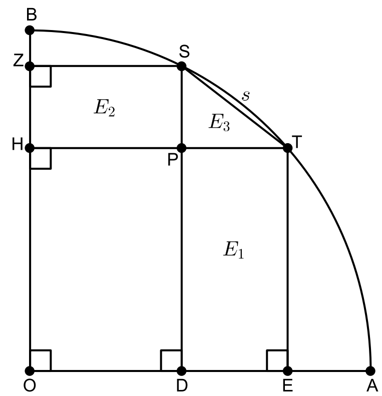
Ο Φάκελος του καθηγητή, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτείνει ο KARKAR) Οι διαγώνιοι του εγγεγραμμένου* $ABCD$, *τέμνονται στο* K, *ενώ οι προεκτάσεις των* CB, DA, *στο* S.

Αν M, N *τα μέσα των πλευρών* AB, CD *και είναι:* $CD = 2AB$, *δείξτε ότι:* $MN = \dfrac{3}{4} SK$.



ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτείνει ο KARKAR) Τόξο* $\overset{\frown}{ST}$ *σταθερού μήκους* $s, (s < \dfrac{\pi R}{2})$, *μετακινείται επί του τόξου* $\overset{\frown}{AB}$, *του τεταρτοκυκλικού τομέα* OAB. *Από τα άκρα του, φέρω τα τμήματα* SD, TE, *κάθετα προς την* OA, *και τα* SZ, TH, *κάθετα προς την* OB. *Φέροντας και τη χορδή* ST, *σχηματίζονται δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Δείξτε ότι το:* $E_1 + E_2 + 2E_3$, *είναι σταθερό. (*E_1, E_2, E_3 *είναι τα εμβαδά των σχημάτων)*



Ο Φάκελος του καθηγητή, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 59 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Αν* $z^5 = 1$, *να υπολογίσετε τα αθροίσματα*

$$A = \frac{z}{1 + z^2} + \frac{z^2}{1 + z^4} + \frac{z^3}{1 + z} + \frac{z^4}{1 + z^3},$$

$$B = \frac{z}{1 - z^2} + \frac{z^2}{1 - z^4} + \frac{z^3}{1 - z} + \frac{z^4}{1 - z^3}.$$

Για το 2ο άθροισμα, θεωρούμε $z \neq 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 60 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Αν* $x_1, x_2, ..., x_n$ *είναι θετικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση*

$$nx + \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_k - x}$$

έχει ρίζα το 0 και $n-1$ *διαφορετικούς μεταξύ τους θετικούς αριθμούς*

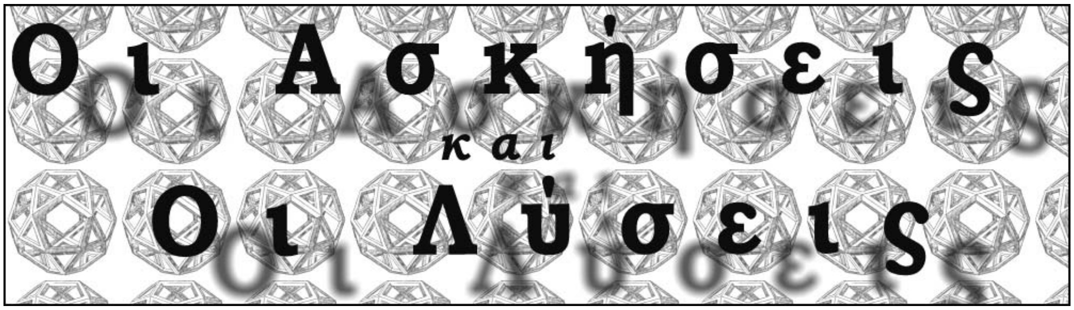
Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

ΑΣΚΗΣΗ 61 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Έστω* Ω *το χωρίο του επιπέδου, το οποίο αποτελείται από τα σημεία* (x, y) *για τα οποία ισχύει* $|x| - |y| \leq 1$ *και* $|y| \leq 1$. *Να βρεθεί το εμβαδόν του* Ω.

ΑΣΚΗΣΗ 62 *(Προτείνει ο Στράτης Αντωνέας) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση*

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 + ax - 2 = 0,\ a \in \mathbb{R},$$

έχει δύο ετερόσημες πραγματικές ρίζες και δύο μιγαδικές ρίζες.



Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Atemlos) Ο κ. Χρήστος έγραψε δυο αριθμούς στον πίνακα και ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το γινόμενο. Το ψηφίο μονάδων του ενός από τους δυο αριθμούς ήταν 8 άλλα δεν ήταν γραμμένο καθαρά. Ο Γιάννης το πήρε λανθασμένα για 6 και η απάντησή του ήταν 4740 ενώ η Μαίρη το πέρασε για 3 και η απάντησή της ήταν 4695. Ποια είναι τελικά η σωστή απάντηση;*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=93279

Λύση (Θανάσης (KARKAR)) Έστω x, y οι δύο αριθμοί. Σύμφωνα με τα δεδομένα:

$$(x-2)y = 4740 \text{ και } (x-5)y = 4695.$$

Αφαιρώντας τις: $3y = 45 \Leftrightarrow y = 15$ επομένως: $(x-2)15 = 4740 \Leftrightarrow x = 318$. Η σωστή απάντηση είναι: $15 \cdot 318 = 4770$

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Να βρεθεί τετραψήφιος ακέραιος που είναι τέλειο τετράγωνο και έχει την ιδιότητα: Αν αυξήσουμε τα ψηφία του κατά μία μονάδα, προκύπτει τέλειο τετράγωνο.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=96480

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Αν $\overline{abcd}$ ο ζητούμενος αριθμός τότε θέλουμε $1000a + 100b + 10c + d = k^2$ και ταυτόχρονα $1000(a+1)+100(b+1)+10(c+1)+(d+1) = l^2$.

Άρα $k^2 + 1111 = l^2$ οπότε $(l-k)(l+k) = 11 \cdot 101$ άρα $l-k = 11$ και $l+k = 101$ οπότε $k = 45$ κι έτσι ο ζητούμενος αριθμός είναι το 2025.

Επιμελητής: Μπάμπης Στεργίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να συγκρίνετε τους αριθμούς* $16^{18}, 18^{16}$ *χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=21069

Λύση 1 (Μιχάλης Λάμπρου) Ζητάμε σύγκριση των

$$16^{18} = (2^4)^{18} = 2^{72}$$

και

$$18^{16} = (3^2 \cdot 2)^{16} = 3^{32} \cdot 2^{16}.$$

Απλοποιώντας το 2^{16} έχουμε να συγκρίνουμε τους αριθμούς

$$2^{56} = (2^7)^8 \quad \text{και} \quad (3^4)^8,$$

οπότε τελικά τους $2^7 = 128$ και $3^4 = 81$. Από δω παίρνουμε το ζητούμενο.

Λύση 2 (Βασίλης Μαυροφρύδης) Επειδή οι αριθμοί μας είναι θετικοί, αρκεί να συγκρίνουμε το πηλίκο τους (προσφέρεται για ιδιότητες δυνάμεων) με την μονάδα :

$$\frac{18^{16}}{16^{18}} = \frac{\left(18^2\right)^8}{\left(16^2\right)^9} = \frac{324^8}{256^9} = \frac{1}{256} \cdot \frac{324^8}{256^8}$$
$$= \frac{1}{2^8} \cdot \left(\frac{324}{256}\right)^8 = \left(\frac{324}{512}\right)^8 < 1$$

Σχόλιο: Το μέλος μας Αρχιμήδης 6 επεσήμανε ότι ο πρώτος αριθμός έχει 22 ψηφία και ο δεύτερος 21.

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Τους φυσικούς αριθμούς* $1, 2, 3, 4, \dots,$ *τους γράφουμε όπως δείχνει το παρακάτω διάγραμμα:*

1						
2	3	4				
5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16

(α) *Ποιος είναι ο πρώτος και ποιος ο τελευταίος αριθμός της 20ης σειράς, αν συνεχίσουμε να συμπληρώνουμε τον πίνακα;*

(β) *Σε ποια γραμμή και σε ποια στήλη θα μπει ο αριθμός 2011;*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=20237

Λύση (Μάκης Χατζόπουλος)

(α) Η πρώτη γραμμή τελειώνει στο $1^2 = 1$, η δεύτερη γραμμή τελειώνει στο $2^2 = 4$, η τρίτη γραμμή τελειώνει στο $3^2 = 9, \dots,$ η 19η γραμμή τελειώνει σε $19^2 = 361$. Συνεπώς, η 20η γραμμή ξεκινάει με το $361+1 = 362$, ενώ τελειώνει με το $21^2 - 1 = 440$.

(β) Αφού $44^2 = 1936$ και $45^2 = 2025$, το 2011 είναι στην 45η γραμμή (14ος αριθμός πριν το τέλος και 74ος από την αρχή).

Επιμελητής: Σωτήρης Στόγιας

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο KARKAR) Το ένα ορθογώνιο αποτελείται από δύο τετράγωνα πλευράς a.*

Συγκρίνατε τα εμβαδά των δύο ορθογωνίων και βρείτε το τμήμα x συναρτήσει της a.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=20737

Λύση (Παύλος Μαραγκουδάκης). Ας συμβολίσουμε με δ τη διαγώνιο του ορθογωνίου με διαστάσεις a και $2a$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έπεται ότι $a^2 + (2a)^2 = \delta^2$ οπότε $\delta = \sqrt{5}a$.

Ας συμβολίσουμε με k την άλλη διάσταση του δεύτερου ορθογωνίου. Τότε για το εμβαδόν του κοινού τριγώνου των δύο ορθογωνίων ισχύει $\frac{k\delta}{2} = a^2$ οπότε $k = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$. Άρα το εμβαδόν του δεύτερου ορθογωνίου είναι $\frac{2\sqrt{5}a}{5} \cdot \sqrt{5}a = 2a^2$, οπότε τα δύο ορθογώνια είναι ισεμβαδικά. Επίσης $x^2 + k^2 = a^2$, οπότε $x = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) Να συγκριθούν οι αριθμοί:*

(α) $A = 3^{183}$ *και* $B = 2^{307} - 2^{306} - 2^{305}$.

(β) $\Gamma = \frac{3^{20}}{2^{30}}$ *και* $\Delta = \frac{5^{18}}{2^{42}}$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=20539

Λύση (Γιώργος Απόκης)

(α) Είναι

$$A = 3^{183} = (3^3)^{61} = 27^{61}$$

και

$$\begin{aligned} B &= 2^{307} - 2^{306} - 2^{305} \\ &= 2^{305}(2^2 - 2 - 1) \\ &= 2^{305} \\ &= (2^5)^{61} \\ &= 32^{61} \\ &> A \end{aligned}$$

(β) Αφού $\frac{9}{8} > 1$, ισχύει

$$\Gamma = \frac{3^{20}}{2^{30}} = \frac{(3^2)^{10}}{(2^3)^{10}} = \frac{9^{10}}{8^{10}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{10} > 1,$$

και αφού $0 < \frac{125}{128} < 1$, είναι

$$\Delta = \frac{5^{18}}{2^{42}} = \frac{(5^3)^6}{(2^7)^6} = \frac{125^6}{128^6} = \left(\frac{125}{128}\right)^6 < 1.$$

Άρα, $\Gamma > \Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Αν για τις πλευρές* a, b, c *ενός τριγώνου* ABC *ισχύει ότι* $\dfrac{a(b+c)}{a+b} + \dfrac{c(a+b)}{b+c} = a + c$, *να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές με κορυφή το* B.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=76733

Λύση (Δημήτρης (Eagle)) Κάνοντας τις πράξεις (ταυτότητες, παραγοντοποιήσεις, επιμεριστικές, απαλοιφές) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& \frac{a(b+c)}{a+b} + \frac{c(a+b)}{b+c} = a + c \\
\Leftrightarrow\quad & a(b+c)^2 + c(a+b)^2 = (a+c)(a+b)(b+c) \\
\Leftrightarrow\quad & ab^2 + 2abc + ac^2 + ca^2 + 2abc + cb^2 \\
=\quad & a^2b + abc + ab^2 + cb^2 + ca^2 + ac^2 + abc + c^2b \\
\Leftrightarrow\quad & 2abc = a^2b + c^2b \Leftrightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (a-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = c.
\end{aligned}
$$

Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης) Υπολογίστε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:*

1) $A = \sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{\sqrt{5}}{18}} - \sqrt{\dfrac{1}{6} - \dfrac{\sqrt{5}}{18}}$

2) $B = \sqrt{1 + \dfrac{2}{5}} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{2}{6}} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{2}{7}} \cdots \sqrt{1 + \dfrac{2}{58}}$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=91685

Λύση 1 (angvl (μαθητής)) Για το 1ο:

Ο πρώτος όρος γράφεται στη μορφή.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{5}}{18}} &= \sqrt{\frac{3}{18} + \frac{\sqrt{5}}{18}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{18}} \\
&= \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{5}+1}{6}.
\end{aligned}
$$

Όμοια ο δεύτερος όρος παίρνει την μορφή $\dfrac{\sqrt{5}-1}{6}$.

Αν αφαιρέσουμε τώρα τους δύο όρους βρίσκουμε αποτέλεσμα $\dfrac{1}{3}$.

Λύση 2 (Αρσενόη Μουτσοπούλου (μαθήτρια)) Για το 2ο:

$$
\begin{aligned}
B &= \sqrt{1 + \frac{2}{5}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{6}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{7}} \cdots \sqrt{1 + \frac{2}{58}} \\
&= \sqrt{\frac{7}{5}} \cdot \sqrt{\frac{8}{6}} \cdot \sqrt{\frac{9}{7}} \cdot \sqrt{\frac{10}{8}} \cdot \ldots \cdot \sqrt{\frac{59}{57}} \cdot \sqrt{\frac{60}{58}} \\
&= \sqrt{\frac{7}{5} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{10}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{59}{57} \cdot \frac{60}{58}}
\end{aligned}
$$

με απλοποιήσεις καταλήγουμε η τελευταία παράσταση να είναι ίση με

$$\sqrt{\frac{59}{5} \cdot \frac{60}{6}} = \sqrt{\frac{59}{5} \cdot 10} = \sqrt{118}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο KARKAR) Να βρεθούν οι αριθμοί x, y, για τους οποίους ισχύει :* $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = x + \dfrac{y}{4}$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=20443

Λύση 1 (Αχιλλέας Συννεφακόπουλος) Για $x \geq 1$ και $y \geq 1$ η δοθείσα είναι ισοδύναμη με την

$$(x-1) - \sqrt{x-1} + \frac{1}{4} + (\frac{y-1}{4} - \sqrt{y-1} + 1) = 0,$$

δηλ.

$$(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{y-1}}{2} - 1)^2 = 0,$$

απ΄ όπου παίρνουμε $\sqrt{x-1} = \dfrac{1}{2}$ και $\sqrt{y-1} = 2$. Συνεπώς, $x = \dfrac{5}{4}$ και $y = 5$.

Λύση 2 (parmenides51) Θέτω

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = a \geq 0 \\ \sqrt{y-1} = b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = a^2 \\ y-1 = b^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = a^2 + 1 \quad (1) \\ y = b^2 + 1 \quad (2) \end{cases},$$

οπότε για $x \geq 1$ και $y \geq 1$ η δοσμένη λόγω των (1),(2) γίνεται

$$a + b = a^2 + 1 + \frac{b^2+1}{4} \Leftrightarrow$$
$$4a + 4b = 4a^2 + 4 + b^2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$4a^2 - 4a + 1 + b^2 - 4b - 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(2a-1)^2 + (b-2)^2 = 0, \qquad \text{οπότε}$$

$$\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases}$$

ως μηδενικό άθροισμα μη αρνητικών όρων, συνεπώς

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \geq 0 \\ b = 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = a = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{y-1} = b = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ \sqrt{y-1}^2 = 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \dfrac{1}{4} \\ y - 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} \geq 1 \\ y = 5 \geq 1 \end{cases},$$

δεκτές

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο Κώστας Καπένης) Αν x, y, z μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $x + y + z = 0$ να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{y^2+z^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+x} = \frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy}.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=12860

Λύση 1 (Νίκος Αντωνόπουλος) Το πρώτο μέλος γράφεται

$$\frac{x^2+y^2}{-z} + \frac{y^2+z^2}{-x} + \frac{z^2+x^2}{-y} =$$

$$\frac{x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + z^3x + zx^3}{-xyz} =$$

$$\frac{x^3(y+z) + y^3(x+z) + z^3(x+y)}{-xyz} =$$

$$\frac{-x^4 - y^4 - z^4}{-xyz} = \frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{xz} + \frac{z^3}{xy}$$

Λύση 2 (Φωτεινή Καλδή)

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{y^2+z^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+x} =$$

$$-\left(\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y}\right) =$$

$$-\left(\frac{x^2}{z} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y}\right) =$$

$$-\left(\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{xz} + \frac{z^2(x+y)}{xy}\right) =$$

$$\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{xz}+\frac{z^3}{xy}$$

Λύση 3 (dr.tasos) Το πρώτο μέλος είναι ίσο με :

$$A=\frac{(x+y)^2-2xy}{x+y}+\frac{(z+y)^2-2zy}{z+y}$$
$$+\frac{(x+z)^2-2zx}{z+x}\Leftrightarrow$$

$$A=2\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)\Leftrightarrow$$

$$A=2\left(\frac{x^2y^2+z^2y^2+x^2z^2}{xyz}\right).$$

Το δεύτερο μέλος ειναι ίσο με :

$$B=\frac{(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+z^2y^2+x^2z^2)}{xyz}.$$

Εξισώνω και έχω

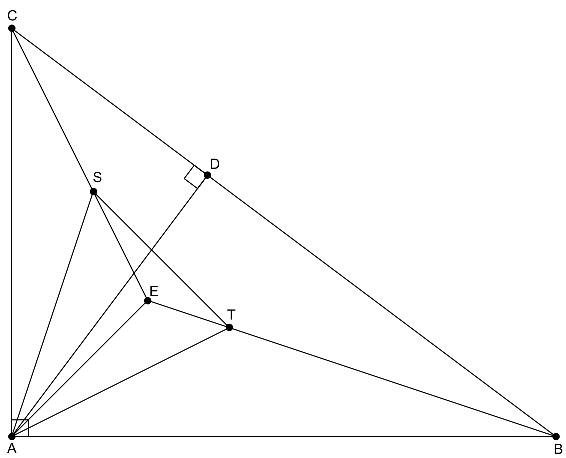
$$(x^2+y^2+z^2)^2=4(x^2y^2+z^2y^2+x^2z^2).$$

Άπο την δοσμένη έχω

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)^2&=4(x^2y^2+z^2y^2+x^2z^2)\\&\quad+8xyz(x+y+z)\Leftrightarrow\\(x^2+y^2+z^2)^2&=4(x^2y^2+z^2y^2+x^2z^2),\end{aligned}$$

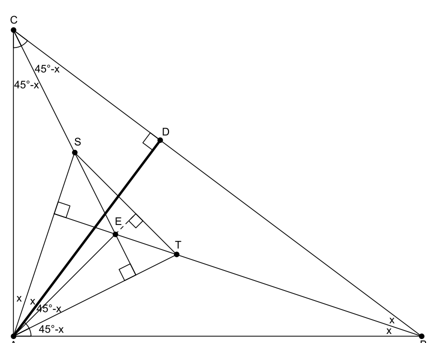
άρα το ζητούμενο απεδείχθη.

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο KARKAR) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ABC\,(\widehat{A} = 90^\circ)$, E είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του και AD το ύψος προς την υποτείνουσα. Οι διχοτόμοι των $D\widehat{A}C$, $D\widehat{A}B$ τέμνουν τις CE, BE στα S, T αντίστοιχα. Δείξτε ότι $AE \perp ST$.*



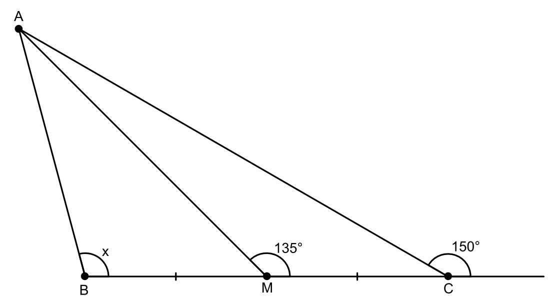
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=18759

Λύση (KARKAR) Έστω ότι οι $C\widehat{B}A$ και $A\widehat{C}B$ έχουν μέτρο $2x$ και $90^\circ - 2x$ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι το E είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AST.



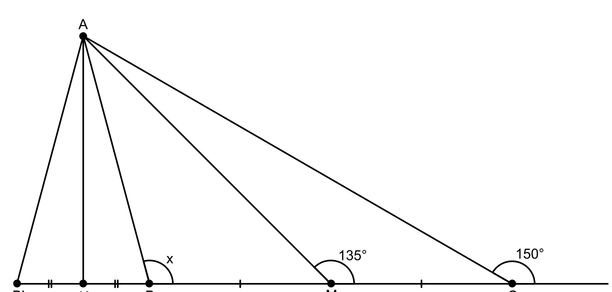
Αφού η CE είναι διχοτόμος η $A\widehat{C}E = 45^\circ - x$. Επίσης $D\widehat{A}B = A\widehat{C}D$, γιατί το AD είναι ύψος. Άρα η $D\widehat{A}T = 45^\circ - x$. Είναι ακόμα $C\widehat{A}D = D\widehat{B}A$, γιατί το AD είναι ύψος. Άρα $D\widehat{A}T + C\widehat{A}D = 45^\circ - x + 2x = 45^\circ + x = C\widehat{A}T$, δηλαδή οι $A\widehat{C}E$, $C\widehat{A}T$ είναι συμπληρωματικές. Έτσι η CE είναι κάθετη στην AT. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι η BE είναι κάθετη στην SA. Έτσι το E είναι ορθόκεντρο και η AE είναι κάθετη στην ST.

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο KARKAR Σε τρίγωνο ABC φέρω τη διάμεσο AM. Αν είναι $\widehat{C}_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = 150^\circ$, $A\widehat{M}C = 135^\circ$, να βρείτε την $A\widehat{B}C$.*

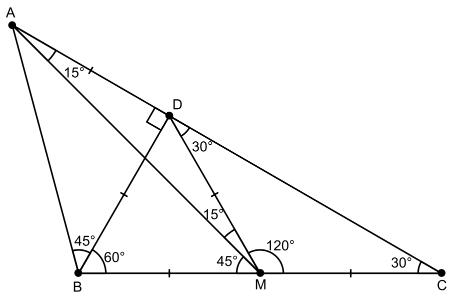


http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=21008

Λύση 1 (Μιχάλης Νάννος) Φέρω $BD \perp AC$ και εφόσον $\widehat{C} = 30^\circ$ εύκολα συμπεραίνουμε πως σχηματίζεται το ισοσκελές $MDC\,(120^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$, το ισόπλευρο MBD και το ορθογώνιο και ισοσκελές BAD. Έτσι η ζητούμενη γωνία είναι $60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$.



Λύση 2 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Ας φέρουμε το ύψος AK του τριγώνου. Τότε το τρίγωνο AKM είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Άρα $AK = KM$.



Από το ορθογώνιο AKC προκύπτει $AC = 2AK$. Έστω B' το συμμετρικό του B ως προς το K.
Τώρα $B'C = 2KB + 2BM = 2KM = 2AK = AC$. Άρα το τρίγωνο $AB'C$ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{B'} = 75°$. Επομένως $A\hat{B}C = 105^o$.

Μαθηματικά Β' Λυκείου ('Αλγεβρα)

Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει η Φωτεινή Καλδή) Να δειχθεί η συνεπαγωγή*

$$\eta\mu^{111}(x) + \sigma\upsilon\nu^{111}(x) = 1 \Longrightarrow \eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x) = 1.$$

(Συμπλήρωση από το Μιχάλη Λάμπρου: Ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή)

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=59915

Λύση 1 (Γιώργος Ροδόπουλος) Χάριν συντομίας ονομάζουμε $a = \eta\mu x, \quad b = \sigma\upsilon\nu x$. Τότε

$$a^{111} + b^{111} = 1 \qquad (1).$$

Από την (1) προκύπτει ότι $0 \le a \le 1$ και $0 \le b \le 1$. Πράγματι αν για παράδειγμα ήταν $-1 \le b < 0$ τότε

$$(1) \Rightarrow a^{111} = 1 - b^{111} > 1 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Αν τώρα $a \neq 1$ και $b \neq 1$ έχουμε: $a^{111} \le \alpha^2$ (2) και $b^{111} \le b^2$ (3) με το ίσον στις (2), (3) να ισχύει μόνο όταν $a = 0$ και $b = 0$ αντίστοιχα.

Επειδή δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα $a = b = 0$ παίρνουμε με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3):

$$a^{111} + b^{111} < a^2 + b^2 \Rightarrow 1 < 1, \text{ άτοπο.}$$

Συνεπώς $a = 1$ (και $b = 0$) ή $b = 1$ (και $a = 0$). Σε κάθε περίπτωση ισχύει $a + b = 1$.

Για το αντίστροφο.

Αν $a + b = 1$ τότε

$$(a+b)^2 = 1 \Rightarrow$$
$$a^2 + b^2 + 2ab = 1 \Rightarrow$$
$$ab = 0 \Rightarrow$$
$$(a = 0 \,\text{και}\, b = 1) \,\text{ή}\, (b = 0 \,\text{και}\, a = 1).$$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει η (1).

Λύση 2 (Γιώργος Ρίζος) Μία παρόμοια αντιμετώπιση

$$\eta\mu^{111}x + \sigma\upsilon\nu^{111}x = 1 \Rightarrow$$
$$\eta\mu^{111}x + \sigma\upsilon\nu^{111}x = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow$$
$$\eta\mu^{111}x - \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^{111}x \Rightarrow$$
$$\eta\mu^2 x\left(\eta\mu^{109}x - 1\right) = \sigma\upsilon\nu^2 x\left(1 - \sigma\upsilon\nu^{109}x\right)$$

Είναι:

$$|\eta\mu x| \le 1 \Rightarrow \eta\mu^{109}x \le 1 \Rightarrow$$
$$\eta\mu^{109}x - 1 \le 0 \Rightarrow \eta\mu^2 x\left(\eta\mu^{109}x - 1\right) \le 0.$$

$$|\sigma\upsilon\nu x| \le 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^{109}x \le 1 \Rightarrow$$
$$1 - \sigma\upsilon\nu^{109}x \ge 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x\left(1 - \sigma\upsilon\nu^{109}x\right) \ge 0.$$

Οπότε είναι:
$\eta\mu^2 x\left(\eta\mu^{109}x - 1\right) = \sigma\upsilon\nu^2 x\left(1 - \sigma\upsilon\nu^{109}x\right) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \eta\mu x = 0 \,,\ \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ \quad\text{ή} \\ \eta\mu x = 1 \,,\ \sigma\upsilon\nu x = 0 \end{cases} \quad \text{άρα } \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει η Ζωή Κρυφού) Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί a, b αν είναι γνωστό ότι οι αριθμοί $\frac{y_1}{3}, -2x_1$ είναι ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 6$, όπου (x_1, y_1) είναι η λύση του συστήματος:* $\begin{cases} y = 3^x + 6 \\ x + \log_3 y = 3 \end{cases}$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=104757

Λύση 1 (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Το σύστημα ορίζεται για $y > 0$.

Από την 1η εξίσωση βρίσκουμε ότι: $y - 6 = 3^x \Leftrightarrow \log_3(y-6) = x$, για $y > 6$, την οποία αντικαθιστούμε στην 2η εξίσωση και βρίσκουμε ότι:

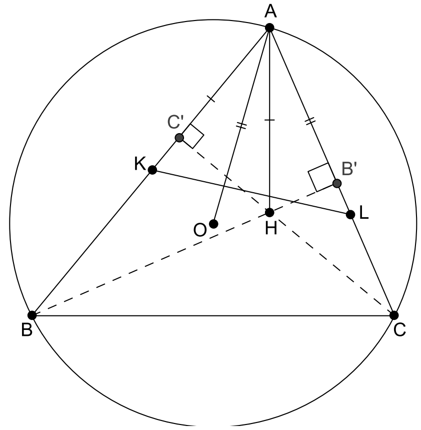
$$\log_3(y-6) + \log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3(y^2 - y) = 3 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 6y = 27 \Leftrightarrow y = 9$$

(αφού η λύση $y = -3 < 6$ απορρίπτεται). Συνεπώς προκύπτει και ότι $x = 1$, άρα $x_1 = 1$, $y_1 = 9$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι τα $-2x_1 = -2$, $\frac{y_1}{3} = 3$ είναι ρίζες του πολυωνύμου, οπότε ισχύει ότι: $\begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -24 + 4a - 2b - 6 = 0 \\ 81 + 9a + 3b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

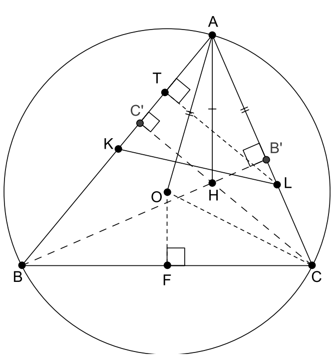
$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -19 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Δίνεται τρίγωνο* $\triangle ABC$ *εγγεγραμμένο σε κύκλο* (O, R) *και* H *το ορθόκεντρό του. Αν* $K \in AB : AK = AH$ *και* $L \in AC : AL = AO$ *να δειχθεί ότι:* $KL = R$.

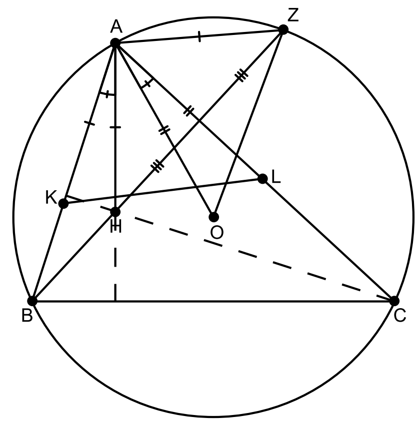


http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&t=21153

Λύση 1 (Σωτήρης Λουρίδας) Έστω T το μέσο του AK και F το μέσο της BC. $\angle OFC = 90^\circ$, $OF = \frac{\mathrm{AH}}{2} = \mathrm{AT}$, $\angle FOC = \angle \mathrm{A}$, $OC = AL \Rightarrow \triangle\ ATL = \triangle\ OFC \Rightarrow LT \perp AT$. Αυτό σημαίνει ότι η LT είναι μεσοκάθετη στο AK, οπότε $AL = LK = R$.

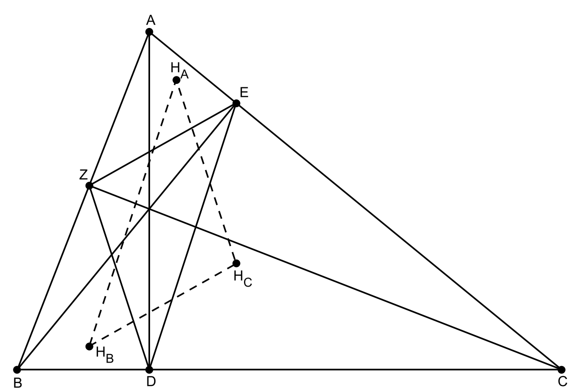


Λύση 2 (Ανδρέας Βαρβεράκης) Άλλη μία αντιμετώπιση, χρησιμοποιώντας ότι το συμμετρικό του ορθοκέντρου ενός τριγώνου ως προς μία πλευρά, είναι σημείο του περίκυκλου και ότι η ακτίνα προς μία κορυφή και το αντίστοιχο ύψος είναι ισογώνιες ως προς τις πλευρές της γωνίας ($\angle OAC = \angle BAH$):



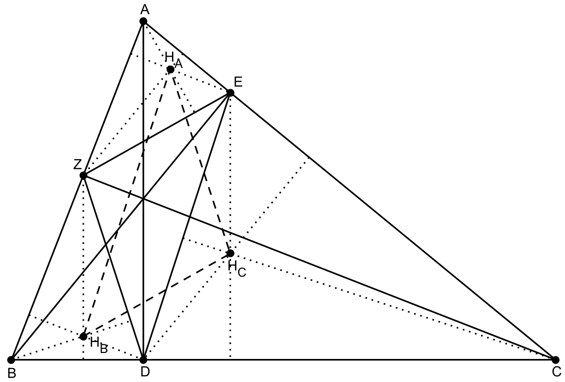
Αν Z είναι το συμμετρικό τουH ως προς την AC, τα τρίγωνα AOZ, AKL είναι ίσα, καθώς $AO = AL, AK = AH = AZ$ και $\angle OAB = \angle LAH, \angle LAZ = \angle LAH \Rightarrow \angle OAZ = \angle KAL$. Επομένως, $KL = OZ = R$.

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Έστω τρίγωνο* $\triangle ABC$ *και* AD, BE, CZ *τα ύψη του. Αν* H_A, H_B, H_C *είναι τα ορθόκεντρα των τριγώνων* $\triangle ZAE$, $\triangle DBZ$, $\triangle ECD$ *αντίστοιχα, να δειχθεί ότι* $\triangle H_AH_BH_C = \triangle DEZ$.



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=107737

Λύση (Κώστας Δόρτσιος) Τα τρίγωνα αυτά θα δείξουμε ότι έχουν τις τρείς πλευρές ίσες.



Πρώτα δείχνουμε πως το τετράπλευρο H_aEDH_b είναι παραλληλόγραμμο. Πράγματι: $H_aE = 2R_A \cos E$ (1) όπου: $2R_A = AH$ και $\hat{E} = A\hat{E}Z = A\hat{H}Z$.

Όμοια είναι $DH_b = 2R_B \cos D$ (2) όπου: $2R_B = BH$ και $\hat{D} = B\hat{D}Z = B\hat{H}Z$

Θα δείξουμε ότι $H_a = H_b$ (3).

Σύμφωνα με τις (1) και (2) η (3) ισοδυναμεί: $2R_A \cos E = 2R_B \cos D \Leftrightarrow AH \cos(A\hat{H}Z) = BH \cos(B\hat{H}Z) \Leftrightarrow HZ = HZ$. Η τελευταία ισχύει. Άρα και η (3).

Ακόμα είναι: $H_a // H_b$ ως κάθετες στην AB. Άρα το σχήμα H_aEDH_b είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς $DE = H_aH_b$.

Όμοια δείχνονται και οι άλλες δύο ισότητες των πλευρών. Άρα αυτα τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο KARKAR) Θέλοντας να τριχοτομήσουμε την πλευρά BC ενός τριγώνου ABC, ακολουθούμε την εξής πορεία: Βρίσκουμε το μέσο M της BC, στη συνέχεια το μέσο N της AM και ακολούθως το μέσο L της BN. Η προέκταση της AL τέμνει την BC στο σημείο S. Να αποδείξετε ότι*

$$BS = \frac{1}{6}BC.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=98514

Λύση 1 (Καπένης Κώστας) Έστω σημείο K της SM ώστε $BS = SK$. Τότε στο $\triangle BNK$ θα έχουμε $LS \parallel NK$. Τότε στο $\triangle ASM$ το K πρέπει να είναι μέσο της SM, αφού N μέσο της AM και $KN \parallel AS$. Άρα $BS = SK = KM = \dfrac{BM}{3} = \dfrac{BC}{6}$.

Λύση 2 (Απόκης Γιώργος) Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και $B(0,0)$, $C(a,0)$, $A(p,q)$ με $a,p,q \neq 0$. Τότε $M\left(\dfrac{a}{2},0\right)$, $N\left(\dfrac{2p+a}{4},\dfrac{q}{2}\right)$, $L\left(\dfrac{2p+a}{8},\dfrac{q}{4}\right)$.

- Αν $a \neq 6p$ έχουμε $\lambda_{AL} = \dfrac{q-\frac{q}{4}}{p-\frac{2p+a}{8}} = \dfrac{6q}{6p-a}$, άρα $(AL): y-q = \dfrac{6q}{6p-a}(x-p)$. Για το σημείο $S(s,0)$ είναι $0-q = \dfrac{6q}{6p-a}(s-p) \Leftrightarrow s = \dfrac{\frac{6pq}{6p-a}-q}{\frac{6q}{6p-a}} = \dfrac{aq}{6q} = \dfrac{a}{6}$. Άρα $BS = \dfrac{1}{6}BC$.
- Αν $a = 6p$, τότε η AS είναι κατακόρυφη, οπότε άμεσα προκύπτει το ζητούμενο.

Λύση 3 (Καλδή Φωτεινή) $\vec{BS} = x\vec{BC} = x(\vec{b}-\vec{a})$, (1)

$\vec{BS} = \vec{BL} + \vec{LS} = \dfrac{1}{2}\vec{BN} + y\vec{AS}$, $y \neq 1$, (2)

$\vec{BN} = \dfrac{1}{2}(\vec{BM}-\vec{a})$, $\vec{BM} = \dfrac{1}{2}\vec{BC} = \dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$, $\vec{AS} = \vec{a}+\vec{BS}$.

$(2) \Rightarrow \vec{BS} = \dfrac{8y-3}{8(1-y)}\vec{a} + \dfrac{1}{8(1-y)}\vec{b}$, (3)

(1), (3) $\Longrightarrow x = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \vec{BS} = \dfrac{1}{6}\vec{BC}$.

Λύση 4 (Δόρτσιος Κώστας) Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο BNM με διατέμνουσα την $S-L-A$. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}\frac{BS}{SM}\cdot\frac{MA}{AN}\cdot\frac{\cancel{NL}}{\cancel{LB}} = 1 &\Rightarrow\\ \frac{BS}{SM} = \frac{AN}{AM} &\Rightarrow\\ \frac{BS}{BS+SM} = \frac{AN}{AN+AM} &\Rightarrow\\ \frac{BS}{BM} = \frac{\frac{AM}{2}}{\frac{AM}{2}+AM} = \frac{1}{3} &\Rightarrow\\ \frac{BS}{BM} = \frac{1}{3}.&\end{aligned}$$

Το σημείο δηλαδή S τριχοτομεί την BM. Κατόπιν αυτού αν λάβουμε το συμμετρικό του B ως προς το S τριχοτομούμε την πλευρά BC.

Λύση 5 (Γιαννόπουλος Παναγιώτης) Φέρω $KN//BM$. Τότε: $\triangle BLS = \triangle NLK \Rightarrow KN = BS(1)$. Επίσης: $KN = \dfrac{1}{2}SM$ (K,N μέσα πλευρών του $\triangle SAM$) (2) Τέλος: $(1),(2) \Rightarrow BS = \frac{1}{2}SM \Rightarrow BM = 3BS \Rightarrow BC = 6BS$.

Λύση 6 (Ρίζος Γιώργος) Φέρνουμε την ML που τέμνει την AB στο K.

Από Θ. Ceva στο $\triangle ABM$ ισχύει: $\dfrac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SM}}\cdot\dfrac{MN}{NA}\cdot\dfrac{AK}{KB} = 1$ $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SM}} = \dfrac{KB}{AK} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{BS}}{\mathrm{BM}} = \dfrac{KB}{AB}$ (1).

Φέρνουμε την παράλληλη από το N στην KM που τέμνει την AB στο T.

Τότε από Θ. Θαλή για $TN//KM$ είναι $\dfrac{AT}{TK} = \dfrac{AN}{NM} \Rightarrow AT = TK$ και για $KL//TN$ έχουμε $\dfrac{BK}{KT} = \dfrac{BL}{LN} \Rightarrow BK = KT$.

Οπότε $BK = \dfrac{1}{3}AB$, άρα από την (1) προκύπτει $BS = \dfrac{1}{3}BM \Rightarrow BS = \dfrac{1}{6}BC$.

Λύση 7 (Μπαλόγλου Γιώργος) Προεκτείνουμε την CB κατά μήκος $|BD| = |BM|$, οπότε η AB είναι διάμεσος του $\triangle ADM$, όπως βέβαια και η DN. Συμπεραίνουμε ότι το σημείο τομής P των AB και DN είναι το βαρύκεντρο του $\triangle ADM$, άρα η MP τέμνει την AD στο μέσον της, έστω Q. Επειδή όμως $BN//DA$, η MP οφείλει να τέμνει και την BN στο μέσον της, δηλαδή στο L. Είναι λοιπόν οι AS, BN, MP συντρέχουσες στο τρίγωνο ABM, οπότε από το Θεώρημα του Ceva προκύπτει $\frac{|BS|}{|SM|} = \frac{|NA|}{|MN|} \cdot \frac{|PB|}{|AP|} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (καθώς N μέσον του AM και P βαρύκεντρο του ADM) και τελικά $\frac{|BS|}{|BM|} = \frac{1}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{a}$ με $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{5}$ καθώς και ένα άλλο διάνυσμα $\vec{b}$ που είναι τέτοιο, ώστε να ισχύει ότι: $3\left|\vec{b}-\vec{a}\right|\vec{b} = \left|5\vec{b}+3\vec{a}\right|\vec{a}$. Να βρείτε τον αριθμό $\vec{a}\cdot\vec{b}$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=103950

Λύση 1 (Καλδή Φωτεινή) Λόγω της $3\left|\vec{b}-\vec{a}\right|\vec{b} = \left|5\vec{b}+3\vec{a}\right|\vec{a}$ έχουμε ότι τα $\vec{a},\vec{b}$ είναι ομόρροπα, άρα $\vec{b} = p\vec{a}$, $p > 0$. Τότε:

$$\begin{aligned} & 3\left|\vec{b}-\vec{a}\right|\vec{b} = \left|5\vec{b}+3\vec{a}\right|\vec{a} \\ \Rightarrow\ & 3|p-1||\vec{a}|p\vec{a} = |5p+3||\vec{a}|\vec{a} \\ \Rightarrow\ & |3p^2-3p| = |5p+3|, \end{aligned}$$

άρα $(3p^2-3p = 5p+3$ ή $3p^2-3p = -5p-3) \Rightarrow p = 3$ ή $p = -\frac{1}{3}$. Συνεπώς αφού $p > 0$, προκύπτει ότι $\vec{b} = 3\vec{a}$, άρα $\vec{a}\cdot\vec{b} = 15$.

Λύση 2 (Σταματογιάννης Γιάννης) Θέτουμε $x = \vec{a}\cdot\vec{b}$, οπότε $\left|\vec{b}\right| = \frac{x\sqrt{5}}{5}$. Από τη σχέση που δόθηκε τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ είναι ομόρροπα, οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{5} - \frac{x\sqrt{5}}{5}$ ή $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \frac{x\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5}$, αφού για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ ισχύει: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|\vec{b}\right| - \left|\vec{a}\right|$. Ισχύει $\left|5\vec{b}+3\vec{a}\right|^2 = 5(x^2+6x+9)$, άρα $\left|5\vec{b}+3\vec{a}\right| = \sqrt{5}|x+3|$. Επίσης $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{5}\frac{|5-x|}{5}$. Αν πολλαπλασιάσουμε τη δοθείσα σχέση με το διάνυσμα $\vec{a}$, καταλήγουμε στην εξίσωση $3\,|5-x|\,x = 25\,|x+3|$, που έχει λύση $x = 15$.

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Απόκης Γιώργος) Δίνεται η συνάρτηση*

$$f(x) = xe^{\alpha x+\alpha}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha > 0.$$

(α) *Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση*

$$f''\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \alpha f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \alpha^2 f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0.$$

(β) *Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(0, f(0))$ να σχηματίζει γωνία 45° με τον xx'.*

(γ) *Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.*

(δ) *Να βρείτε την τιμή του α ώστε το ελάχιστο της f να πάρει τη μέγιστη τιμή του.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=20955&start=20

Λύση (Κατσίποδας Δημήτρης)

(α) Έχουμε $f(x) = xe^{\alpha x+\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, οπότε $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}e^{1+\alpha}$ με $\alpha > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^{\alpha x+\alpha} + \alpha xe^{\alpha x+\alpha}$ με $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ οπότε

$$f'(\frac{1}{\alpha}) = 2e^{1+\alpha} \text{ με } \alpha > 0.$$

Ακόμα η f'' είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \alpha e^{\alpha x+\alpha} + \alpha e^{\alpha x+\alpha} + \alpha^2 xe^{\alpha x+\alpha} \\ &= 2\alpha e^{\alpha x+\alpha} + \alpha^2 xe^{\alpha x+\alpha} \text{ με } x \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \end{aligned}$$

οπότε $f'(\frac{1}{\alpha}) = 3\alpha e^{1+\alpha}$ με $\alpha > 0$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} f''(\frac{1}{\alpha}) - \alpha f'(\frac{1}{\alpha}) - \alpha^2 f(\frac{1}{\alpha}) &= \\ 3\alpha e^{1+\alpha} - 2\alpha e^{1+\alpha} - \alpha^2\frac{1}{\alpha}e^{1+\alpha} &= \\ 3\alpha e^{1+\alpha} - 3\alpha e^{1+\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι $f'(0) = e^\alpha$. Έστω ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°. Τότε

$$f'(0) = \varepsilon\varphi 45^\circ \Leftrightarrow e^\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0,$$

άτοπο γιατί $\alpha > 0$.

(γ) $f'(x) = e^{\alpha x+\alpha} + \alpha xe^{\alpha x+\alpha}$ με $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ τότε

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{\alpha x+\alpha} + \alpha xe^{\alpha x+\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{\alpha x+\alpha}(1+\alpha x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1+\alpha x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{\alpha x+\alpha} + \alpha xe^{\alpha x+\alpha} > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{\alpha x+\alpha}(1+\alpha x) > 0 \\ &\Leftrightarrow 1+\alpha x > 0 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{\alpha}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{1}{\alpha}, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = -\frac{1}{\alpha}$ με τιμή $f(-\frac{1}{\alpha}) = -\frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}$.

(δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}, \alpha > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}(\frac{1-\alpha}{\alpha}), \alpha > 0.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} g'(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}(\frac{1-\alpha}{\alpha}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
g'(\alpha) > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1} > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}(\frac{1-\alpha}{\alpha}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} > 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha < 1
\end{aligned}
$$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\alpha = 1$ με τιμή $g(1) = -1$. Οπότε το ελάχιστο της f παίρνει την μέγιστη τιμή του για $\alpha = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Περικλής Παντούλας) Έστω*

$$f(x) = x^2 + (3-\alpha)x - (\alpha+5), \qquad x, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Για ποια τιμή του α το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της f είναι ελάχιστο;

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=20955&start=60

Λύση (Δημήτριος Κατσίποδας) Αρχικά πρέπει η δευτεροβάθμια να έχει δύο ρίζες, οπότε

$$
\begin{aligned}
\Delta > 0 &\Leftrightarrow (3-\alpha)^2 + 4(\alpha+5) > 0 \\
&\Leftrightarrow 9 - 6\alpha + \alpha^2 + 4\alpha + 20 > 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 29 > 0.
\end{aligned}
$$

Επειδή $\Delta' = -112 < 0$ άρα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η f έχει δύο ρίζες. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της δευτεροβάθμιας. Έχουμε ότι: $S = \alpha - 3$ και $P = -(\alpha+5)$ οπότε

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\
&= S^2 - 2P = (\alpha-3)^2 + 2(\alpha+5) \\
&= \alpha^2 - 4\alpha + 19.
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(\alpha) = \alpha^2 - 4\alpha + 19$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $g''(\alpha) = 2\alpha - 4$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$g''(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

και

$$g''(\alpha) > 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 4 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 2.$$

Οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $\alpha = 2$ με τιμή $g(\alpha) = 15$.

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο Σάκης) Έστω οι z_1, z_2, z_3, z_4 που ανήκουν στο $\mathbb{C}$, ώστε z_1, z_2 διάφοροι του 0 και $\frac{z_1}{z_2}$ να ανήκει στο $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Έστω ότι οι $\frac{z_1+z_3+z_4}{z_2}, \frac{z_2+z_3+z_4}{z_1}$ είναι πραγματικοί. Δείξτε ότι $z_1+z_2+z_3+z_4=0$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=19392

Λύση 1 (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Ας υποθέσουμε ότι $z_1+z_2+z_3+z_4 \neq 0$. Αφού $\frac{z_1+z_3+z_4}{z_2} \in \mathbb{R}$ άρα

$$\frac{z_1+z_3+z_4}{z_2}+1=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{z_2} \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Όμοια αφού $\frac{z_2+z_3+z_4}{z_1} \in \mathbb{R}$ άρα

$$\frac{z_2+z_3+z_4}{z_1}+1=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{z_1} \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Από τις (1), (2) παίρνουμε $\frac{\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{z_2}}{\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{z_1}}=\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$, άτοπο. Άρα $z_1+z_2+z_3+z_4=0$.

Λύση 2 (Χρήστος Λαζαρίδης) Θέτουμε

$$w=z_1+z_2+z_3+z_4.$$

Τότε $\frac{z_1+z_3+z_4}{z_2}=\frac{w-z_2}{z_2}=\frac{w}{z_2}-1$ και $\frac{w}{z_2}-1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{w}{z_2} \in \mathbb{R}$. Αντίστοιχα $\frac{w}{z_1} \in \mathbb{R}$. Έστω $w \neq 0$. Τότε $\frac{w/z_2}{w/z_1}=\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$, άτοπο, άρα $w=0$.

Λύση 3 (Μάκης Χατζόπουλος) Από τα δεδομένα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} &\Rightarrow \frac{z_1}{z_2}=\alpha+\beta i, \beta \neq 0\\ &\Rightarrow z_1=(\alpha+\beta \cdot i)\, z_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0. \quad (1)\end{aligned}$$

Έστω ότι $z_1+z_2+z_3+z_4 \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned}\frac{z_1+z_3+z_4}{z_2} \in \mathbb{R} &\Rightarrow \frac{z_1+z_3+z_4}{z_2}+1 \in \mathbb{R}\\ &\Rightarrow \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{z_2} \in \mathbb{R}^*\\ &\Rightarrow \frac{z_2}{z_1+z_2+z_3+z_4} \in \mathbb{R}^* \quad (2)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{z_2+z_3+z_4}{z_1} \in \mathbb{R} &\Rightarrow \frac{z_2+z_3+z_4}{z_1}+1 \in \mathbb{R}\\ &\Rightarrow \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{z_1} \in \mathbb{R}^*\\ &\Rightarrow \frac{z_1}{z_1+z_2+z_3+z_4} \in \mathbb{R}^*\end{aligned}$$

οπότε,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{z_1}{z_1+z_2+z_3+z_4}+\frac{z_2}{z_1+z_2+z_3+z_4}\right) \in \mathbb{R}\\ \Rightarrow &\frac{z_1+z_2}{z_1+z_2+z_3+z_4} \in \mathbb{R}\\ \overset{(1)}{\Rightarrow} &\frac{(\alpha+\beta \cdot i)\, z_2+z_2}{z_1+z_2+z_3+z_4} \in \mathbb{R}\\ \overset{(2)}{\Rightarrow} &\frac{z_2\,(1+\alpha+\beta \cdot i)}{z_1+z_2+z_3+z_4} \in \mathbb{R}\\ \Rightarrow &\frac{z_2}{z_1+z_2+z_3+z_4} \cdot (1+\alpha+\beta \cdot i) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

δηλαδή $\frac{z_2}{z_1+z_2+z_3+z_4} \cdot \beta=0$ που είναι άτοπο, αφού ο κάθε παράγοντας είναι μη μηδενικός, άρα $z_1+z_2+z_3+z_4=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο Γιώργος Κ77) Οι διανυσματικές ακτίνες των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών z, w σχηματίζουν γωνία $60°$. Να δείξετε ότι $|z+w| \leq \sqrt{3}|z-w|$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=19645

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Επειδή το τρίγωνο OAB (A, B οι εικόνες των μιγαδικών και O η αρχή) έχει $\widehat{AOB}=60°$ είναι από τον νόμο των συνημιτόνων

$$|z-w|^2=|z|^2+|w|^2-|z||w|. \tag{1}$$

Επίσης, είναι, ως γνωστόν, $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$, οπότε, λόγω της (1) λαμβάνουμε

$$|z+w|^2=|z|^2+|w|^2+|z||w|. \tag{2}$$

Τότε βλέπουμε ότι η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται, με χρήση των (1),(2) $(|z| - |w|)^2 \geq 0$, το οποίο ισχύει.

Λύση 2 (Γιώργος Κ77) Έστω A, B οι εικόνες των z_1, z_2, αντίστοιχα και M το μέσο του τμήματος AB Τότε:

$$|z + w| \leq \sqrt{3}\,|z - w| \Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{OM}\right| \leq \sqrt{3}\left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 \leq 3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2. \quad (1)$$

Από πρώτο θεώρημα διαμέσων η (1) γίνεται

$$2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \leq 3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \geq \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2. \quad (2)$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας το νόμο των συνημιτόνων η (2) γίνεται: $2\left(\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\right) \geq \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 \Leftrightarrow \left(\left|\overrightarrow{OA}\right| - \left|\overrightarrow{OB}\right|\right)^2 \geq 0$, που ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \xi$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=11134

Λύση 1 (Γιώργος Μανεάδης) Έστω ότι δεν υπάρχει ο ζητούμενος $\xi \in \mathbb{R}$. Τότε η $g(x) = f(x) - x$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επομένως είναι $g(x) > 0$ για κάθε x στο $\mathbb{R}$ (1) ή $g(x) < 0$ για κάθε x στο $\mathbb{R}$ (2)

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f.

Στην $f(f(x)) = x$, θέτω όπου x το $f^{-1}(x)$, οπότε $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Αν ισχύει η (1) τότε $f(x) > x$, θέτω όπου x το $f^{-1}(x)$, οπότε $x > f^{-1}(x) \Rightarrow x > f(x)$ άτοπο (όμοια αν ισχύει η (2) προκύπτει άτοπο). Τελικά υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

Λύση 2 (Μίλτος Παπαγρηγοράκης)

Αν $f(0) = 0$ τότε $\xi = 0$.

Αν $f(0) \neq 0$ (υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f(0) > 0$) τότε στο διάστημα $[0, f(0)]$ η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής με $h(0) = f(0) > 0$ και $h(f(0)) = f(f(0)) - f(0) = -f(0) < 0$.

Επομένως σύμφωνα με θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (0, f(0))$ ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi$.

Λύση 3 (Ανδρέας Πούλος) Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f(f(x_1) = f(f(x_2)$, δηλαδή $x_1 = x_2$. Τώρα, αφού η συνάρτηση είναι $1-1$ και συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε θα είναι γνησίως μονότονη.

Έστω ότι είναι γνησίως αύξουσα. Αν δεν υπάρχει κάποιο x_o ώστε να ισχύει $f(x_o) = x_o$, τότε θα έχουμε $f(x_o) > x_o$ ή $f(x_o) < x_o$.

Έστω ότι ισχύει το πρώτο. Αφού η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα θα ισχύει και $f(f(x_o)) > f(x_o)$ ή $x_o > f(x_o)$, άτοπο. Με όμοιο τρόπο εργαζόμαστε και για τη δεύτερη υποπερίπτωση και στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Είναι απαραίτητο να τονίσουμε ότι, επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$, μπορούμε να βρούμε για κάθε x ένα και μόνο $f(a)$, το οποίο να είναι οσοδήποτε μεγάλο ή μικρό.

Λύση 4 (Λευτέρης Πρωτοπαπάς)

Έστω $g(x) = f(x) - x, \ \ x \in \mathbb{R}$.

- Αν $f(0) = 0$, τότε το ζητούμενο ξ είναι το μηδέν.
- Αν $f(0) = \alpha \neq 0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\alpha > 0$.
  Τότε: $f(\alpha) = f(f(0)) = 0$.
  Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων f (υπόθεση) και x (πολυωνυμική),
  με $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = -\alpha < 0$, $g(0) = f(0) - 0 = \alpha$, δηλαδή, $g(\alpha) \neq g(0)$ και $\eta = 0 \in (g(\alpha), g(0))$, οπότε από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = \eta = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi$.

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Chris) Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Αν ισχύει: $f(2008) = 1$, $f(2009) = 10$ και $\dfrac{f(f(x))}{f(f(x)+2)} = \dfrac{f(f(x)+3)}{f(f(x)+1)}, \forall x \in \mathbb{R}$ τότε:

Α) Να δείξετε οτι $f(2)f(3) = f(4)f(5)$.

Β) Να δείξετε οτι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in [2, 3]$ τέτοιο ώστε: $f^2(\rho) = f(2)f(3)$.

Γ) Δείξτε οτι η f δεν είναι $1-1$.

Δ) Αν η f είναι γνησίως αυξουσα στο $[2008, 2009]$ και $x_1, x_2 \in [2008, 2009]$, να δείξετε οτι υπάρχει ένα μοναδικό $x_0 \in [2008, 2009]$ τέτοιο ώστε:

$$3f(x_0) = f(x_1) + 2f(x_2).$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=10208

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Καταρχάς, λόγω συνέχειας και επειδή $f(x) \neq 0$, $f(2008) > 0$, είναι $f(x) > 0$ παντού.

Για το 1ο ερώτημα: Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $q \in (2008, 2009)$ ώστε $f(q) = 2$. Θέτουμε τότε στη δοθείσα $x = q$ και προκύπτει η ζητούμενη.

Για το 2ο ερώτημα: Αν $f(2) = f(3)$ τότε $r = 2$ ή $r = 3$. Ας είναι λοιπόν, $f(2) \neq f(3)$. Ας είναι π.χ. $f(2) > f(3)$. Τότε $f(2) > \sqrt{f(2)f(3)} > f(3)$ (εύκολο). Οπότε πάλι, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $\rho \in (2,3)$ ώστε $f(\rho) = \sqrt{f(2)f(3)}$.

Για το 3ο ερώτημα: Αν ήταν 1-1, ως συνεχής θα ήταν γνησίως μονότονη. Όμως από το 1) έχουμε $\dfrac{f(2)}{f(4)} = \dfrac{f(5)}{f(3)}$, άτοπο. Αν f γνησίως αύξουσα, το αριστερό μέλος < 1, ενώ το δεξί > 1. Ομοίως η γνησίως φθίνουσα.

Για το 4ο ερώτημα:

Λόγω της μονοτονίας και επειδή $x_1, x_2 \in [2008, 2009]$, έχουμε $1 = f(2008) \leq f(x_1) \leq f(2009) = 10$, $1 = f(2008) \leq f(x_2) \leq f(2009) = 10$,

άρα $1 \leq \dfrac{f(x_1) + 2f(x_2)}{3} \leq 10$, και το συμπέρασμα προκύπτει πάλι από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, σε συνδυασμό με τη μονοτονία της f. (η περίπτωση της ισότητας είναι απλή.)

Λύση 2 (Chris) Για το 3ο Ερώτημα Απο το Β) ερώτημα έχουμε: $f^2(\rho) = f(2) \cdot f(3),\ \rho \in [2,3]$.
Ομοίως: $f^2(k) = f(4) \cdot f(5), k \in [4,5]$ Άρα λόγω του Α) είναι
$f^2(k) = f^2(\rho) \Leftrightarrow f(k) = f(\rho)\ [f(x) > 0]$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $k \neq \rho$ αφού $\rho \in [2,3]$ και $k \in [4,5]$ έπεται η f δεν είναι $1-1$.

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφύδης) Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:*

$$f(x + f'(x)) \geq f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=8226

Λύση 1 (Μάνος Μανουράς) Αν το x είναι τέτοιο ώστε $f'(x) = 0$ τότε η ανισότητα κρατάει ως ισότητα!

Σταθεροποιούμε ένα x (εάν υπάρχει) ώστε να είναι

$f'(x) < 0$ και από ΘΜΤ στο $[x + f'(x), x]$ είναι

$f(x) - f(x + f'(x)) = -f'(c)f'(x)$ για κάποιο c ωστε $x + f'(x) < c < x$ και $f'(c) \leq f'(x) < 0$. άρα $f(x) - f(x + f'(x)) = -f'(c)f'(x) < 0$ που είναι το ζητούμενο.

Σταθεροποιούμε επίσης ένα x (εάν υπάρχει) ώστε να είναι $f'(x) > 0$ και από ΘΜΤ στο $[x, x + f'(x)]$ και ομοίως έπεται το ζητούμενο.

Λύση 2 (Χρήστος Κυριαζής) Μη σχολική λύση :

Αρχικά λόγω της σχέσης που δίνεται η συνάρτηση είναι κυρτή. Επομένως η πρώτη παράγωγος είναι αύξουσα. Ας πάμε με απαγωγή σε άτοπο.
Έστω πως υπάρχει $x_0 \in R$ ώστε $f(x_0 + f'(x_0)) < f(x_0)$
Αποκλείεται $f'(x_0) = 0$ για λόγους προφανείς.
Έστω $f'(x_0) > 0$.
Τότε μπορώ να εφαρμόσω Θ.Μ.Τ στο $[x_0, x_0 + f'(x_0)]$
Επομένως:
$f'(\xi) = \dfrac{f(x_0 + f'(x_0)) - f(x_0)}{f'(x_0)} < 0,$
$\xi \in (x_0, x_0 + f'(x_0))$
Όμως:
$\xi > x_0 \Rightarrow f'(\xi) \geq f'(x_0) > 0$ Αντίφαση.
Αν τώρα $f'(x_0) < 0$ θα εργαστώ στο $[x_0 + f'(x_0), x_0]$.
Τότε
$f'(\xi) = \dfrac{f(x_0) - f(x_0 + f'(x_0))}{-f'(x_0)} > 0.$
Όμως $\xi < x_0 \Rightarrow f'(\xi) \leq f'(x_0) < 0$ Αντίφαση.
Επομένως $f(x + f'(x)) \geq f(x), \forall x \in R$.

Λύση 3 (Ροδόλφος Μπόρης) Μια ακόμη ιδέα είναι να πάμε με μονοτονία.

Η f' είναι αύξουσα άρα έχει όριο στο $-\infty$ έστω ίσο με Α.

1. Αν $A \geq 0$ τότε $f'(x) \geq 0, \forall x \in R$ άρα $f \uparrow$ και $x + f'(x) \geq x \Rightarrow f(x + f'(x)) \geq f(x)$.

2. (α΄) Αν $A < 0$ και υπάρχει $a : f'(a) = 0$ τότε $f' \leq 0$ στο $(-\infty, a]$ οπότε $f \downarrow$ και $x + f'(x) \leq x, \Rightarrow f(x + f'(x) \geq f(x), \forall x \in (-\infty, a]$ για $x \in [a, +\infty)$, $f'(x) \geq f'(a) = 0$ και όπως στην 1 προκύπτει το ζητούμενο.

   (β΄) Αν $A < 0$ και δεν υπάρχει $a_1 : f'(a_1) = 0$ τότε $f'(x) < 0, \forall x \in R$, οπότε όπως στην 2(α) προκύπτει πάλι το ζητούμενο.
   Έτσι σε κάθε περίπτωση ισχύει $f(x + f'(x)) \geq f(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Pla.pa.s) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση*
$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$f'(x)\left(\ln(f^2(x) + x^2) + x^4\right) =$$

$$f'(x)\left(\eta\mu(f^2(x) + x^2) - \frac{1}{f^2(x)}\right) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Να βρεθεί η παράγωγος της.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=19535

Λύση 1 (Pla.pa.s) Η αρχική σχέση ισοδυναμεί με την

$$f'(x)(\ln(f^2(x) + x^2) + x^4 - \eta\mu(f^2(x) + x^2) + \frac{1}{f^2(x)} = 0), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Επειδή λόγω της υπόθεσης είναι $f^2(x), x^2 > 0$ θα είναι

$$\ln(f^2(x) + x^2) + x^4 - \eta\mu(f^2(x) + x^2) + \frac{1}{f^2(x)}$$

$$> \ln f^2(x) + \frac{1}{f^2(x)} - 1 \quad (1)$$

Θέτουμε τη συνάρτηση $g(u) = \ln u + \frac{1}{u} - 1$ με πεδίο ορισμού $D_g = (0, +\infty)$.

Τη παραγωγίζουμε και βρίσκουμε ότι $g'(u) = \dfrac{u-1}{u^2}$ κι οπότε η g' είναι αρνητική στο $(0, 1)$, θετική στο $(1, +\infty)$ ενώ μηδενίζεται για $u = 0$ όπου η g παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $g(1) = 0$. Επομένως θέτοντας $u = f^2(x)$ έχουμε

$$\ln f^2(x) + \frac{1}{f^2(x)} - 1 \geq 0 \qquad (2).$$

Άρα από τις (1) και (2) έχουμε ότι

$$\ln(f^2(x) + x^2) + x^4 - \eta\mu(f^2(x) + x^2) + \frac{1}{f^2(x)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Επομένως για να ισχύει η αρχική θα πρέπει $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$. Συνεπώς $f'(x) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνουν οι Σωτήρης Λουρίδας - Μυρτώ Λιάπη) Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιούν τη σχέση*

$$3\int_0^x f(t)dt - \int_1^{-x} f(t)dt = 2x^2 + 2x + 1 \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=20929

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Οι συναρτήσεις στα δύο μέλη είναι παραγωγίσιμες άρα παραγωγίζοντας παίρνουμε $3f(x) + f(-x) = 4x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε όπου x το $-x$ στην τελευταία και έτσι

$$3f(-x) + f(x) = -4x + 2,$$

οπότε λύνοντας το σύστημα παίρνουμε τελικά $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2}$ συνάρτηση που δυστυχώς *δεν* επαληθεύει την αρχική άρα δεν υπάρχει συνάρτηση με τις ζητούμενες ιδιότητες.
Το θέμα αυτό κάνει φανερό ότι σε τέτοιου τύπου ασκήσεις είναι απαραίτητη η επαλήθευση.

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνουν οι Μίλτος Παπαγρηγοράκης - Κώστας Καπένης) Έστω συνάρτηση* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχής για την οποία ισχύει*

$$\int_0^x f(t)dt < f(x), \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0, \quad \forall x \in [0, +\infty)$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=15152

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος) Θέτουμε

$$g(x) = e^{-x}\int_0^x f(t)dt \quad x \in [0, +\infty)$$

Είναι $g'(x) = e^{-x}\left[f(x) - \int_0^x f(t)dt\right] > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Επομένως, για $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0$, οπότε $\int_0^x f(t)dt > 0$, άρα και $f(x) > 0$. Τέλος, από τη δοσμένη σχέση προκύπτει άμεσα ότι $f(0) > 0$, οπότε τελικά είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο BAGGP93) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(0) = 1$ και $f^2(x) \neq 6x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Ισχύει επίσης ότι*

$$216x^3 - 2\left[2f'(x)f(x) - 6\right] = f^6(x) - 18xf^4(x) + 108\left[xf(x)\right]^2,$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

i) Να δείξετε ότι $f^2(x) - 6x = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ με $x \in [0, +\infty)$.

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$\int_1^{e-1}\left[f^4(x) - 12xf^2(x)\right]dx + 72\int_1^{e-1}\int_0^x tdt$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=100301

Λύση 1 (Βασίλης Κακαβάς)

i) Αν $g(x) = f^2(x) - 6x$ από υπόθεση έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\ +\infty)$ άρα και συνεχής και ισχύει $g(0) = f^2(0) = 1$. Αφού $g(x) \neq 0$, $x \in [0,\ +\infty)$ η δοθείσα ισότητα γίνεται $-2g'(x) = g^3(x)$ και αφού $g(x) \neq 0$ ισχύει $-2\dfrac{g'(x)}{g^3(x)} = 1$ ή $(\dfrac{1}{g^2(x)})' = (x)'$, $x \in [0,\ +\infty)$ οπότε έχουμε ότι $\dfrac{1}{g^2(x)} = x + c$, $x \in [0,\ +\infty)$.

Για $x = 0$ προκύπτει $c = 1$ άρα $\dfrac{1}{g^2(x)} = x + 1$ ή $\dfrac{1}{x+1} = g^2(x)$ άρα $|g(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x \in [0,\ +\infty)$.

Επειδή $g(x) \neq 0$, $x \in [0,\ +\infty)$ και συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,\ +\infty)$ και επειδή $g(0) = 1 > 0$ θα είναι $g(x) > 0$ επομένως $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x \in [0,\ +\infty)$ ή $f^2(x) - 6x = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x \in [0,\ +\infty)$.

ii) Είναι

$$\begin{aligned}\int_1^{e-1}(f^2(x) - 12x)dx &= \int_1^{e-1}(g^2(x) - 36x^2)dx \\ &= \int_1^{e-1} g^2(x)dx - \int_1^{e-1} 36x^2dx\end{aligned}$$

και $\displaystyle\int_1^{e-1} g^2(x)dx = \int_1^{e-1}\frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_1^{e-1}$

και ακόμη

$$\begin{aligned}\int_1^{e-1}\left(\int_0^x tdt\right)dx &= \int_1^{e-1}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{e-1} x^2dx\end{aligned}$$

άρα είναι

$$\int_1^{e-1}\left(f^4(x) - 12xf^2(x)\right)dx + 72\int_1^{e-1}\left(\int_0^x tdt\right)dx$$

$$= \int_1^{e-1} g^2(x)dx - \int_1^{e-1} 36x^2dx + \int_1^{e-1} 36x^2dx$$

$$= \int_1^{e-1} g^2(x)dx = \int_1^{e-1}\frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_1^{e-1}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα $[a, b]$, ώστε να ισχυουν οι παρακάτω:*

1. $f''(x) = -f(x), \forall x \in [a, b]$

2. $f(x) > f'(x), \forall x \in [a, b]$

3. $f(b) - f'(b) = f(a) - f'(a)$.

Να δείξετε ότι:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(x) - f'(x)}dx = \frac{1}{2}(b - a).$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=99309

Λύση (Παύλος Μαραγκουδάκης) Αν

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x) - f'(x)} dx \text{ και}$$

$$J = \int_a^b \frac{f'(x)}{f(x) - f'(x)} dx$$

τότε $I - J = b - a$ ενώ

$$I + J = \int_a^b \frac{f(x) + f'(x)}{f(x) - f'(x)} dx =$$

$$\int_a^b \frac{f'(x) - f''(x)}{f(x) - f'(x)} dx =$$

$$[\ln(f(x)) - f'(x)]_a^b = 0.$$

Άρα $2I = b - a$ οπότε έχουμε το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Έστω η συνεχής συνάρτηση* $f : [0,1] \to R$ *που είναι τέτοια ώστε να ισχύει* $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{4}\right) = 2x$ *για κάθε* $x \in [0,1]$*. Να βρείτε τον τύπο της* f.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=100097

Λύση 1 (Ροδόλφος Μπόρης) Θέτω $g(x) = f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$ η δοσμένη σχέση γίνεται

$$g(x) - \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2}\right) = 2x$$
$$\frac{1}{2^{n-1}} g(x) - \frac{1}{2^n} g\left(\frac{x}{2}\right) = 2x \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$\frac{1}{2^{n-1}} g\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{2^n} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2x \frac{1}{4^{n-1}}$$

Δίνω τιμες $n = 1, 2, ..., n$ στο n, προσθέτω τις σχέσεις, παίρνω όρια όταν $n \to +\infty$ και προκύπτει $g(x) - 0 = 2x \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{8x}{3}$ άρα

$$\frac{1}{2^{n-1}} f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = (8x/3) \frac{1}{4^{n-1}}.$$

Επαναλαμβάνοντας τα ίδια παίρνουμε

$$f(x) - 0 = (8x/3)(4/3) = \frac{32}{9} x,$$

λύση που επαληθεύει τις προϋποθέσεις του προβλήματος.

Λύση 2 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Θέτουμε

$$g(x) = f(x) - \frac{32}{9} x.$$

Τότε $g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4} g\left(\frac{x}{4}\right)$.

Θέτουμε κατόπιν $h(x) = g(x) - \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2}\right)$. Τότε $h(x) = \frac{1}{2} h\left(\frac{x}{2}\right)$. Τα παραπάνω ισχύουν για κάθε x στο $[0,1]$.

Αν M η μέγιστη τιμή της $|h|$ στο $[0,1]$ τότε

$$|h(x)| \le \frac{1}{2} M.$$

Άρα $M \le \frac{1}{2} M$ οπότε $M = 0$. Επομένως $h(x) = 0$ για κάθε x στο $[0,1]$.

Άρα $g(x) = \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2}\right)$ οπότε ομοίως $g(x) = 0$ για κάθε x στο $[0,1]$. Επομένως $f(x) = \frac{32}{9} x$ για κάθε x στο $[0,1]$, λύση που επαληθεύει τις προϋποθέσεις του προβλήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Έστω οι συναρτήσεις:* $f : R_+ \to R$ *παραγωγίσιμη και* $g : R \to R$ *αύξουσα, για τις οποίες ισχύει:* $f(0) = g(0) = 0$ *και* $f'(x) + g(f(x)) = 0, \forall x \ge 0$*. Να δειχθεί ότι:* $f(x) = 0, \forall x \ge 0$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=78058

Λύση 1 (Γιώργος Ροδόπουλος) $f'(x) + g(f(x)) = 0$ για κάθε $x \ge 0$ (1).

Έστω α πραγματικός με $\alpha > 0$. Η f είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$, άρα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

- Αν η f παρουσιάζει ένα από τα δύο ολικά ακρότατα σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[0,\alpha]$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

    i) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $k \in (0, a)$.
    Από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(k) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} g(f(k)) = 0$ (2)
    Επίσης για κάθε $x \in [0, a]$ έχουμε:

    $$f(x) \le f(k) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(f(x)) \le g(f(k)) \overset{(2)}{\Rightarrow}$$
    $$g(f(x)) \le 0 \quad (3) \overset{(1)}{\Rightarrow} -f'(x) \le 0$$
    $$\Rightarrow f'(x) \ge 0$$

    Δηλαδή η f είναι αύξουσα στο $[0,\alpha]$ οπότε για κάθε $x \in [0, a]$ θα ισχύει $f(0) \le f(x) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(0) \le g(f(x)) \Rightarrow 0 \le g(f(x))$ (4).
    Τώρα απο τις (3), (4) προκύπτει ότι για κάθε $x \in [0, a]$ ισχύει $g(f(x)) = 0$ και λόγω της (1) $f'(x) = 0$. Άρα η f είναι σταθερή στο $[0,\alpha]$ και επειδή $f(0) = 0$ θα είναι και $f(\alpha) = 0$.

ii) Έστω ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $k \in (0, a)$.

Η περίπτωση αυτή εξετάζεται ομοίως.

- Αν η f παρουσιάζει και τα δύο ολικά ακρότατα στα άκρα του διαστήματος διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(*i*) Έστω ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 και μέγιστο στο α. Τότε δείχνουμε όπως στην πρώτη λύση μου ότι $g(f(a)) \leq 0$.

Για κάθε $x \in [0, a]$ έχουμε:

$$f(0) \leq f(x) \leq f(a) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow}$$
$$g(0) \leq g(f(x)) \leq g(f(a)) \Rightarrow$$
$$0 \leq g(f(x)) \leq g(f(a)) \leq 0 \Rightarrow$$
$$g(f(x)) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f^{'}(x) = 0$$

και όπως προηγουμένως βρίσκουμε $f(\alpha) = 0$.

(*ii*) Όμοια και για την περίπτωση που η f παρουσιάζει μέγιστο στο 0 και ελάχιστο στο α.

Επομένως σε κάθε περίπτωση θα είναι $f(\alpha) = 0$ και έτσι $f(x) = 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Λύση 2 (Νίκος Ζανταρίδης) Επειδή η g είναι αύξουσα στο R θα ισχύει: $f(x)g(f(x)) \geq 0, \quad \forall x \geq 0$ (εύκολο). Έτσι για κάθε $x \geq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Rightarrow \quad [f'(x) + g(f(x))]\, f(x) = 0\\ &\Rightarrow \quad f'(x)f(x) + f(x)g(f(x)) = 0\\ &\Rightarrow \quad 2f'(x)f(x) = -2f(x)g(f(x)) \leq 0\\ &\Rightarrow \quad \left(f^2(x)\right)' \leq 0\end{aligned}$$

άρα η f^2 είναι φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε για κάθε $x \geq 0$ ισχύει: $f^2(x) \leq f^2(0) \Rightarrow f^2(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ επομένως είναι: $f(x) = 0, \quad \forall x \geq 0$, που ικανοποιεί την υπόθεση.

Επιμελητής: Σπύρος Καπελλίδης

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Βρείτε το*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2\ln x}-x}{(\ln x)^x+x}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=78536

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Αφού για $x > e$ έχουμε $2\ln x > 2 > 1$, ισχύει $x^{2\ln x} - x > 0$. Άρα

$$0<\frac{x^{2\ln x}-x}{(\ln x)^x+x}\le\frac{x^{2\ln x}}{(\ln x)^x+x}\le\frac{x^{2\ln x}}{(\ln x)^x}\ (*)$$

.

Για $x \geq e^e$ είναι $\ln x \geq e$ οπότε το τελευταίο κλάσμα στην $(*)$ είναι $< \dfrac{x^{2\ln x}}{e^x}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι το δεξί μέλος τείνει στο 0 καθώς $x \to +\infty$. Παίρνοντας λογάριθμο του δεξιού μέλους, αρκεί να δείξουμε ότι $2(\ln x)^2 - x \to -\infty$. Αλλά αυτό είναι απλό (υπάρχουν πολλοί τρόποι, π.χ. αφού πρώτα δείξουμε με l' Hospital ότι $\dfrac{2(\ln x)^2 - x}{x} \to -1$.

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες*

$f(0) = 0$ *και* $f(x + y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=72699

Λύση (Θάνος Μάγκος) Σταθεροποιούμε το y και θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x + y) - f(x)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $g(x) \leq f(y) = g(0)$, για κάθε x. Δηλαδή, η g παρουσιάζει στο 0 ολικό μέγιστο. Τότε, από το θεώρημα Fermat, ισχύει $g'(0) = 0$.

Είναι $g'(x) = f'(x+y)(x+y)' - f'(x) = f'(x+y) - f'(x)$, άρα $f'(y) = f'(0)$.

Η σχέση αυτή ισχύει για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό y. Επομένως, έχουμε $f(y) = yf'(0)$, αφού $f(0) = 0$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί (Juniors)

Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Συνδυαστική

Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Δίνεται η εξίσωση*

$$x(x+1) = pq(x-y),$$

όπου p, q πρώτοι, διαφορετικοί μεταξύ τους. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$, στις οποίες το y είναι κοινό.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=88955

Λύση (Παύλος Μαραγκουδάκης) Έστω (x, y) στους θετικούς ακεραίους ώστε $x(x+1) = pq(x-y)$, όπου p, q πρώτοι, διαφορετικοί μεταξύ τους.

Τότε οι p, q διαιρούν ο ένας το x και ο άλλος το $x+1$. Πράγματι αν $x = apq$ όπου a θετικός ακέραιος τότε $a(x+1) = x-y$ οπότε $x+1 \le a(x+1) = x-y < x$, άτοπο. Αν $x+1 = apq$ τότε έχουμε πάλι άτοπο αφού $x \le ax = x-y < x$.

Υπάρχουν επομένως δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1η: $x = ap$ και $x+1 = bq$ όπου οι a, b θετικοί ακέραιοι. Τότε $ab = x-y$.

Επομένως $y = a(p-b)$. Άρα

$$p > b > 0 \qquad (1)$$

Ακόμα

$$bq - ap = 1 \qquad (2).$$

Έτσι η επίλυση της αρχικής διοφαντικής εξίσωσης, σε αυτή την περίπτωση, ανάγεται στην εύρεση θετικών ακεραίων a, b ώστε να ισχύουν οι (1),(2). Οι p, q είναι διαφορετικοί πρώτοι, άρα πρώτοι μεταξύ τους. Επομένως υπάρχει ένα ζεύγος (a_0, b_0) ώστε να ισχύει η (2). Υπάρχουν άπειρα ζεύγη (a, b) ώστε να ισχύει η (2) που προκύπτουν από τους τύπους $a = a_0 + kq$ και $b = b_0 + kp$ όπου ο k είναι ακέραιος. Για να ισχύει η (1) θα πρέπει $1 - \dfrac{b_0}{p} > k > -\dfrac{b_0}{p}$. Υπάρχει ακριβώς ένας ακέραιος που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση.

Περίπτωση 2η: $x+1 = kp$ και $x = mq$ όπου οι k, m θετικοί ακέραιοι. Τότε $km = x-y$.

Επομένως $y = m(q-k)$. Άρα

$$q > k > 0 \qquad (1).$$

Όπως στην περίπτωση (1) υπάρχει ακριβώς μία λύση της μορφής αυτής.

Έχουμε λοιπόν ακριβώς 2 λύσεις: Η μία λύση $(ap, a(p-b))$ με $p > b > 0$ και $bq - ap = 1$. Επιπλέον $q > a$. Η δεύτερη λύση $(mq, m(q-k))$ με $q > k > 0$ και $kp - mq = 1$. Άρα $bq - ap = kp - mq = 1$ οπότε $(b+m)q = p(a+k)$. Άρα $q/(a+k)$. Είναι $a+k < 2q$. Άρα $a+k = q$ οπότε $b+m = p$. Άρα $a(p-b) = m(q-k)$.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ ώστε*

$$\frac{f(x)+y}{x+f(y)} + \frac{f(x)y}{xf(y)} = \frac{2(x+y)}{f(x+y)}, \ \forall x, y \in \mathbb{N}^*$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=102816

Λύση 1 (Μιχάλης Λάμπρου) Απάντηση: $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$.

Για $x = y = n$ έχουμε $\dfrac{f(n)+n}{n+f(n)} + \dfrac{f(n)n}{nf(n)} = \dfrac{4n}{f(2n)}$, άρα $f(2n) = 2n$ $(*)$.

Έστω $f(1) = a \in \mathbb{N}^*$. Βάζοντας $x = 2, y = 1$ παίρνουμε $\dfrac{2+1}{2+a} + \dfrac{2}{2a} = \dfrac{6}{f(3)}$, οπότε $f(3) = \dfrac{a(3a+6)}{2a+1} = a + \dfrac{a(a+5)}{2a+1}$.

Για να είναι φυσικός το τελευταίο κλάσμα, δεδομένου ότι οι a και $2a+1$ είναι πρώτοι προς αλλήλους, πρέπει $2a+1 | a+5$. Ειδικά $2a+1 \le a+1$, δηλαδή $a \le 4$. Με έλεγχο βλέπουμε ότι $a = 1$ ή $a = 4$.

Το επόμενο βήμα είναι να αποκλείσουμε το $a = 4$. Πράγματι η $x = 4, y = 1$ μαζί με την $(*)$ στην περίπτωση $f(4) = 4$, δίνει

$\dfrac{4+1}{4+a} + \dfrac{4}{4a} = \dfrac{10}{f(5)}$. Άρα $f(5) = \dfrac{5a(a+4)}{3a+2}$, που για $a = 4$ δεν είναι φυσικός. Τελικά το μόνο υποψήφιο είναι το $a = 1$. Ειδικά, $f(1) = a = 1$.

Θέτοντας $x = 2n, y = 1$, μαζί με την $(*)$, παίρνουμε

$\dfrac{2n+1}{2n+1} + \dfrac{2n}{2n} = \dfrac{2(2n+1)}{f(2n+1)}$, δηλαδή $f(2n+1) = 2n+1$, που μαζί με την $(*)$ έχουμε $f(m) = m$, $\forall m$, η οποία επαληθεύει την αρχική.

Λύση 2 (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Για $y = x$ παιρνουμε $f(2x) = 2x$.

Για $x = 1$, $y = 2$ επειδη $f(3) \in \mathbb{N}$ παιρνουμε $f(1) = 1$ και $f(3) = 3$ ειτε $f(1) = 4$ και $f(3) = 1$. Αν $f(1) > 4$ τοτε $f(3) \notin \mathbb{N}$.

Αν ήταν $f(1) = 4$ τότε για $x = 2$, $y = 1$ βρίσκουμε $f(3) = 8$ που έρχεται σε αντίθεση με τα προηγούμενα.

Άρα $f(1) = 1$ και θέτοντας $x = 1$, $y = 2x$ τότε βρίσκουμε $f(2x + 1) = 2x + 1$.

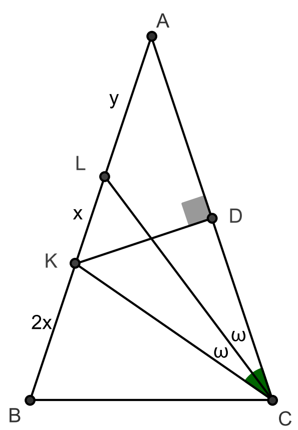
Άρα τελικά $f(x) = x$ η οποία επαληθεύει την αρχική.

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο Γιάννης Τσόπελας) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle\ ABC$ με $AB = AC$ και έστω τα σημεία K, L μεταξύ των A, B, ώστε να είναι $AK = KC$ και CL διχοτόμος της γωνίας $\angle ACK$ και $BK = 2KL$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του $\triangle\ ABC$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=14381

Λύση (KARKAR) Θέτουμε $KL = x$, $AL = y$, οπότε $KC = x + y$ και $AB = AC = 3x + y$.



Στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle\ KAC$, σύμφωνα με το Θεώρημα διχοτόμου,

έχουμε $\dfrac{CK}{CA} = \dfrac{LK}{LA} \Longrightarrow \dfrac{x+y}{3x+y} = \dfrac{x}{y}$

$\Longrightarrow 3x^2 + xy = xy + y^2 \Longrightarrow y = x\sqrt{3}$

Άρα, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle\ DAK$, όπου D είναι το μέσον του AC,ισχύει

$συνA = \dfrac{AD}{AK} = \dfrac{\frac{3x+x\sqrt{3}}{2}}{x + x\sqrt{3}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \angle A = 30^o$

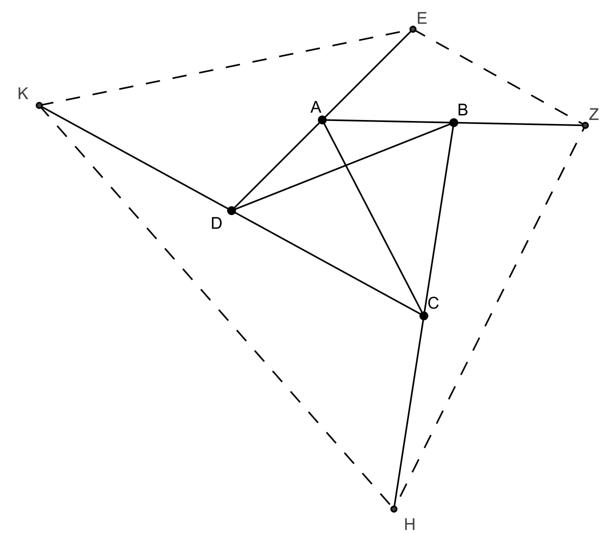
και $\angle B = \angle C = 75^o$

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει ο Πέτρος Ράπτης) Με δοσμένο το κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ κατασκευάζουμε ένα νέο τετράπλευρο ως εξής : Παίρνουμε το σημείο E έτσι ώστε το A να είναι το μέσον του DE. Ομοίως το σημείο Z ώστε το B να είναι μέσον του AZ. Ομοίως το σημείο H ώστε το C να είναι μέσον του BH και τέλος το σημείο K ώστε το D να είναι μέσον του CK. Αποδείξτε ότι $(EZHK) = 5(ABCD)$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=17457

Λύση (Ηλίας Καμπελής) Στα τρίγωνα $\triangle\ AEZ$, $\triangle\ ABD$ ισχύει $\angle EAZ + \angle BAD = 180^o$



άρα έχουμε

$$\frac{(AEZ)}{(ABD)} = \frac{(AZ)(AE)}{(AB)(AD)} = \frac{2(AB)(AD)}{(AB)(AD)} = 2 \Longrightarrow$$

$$(AEZ) = 2(ABD) \qquad (1)$$

Επίσης, στα τρίγωνα $\triangle\ CHK$, $\triangle\ CBD$ ισχύει $\angle HCK + \angle BCD = 180^o$
και άρα έχουμε

$$\frac{(CHK)}{(CBD)} = \frac{(CK)(CH)}{(CB)(CD)} = \frac{2(CD)(CB)}{(CB)(CD)} = 2 \Longrightarrow$$

$$(CHK) = 2(CBD) \qquad (2)$$

Από (1), (2) $\Longrightarrow$

$$(AEZ) + (CKH) = 2(ABD) + 2(CBD) = 2(ABCD) \qquad (3)$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$(BZH) + (DEK) = 2(BAC) + 2(DAC) = 2(ABCD) \qquad (4)$

Από (3), (4) $\Longrightarrow$ $(EZHK) = (AEZ) + (CHK) + (BZH) + (DEK) + (ABCD) = 5(ABCD)$.

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης)* *Κάποια κελιά ενός* 2011×2011 *πίνακα έχουν μολυνθεί από μια ασθένεια. Η ασθένεια επεκτείνεται και στα υπόλοιπα κελιά με βάση τον ακόλουθο κανόνα:*

Για κάθε τέσσερα γειτονικά κελιά που σχηματίζουν ένα 2×2 *υποπίνακα, αν τα τρία είναι μολυσμένα, τότε μολύνεται και το τέταρτο.*

Να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός μολυσμένων κελιών ώστε να μπορούν να μολύνουν με βάση τον πιο πάνω κανόνα όλα τα υπόλοιπα κελιά.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=16299

Λύση (Γιώργος Βλαχος) Κάθε τετραγωνάκι 2×2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί το πολύ μία φορά για να μολύνει κάποιο κελί. Ο πίνακας έχει 2010^2 τετραγωνάκια 2×2, οπότε θα χρειαστούμε τουλάχιστον

$$2011^2 - 2010^2 = 2010 + 2011 = 4021$$

μολυσμένα κελιά αρχικά, αφού στη συνέχεια μπορεί να μολυνθούν το πολύ 2010^2 κελιά. Εύκολα βλέπουμε ότι αν αρχικά η μία διαγώνιος του πίνακα και τα 2010 σημεία που βρίσκονται ακριβώς από κάτω της είναι αρχικά μολυσμένα, ο πίνακας τελικά θα μολυνθεί ολόκληρος.

ΣΧΟΛΙΟ: Το παραπάνω πρόβλημα αποτέλεσε έμπνευση για το πρόβλημα

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=...=85039

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρείτε τους μη μηδενικούς πραγματικούς* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *για τους οποίους ισχύει*

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = x_2 + \frac{1}{x_3} = \cdots = x_{n-1} + \frac{1}{x_n} = x_n + \frac{1}{x_1} = 2$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=14802

Λύση (Θάνος Μάγκος) Καταρχάς, αποδεικνύουμε, ότι όλα τα x_i είναι θετικά. Έστω π.χ. $x_1 < 0$. Τότε, από την εξίσωση $x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 2$, προκύπτει $0 < x_2 < \dfrac{1}{2}$, οπότε από την εξίσωση $x_2 + \dfrac{1}{x_3} = 2$ προκύπτει ότι $\dfrac{1}{2} < x_3 < \dfrac{2}{3}$ και συνεχίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο ότι $x_n < \dfrac{n-1}{n}$.

Λόγω της τελευταίας εξίσωσης είναι όμως $x_n > 2$, οπότε $2 < \dfrac{n-1}{n}$, άτοπο.

Άρα είναι $x_i > 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε, προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις βρίσκουμε

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 2n,$$

δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{x_i} - \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 = 0,$$

άρα $x_i = 1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

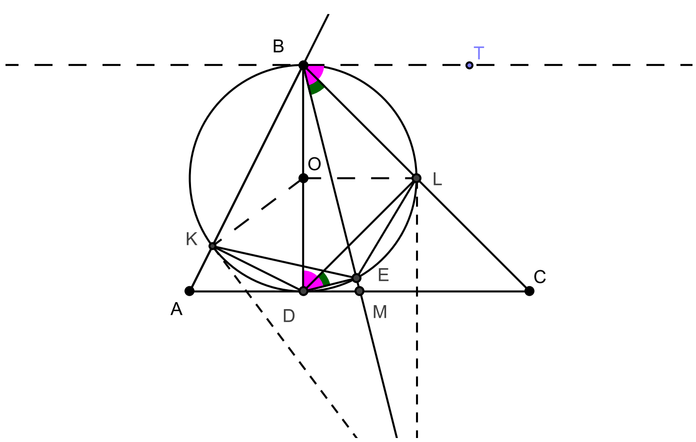
ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο Γρηγόρης Κακλαμάνος) Έστω οξυγώνιο $\triangle ABC$. Ο κύκλος με διάμετρο το ύψος BD τέμνει τις πλευρές AB και BC στα σημεία K και L αντίστοιχα. Οι εφαπτόμενες στα σημεία K και L τέμνονται στο σημείο X. Να αποδειχθεί ότι η BX διχοτομεί την AC.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=19853

Λύση 1 (Σάκης Τσαρέας) Έστω E το σημείο τομής του κύκλου (O) με διάμετρο το AD, από την ευθεία BX.

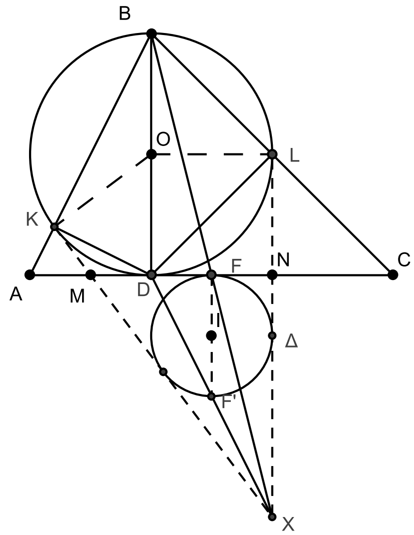
Επειδή οι XK, XL είναι εφαπτόμενες του (O) και η τέμνουσα αυτόν ευθεία BE περνάει από το X, έχουμε ότι το $KBLE$ είναι αρμονικό τετράπλευρο και επομένως η δέσμη $D.KBLE$, που συνδέει το σημείο D του (O) με τις κορυφές του, είναι αρμονική.



Δια του B φέρνουμε την παράλληλη ευθεία BT προς την AC και από $BK \perp DK$ και $BT \perp DB$ και $BL \perp DL$ και $BE \perp DE$, προκύπτουν ίσες οι γωνίες που σχηματίζονται από τις ομόλογες ευθείες των δεσμών $D.KBLE$, $B.ATLE$ και άρα, η δέσμη $B.ATLE$ είναι επίσης αρμονική.

Επειδή τώρα ισχύει $AC \parallel BT$, συμπεραίνεται ότι $MA = MC$, όπου $M \equiv AC \cap BX$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Λύση 2 (Σάκης Τσαρέας) Έστω τα σημεία $M \equiv AC \cap XK$ και $N \equiv AC \cap XL$.



Ο κύκλος (O) με διάμετρο το BD είναι παρεγγεγραμμένος στο τρίγωνο $\triangle XMN$ και έστω (I) ο εγγεγραμμένος κύκλος στο ίδιο τρίγωνο ο οποίος εφάπτεται στη AC, στο σημείο έστω F.

Είναι γνωστό ότι τα σημεία D, F, είναι συμμετρικά ως προς το μέσον της πλευράς MN του $\triangle XMN$ και άρα έχουμε $FN = MD \quad ,(1)$

Θεωρείται επίσης γνωστό ότι οι ευθείες KD, KB, περνάνε από τα σημεία F', F, όπου F' είναι το αντιδιαμετρικό του F στον κύκλο (I).

Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle KAD$, $\triangle LCD$, όπου εύκολα αποδεικνύεται ότι τα M, N είναι αντιστοίχως τα μέσα των AD, CD, έχουμε $MA = MK = MD \quad ,(2)$ και $NC = NL = ND \quad ,(3)$

Από (1), (2), (3) $\Longrightarrow FC = NF + NC = MD + ND \quad ,(4)$

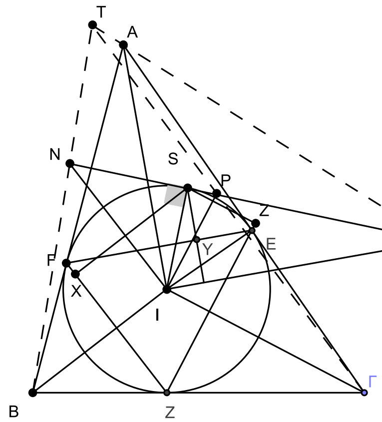
Από (4) $\Longrightarrow FC = \dfrac{AD}{2} + \dfrac{CD}{2} = \dfrac{AC}{2}$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Έστω τρίγωνο $\triangle ABC$ και (I) ο εγγεγραμμένος κύκλος του. Οι κάθετες ευθείες επί των AI, BI, CI στο σημείο I, τέμνουν τυχούσα εφαπτομένη του (I) σε σημείο του έστω S, στα σημεία M, N, P, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AM, BN, CP τέμνονται στο ίδιο σημείο έστω T.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=20361

Λύση (Παναγιώτης Λώλας) Έστω D, E, F, τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου (I) του $\triangle ABC$, στις πλευρές του BC, AC, AB, αντιστοίχως.



Η πολική ευθεία του σημείου A ως προς τον κύκλο (I) είναι η ευθεία EF και η πολική ευθεία του σημείου M ως προς τον ίδιο κύκλο, είναι η δια του S κάθετη ευθεία επί την MI, η οποία τέμνει την $EF \parallel MI$ στο σημείο έστω Y.

Δηλαδή, η προβολή Y του S επί της EF, ως το σημείο τομής των πολικών ευθειών των σημείων A, M ως προς τον κύκλο (I), είναι ο πόλος της ευθείας AM ως προς τον ίδιο κύκλο.

Ομοίως, οι προβολές X, Z του S επί των DF, DE αντιστοίχως, είναι οι πόλοι των ευθειών BN, CP αντιστοίχως, ως προς τον (I).

Ως γνωστό τα σημεία X, Y, Z, ανήκουν στην Ευθεία **Simson** του σημείου S, ως προς το τρίγωνο $\triangle DEF$.

Επειδή τώρα τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά, συμπεραίνεται ότι οι πολικές τους ευθείες AM, BN, CP ως προς τον κύκλο (I), τέμνονται στο ίδιο σημείο έστω T και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της πραγματικής σταθερής M έτσι ώστε*

$$(a+bc)(b+ac)(c+ab)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq Mabc$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c για τους οποίους $a+b+c=1$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=98985

Λύση (Θάνος Μάγκος) Θέτουμε στην ανισότητα $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ και προκύπτει $M \leq \dfrac{64}{3}$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αποδεικνύουμε την ανισότητα για $M=\dfrac{64}{3}$.

Επειδή $a+b+c=1$, είναι $a+bc=(a+b)(a+c)$, $b+ca=(b+a)(b+c)$, $c+ab=(c+a)(c+b)$ και η προς απόδειξη γράφεται σε ομογενή μορφή ως

$$\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{64}{3}(a+b+c)^2abc.$$

Όπως έχουμε δει και άλλες φορές (π.χ. εδώ, ισχύει $(a+b)(b+c)(c+a) \geq \dfrac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$. Επομένως, είναι τελικά αρκετό να αποδείξουμε, ότι $(ab+bc+ca)^3 \geq 27(abc)^2$, η οποία ισχύει από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ.

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Στο επίπεδο δίνονται*

(α) 100 σημεία. Να δείξετε ότι υπάρχει ευθεία που αφήνει σε κάθε ημιεπίπεδο που ορίζει, ακριβώς 50 από αυτά τα σημεία.

(β) 2010 σημεία. Να δείξετε ότι υπάρχει κύκλος που περιέχει στο εσωτερικό του ακριβώς 1005 από αυτά τα σημεία και τα υπόλοιπα 1005 σημεία βρίσκονται στο εξωτερικό του.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=98985

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης)

(α) Κοιτάμε όλες τις ευθείες οι οποίες περιέχουν τουλάχιστον δύο από αυτά τα σημεία. Υπάρχει πεπερασμένος αριθμός τέτοιων ευθειών και επομένως μπορούμε να πάρουμε μια ευθεία η οποία δεν είναι παράλληλη με καμία από αυτές. Περιστρέφοντας το επίπεδο μπορούμε χωρίς βλάβη να θεωρήσουμε πως αυτή η ευθεία είναι ο άξονας των x και άρα ότι κάθε δύο από τα δοσμένα σημεία έχουν διαφορετική τεταγμένη. Έστω ότι έχουν τεταγμένες $y_1 < y_2 < \cdots < y_{100}$. Βλέπουμε τώρα ότι η ευθεία $y=(y_{50}+y_{51})/2$ έχει την ζητούμενη ιδιότητα.

(β) Με παρόμοιο σκεπτικό βρίσκουμε ένα σημείο P στο επίπεδο ώστε κάθε δυο από τα δοσμένα σημεία να έχουν διαφορετική απόσταση από αυτό. Αυτό είναι δυνατό αφού το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από δύο από τα δοσμένα σημεία είναι ένωση πεπερασμένου αριθμού ευθειών (των μεσοκαθέτων των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τα σημεία) και άρα δεν μπορούν να καλύπτουν όλο το επίπεδο. ($\star$) Υποθέτουμε τώρα ότι τα σημεία έχουν αποστάσεις $r_1 < r_2 < \cdots < r_{1000}$ από το P και βλέπουμε ότι ο κύκλος με κέντρο το P και ακτίνα $(r_{500}+r_{501})/2$ έχει την ζητούμενη ιδιότητα.

($\star$) Ο ισχυρισμός ότι πεπερασμένος αριθμός ευθειών δεν μπορεί να καλύπτει το επίπεδο αν και «προφανής» θέλει απόδειξη. Γνωρίζω μια όμορφη και σύντομη απόδειξη αλλά σας αφήνω να το σκεφτείτε.

Απόδειξη από τον AlexandrosG: Έστω ότι οι ευθείες είναι ν το πλήθος. Θεωρούμε ένα τυχαίο κύκλο. Είναι γνωστό ότι κύκλος και ευθεία έχουν το πολύ 2 κοινά σημεία. Άρα ο κύκλος έχει με τις ευθείες το πολύ 2ν κοινά σημεία. Άρα οι ευθείες δεν καλύπτουν το επίπεδο αφού ο κύκλος έχει άπειρα σημεία.

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Προτείνει ο Πέτρος Βαλέττας) Έστω $f : [0,1] \to [0,\infty)$ κοίλη συνάρτηση. Να δειχθεί ότι*

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=106562

Λύση (Νίκος Κολλιόπουλος) Από την υπόθεση, για κάθε $a, x, y \in [0,1]$ έχουμε

$$f(ax + (1-a)y) \ge af(x) + (1-a)f(y) \ge af(x)$$

και σε αυτήν για $y = 0, a = x$ παίρνουμε $xf(x) \le f(x^2)$. Αυτό ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)2xdx\\ &\le \frac{1}{2}\int_0^1 f(x^2)2xdx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x^2)d(x^2)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Να εξεταστεί αν υπάρχουν άπειρα πολυώνυμα της μορφής $x^n - 1$ με n περιττό τα οποία να έχουν διαιρέτες όλων των βαθμών μικρότερου ή ίσου του n στο $\mathbb{Z}[x]$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=20779

Λύση (Ηλίας Ζαδίκ) Υπάρχουν. Ισοδύναμα, αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $m \le n$ υπάρχουν διαιρέτες $d_1, \dots, d_k$ του n με $\sum \phi(d_i) = m$. (Το καλούμε f-άθροισμα για ευκολία.) Θα δείξουμε ότι το γινόμενο των πρώτων k πρώτων χωρίς το 2 για κάθε k ικανοποιεί. Πράγματι το 3 είναι εντάξει. Έστω ότι έχουμε το αποτέλεσμα για το γινόμενο $p_2 \cdots p_n$. Αν πάρουμε ένα $m \le p_2 \cdots p_{n+1}$, από ευκλείδια διαίρεση έχουμε $m = (p_{n+1} - 1)t + r$, με $0 < r \le p_{n+1} - 2 \le p_2 \cdots p_n$. (Αφού το $p_2 \cdots p_n + 2$ είναι περιττός με διαιρέτες πρώτους με τα $p_2, \dots, p_n$.) Αν $t < p_2 \cdots p_n$ τότε θέτουμε $a = t, b = r$. Αλλιώς ισχύει

$$\begin{aligned}r + (t - p_2 \cdots p_n)(p_{n+1} - 1) &= m - p_2 \cdots p_n(p_{n+1} - 1)\\ &\le p_2 \cdots p_n.\end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει

$$\begin{aligned}m &= (p_{n+1} - 1)p_2 \cdots p_n + r + (t - p_2 \cdots p_n)(p_{n+1} - 1)\\ &= a(p_{n+1} - 1) + b,\end{aligned}$$

για $a = p_2 \cdots p_n, b = r + (t - p_2 \cdots p_n)(p_{n+1} - 1)$. Σε κάθε περίπτωση $m = (p_{n+1} - 1)a + b$ με $a, b \le p_2 \cdots p_n$. Συνεπώς από την επαγωγική υπόθεση τα a, b γράφονται ως f-άθροισμα διαιρετών του $p_2 \cdots p_n$ και απλά τώρα για να πάρουμε το ζητούμενο προσθέτουμε το p_{n+1} σε αυτούς του a.

Αλγεβρα (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Σε μια ομάδα G υπάρχουν στοιχεία a, b τέτοια ώστε $a^3 b = ba^2$ και $a^2 b = ba^3$. Να δείξετε ότι $a^5 = e$, όπου e είναι το ταυτοτικό στοιχείο της G.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=20719

Λύση 1 (Σιλουανός Μπραζιτικός) Πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο τις δύο σχέσεις έχουμε $a^3 = ba^2 b^{-1}$ και $a^2 = ba^3 b^{-1}$. Υψώνοντας την πρώτη στο τετράγωνο και τη δεύτερη στην τρίτη παίρνουμε $a^6 = ba^4 b^{-1}$ και $a^6 = ba^9 b^{-1}$. Από τις τελευταίες δύο έχουμε $a^4 = a^9$, επομένως $a^5 = e$ που είναι το ζητούμενο.

Λύση 2 (Δημήτρης Ιωάννου) Έχουμε

$$\begin{aligned} &a^3 b = a(a^2 b) = a(ba^3) = aba^3 \\ \Rightarrow &a^3 b = aba^3 \\ \Rightarrow &ba^2 = aba^3 \\ \Rightarrow &b = aba. \end{aligned}$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} a^3 b = ba^2 &\Rightarrow a^3 aba = ba^2 \\ &\Rightarrow a^4 b = ba \\ &\Rightarrow a(a^4 b) = a(ba) \\ &\Rightarrow a^5 b = aba \\ &\Rightarrow a^5 b = b \\ &\Rightarrow a^5 = e. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Βαγγέλης Μουρούκος) Έστω H μια αβελιανή ομάδα και $C_2 = \langle x \rangle$ η κυκλική ομάδα τάξης 2 με γεννήτορα x. Θεωρούμε τον ομομορφισμό ομάδων $\varphi : C_2 \to \mathrm{Aut}(H)$ που ορίζεται από τη σχέση $\varphi(x)(h) = h^{-1}$ για κάθε $h \in H$. (Εφόσον η H είναι αβελιανή, η φ είναι καλά ορισμένη). Θεωρούμε το ημιευθύ γινόμενο $G := H \rtimes_\varphi C_2$. Να αποδείξετε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή αν και μόνο αν ισχύει $h^2 = 1$ για κάθε $h \in H$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=20713

Λύση (Ζωή Κρυφού)

Για το αντίστροφο,

$$\begin{aligned} h^2 = 1 \, \forall h \in H \implies &h^{-1} = h \, \forall h \in H \\ \implies &\varphi(x) = 1_H \\ \implies &H \rtimes_\varphi C_2 = H \rtimes_{1_H} C_2 = H \times C_2. \end{aligned}$$

Επομένως η G είναι αβελιανή ως ευθύ γινόμενο αβελιανών.

Για το ευθύ, αφού η G είναι αβελιανή, έχουμε

$$\begin{aligned} &(h,1)(1,x) = (1,x)(h,1) \, \forall h \in H \\ \implies &(h \cdot \varphi(1)(1), 1 \cdot x) = (1 \cdot \varphi(x)(h), x \cdot 1) \, \forall h \in H \\ \implies &(h, x) = (h^{-1}, x) \, \forall h \in H \\ \implies &h = h^{-1} \, \forall h \in H \\ \implies &h^2 = 1 \, \forall h \in H. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Αναστάσιος Κοτρώνης) Η x_n ορίζεται αναδρομικά για κάποια x_0 , x_1 από τον τύπο*

$$x_n = \frac{(n-1)\,c}{1+(n-1)\,c}\,x_{n-1} + \frac{1}{1+(n-1)\,c}\,x_{n-2}\,,\ \text{όπου } c>0\,.$$

Βρείτε το $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=12954

Λύση (Σεραφείμ Τσιπέλης) Αν $x_1 = x_0$ τότε

$x_2 = \dfrac{c}{1+c}\,x_0 + \dfrac{1}{1+c}\,x_0 = x_0\,,$

$x_3 = \dfrac{2c}{1+2c}\,x_0 + \dfrac{1}{1+2c}\,x_0 = x_0$ κ.λ.π. οπότε $x_n = x_0$ και τελικά $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ (τετριμμένη περίπτωση).

Θεωρούμε $x_1 \neq x_0$. Τότε

$$x_n = \frac{1+(n-1)c-1}{1+(n-1)c}\,x_{n-1} + \frac{1}{1+(n-1)c}\,x_{n-2} =$$

$$x_{n-1} - \frac{1}{1+(n-1)c}\,(x_{n-1}-x_{n-2}) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{1+(n-1)c}\,(x_{n-1}-x_{n-2})}\,.$$

Θέτουμε $y_n = x_n - x_{n-1}$, τότε

$\boxed{y_n = -\dfrac{1}{1+(n-1)c}\,y_{n-1}}$ με $y_1 = x_1 - x_0 = A \neq 0$.

Για την ακολουθία $\{y_n\}_{n=1,2,3..}$ έχουμε

$y_2 = -\dfrac{1}{1+c}A\,,\ y_3 = -\dfrac{1}{1+2c}y_2 = \dfrac{1}{(1+c)\,(1+2c)}A$ και

επαγωγικά $\boxed{y_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(1+c)\,(1+2c)\ldots(1+(n-1)\,c)}A}\,.$

Άρα $x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(1+c)\,(1+2c)\,..\,(1+(n-1)\,c)}A =$

$x_{n-1} + a_n A\,,$ όπου $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(1+c)\,(1+2c)\,..\,(1+(n-1)\,c)}.$

Όμως $x_n = x_{n-1} + a_n A \quad \Rightarrow$

$$\sum_{k=2}^{n} x_k = \sum_{k=2}^{n} x_{k-1} + A\sum_{k=2}^{n} a_k \ \Rightarrow\ x_n = x_1 + A\sum_{k=2}^{n} a_k \ \Rightarrow$$

$$\boxed{x_n = x_1\left(1+\sum_{k=2}^{n} a_k\right) - x_0\sum_{k=2}^{n} a_k}$$

Τότε $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1\left(1+\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k\right) - x_0\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k}\,.$

Μένει συνεπώς να υπολογιστεί η σειρά

$$S = \frac{1}{1+c} - \frac{1}{(1+c)\,(1+2c)} + \frac{1}{(1+c)\,(1+2c)\,(1+3c)} - \ldots$$

η οποία φανερά συγκλίνει (εναλλάσσουσα-μηδενική).

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$S\,(x) = \frac{x}{1+c} - \frac{x^2}{(1+c)\,(1+2c)} + \frac{x^3}{(1+c)\,(1+2c)\,(1+3c)} - \ldots$$

που για $x \in [0,1]$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Τότε $S = S\,(1)$ και

$c\,S'\,(x) = \dfrac{c}{1+c} - \dfrac{2xc}{(1+c)\,(1+2c)} + \ldots$ και

$\dfrac{S\,(x)}{x} = \dfrac{1}{1+c} - \dfrac{x}{(1+c)\,(1+2c)} + \ldots,$ οπότε

$\dfrac{S\,(x)}{x} + c\,S'\,(x) = \dfrac{1}{1+c} - \dfrac{x}{(1+c)\,(1+2c)} + \ldots =$

$1 - \dfrac{x}{(1+c)} + \dfrac{x^2}{(1+c)\,(1+2c)} - \ldots \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{S\,(x)}{x} + c\,S'\,(x) = 1 - S\,(x)}\,.$$

Αρα $\dfrac{S\,(x)}{x} + c\,S'\,(x) = 1 - S\,(x) \ \Rightarrow$

$\dfrac{1}{c}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)S\,(x) + S'\,(x) = \dfrac{1}{c}\,.$

Πολλαπλασιάζουμε με $e^{x/c}x^{1/c}$, οπότε έχουμε

$e^{x/c}x^{1/c}S'\,(x) + \dfrac{1}{c}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{x/c}x^{1/c}S\,(x) =$

$\dfrac{1}{c}e^{x/c}x^{1/c} \Rightarrow \left(e^{x/c}x^{1/c}S\,(x)\right)' = \dfrac{1}{c}e^{x/c}x^{1/c} \quad \Rightarrow$

$$\int_0^1 \left(e^{x/c}x^{1/c}S\,(x)\right)' dx = \frac{1}{c}\int_0^1 e^{x/c}x^{1/c}dx \ \Rightarrow$$

$$e^{1/c}S\,(1) = \frac{1}{c}\int\limits_0^1 e^{x/c}x^{1/c}dx \;\Rightarrow$$

$$\boxed{S = \frac{1}{c}e^{-1/c}\int\limits_0^1 e^{x/c}x^{1/c}dx}$$

και τελικά

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = x_1\,(1+S) - x_0 S}\,.$$

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Σπύρος Καπελλίδης) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ με*

$$|f(x)-f(y)| \geq d(x,y)\,,\ \textit{για όλα τα } x,y \in \mathbb{R}^2,$$

όπου d είναι η Ευκλείδεια απόσταση στον $\mathbb{R}^2$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=20799

Λύση 1 (Πέτρος Βαλέττας) Θεωρούμε τα σύνολα

$$E_m = \{x \in \mathbb{R}^2 : |f(x)| \leq m\} \text{ για } m = 1,2,\ldots.$$

Τότε, από το θεώρημα του Baire υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(\overline{E}_m) \neq \varnothing$. Επεκτείνουμε την f στο $\overline{E}_m$ σε μια F διατηρώντας την επεκτατική ιδιότητα:

$$|F(x)-F(y)| \geq \|x-y\|_2 \text{ για κάθε } x,y \in \overline{E}_m\,.$$

(Π.χ. αν $x \in \overline{E}_m \setminus E_m$ τότε υπάρχει ακολουθία $(z_n^x) \subseteq E_m$ ώστε $z_n^x \to x$. Επιπλέον, $|f(z_n^x)| \leq m$ κι από Bolzano-Weierstrass περνώντας σε μια υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(f(z_n^x))$ συγκλίνει σε ένα $z_x \in [-m,m]$. Ορίζουμε $F(x) = z_x = \lim_{n\to\infty} f(z_n^x)$.)

Τώρα έχουμε την $F : \overline{E}_m \longrightarrow [-m,m]$ ώστε

$$|F(x)-F(y)| \geq \|x-y\|_2\,.$$

Εφόσον, $\mathrm{int}(\overline{E}_m) \neq \varnothing$ το $\overline{E}_m$ περιέχει ένα τετράγωνο, ας πούμε το $T = [a,b]\times[a,b]$. Έστω $N \in \mathbb{N}$. Διαμερίζουμε το $[-m,m]$ σε N^2 ισομήκη διαστήματα πλάτους $2m/N^2$. Επίσης, διαμερίζουμε το T σε N^2 ίσα τετράγωνα, τα οποία ορίζουν $(N+1)^2$ σημεία (τις κορυφές τους). Από την αρχή του περιστερεώνα υπάρχουν δυο κορυφές - έστω x,y - ώστε $|F(x)-F(y)| \leq \frac{2m}{N^2}$. Από την άλλη μεριά $\|x-y\|_2 \geq \frac{b-a}{N}$. Αυτό δίνει αντίφαση για μεγάλα $N \in \mathbb{N}$.

Λύση 2 (Πέτρος Βαλέττας) Άλλη μια ιδέα, η οποία στηρίζεται στην έννοια του μέτρου: Γράφουμε $E = f(\mathbb{R}^2)$ και $g : E \to \mathbb{R}^2$ για την αντίστροφη της f, η οποία είναι 1-1, επί και 1-Lipschitz.

Θεωρούμε την $s_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ και θέτουμε $E_n = E \cap (0, s_n)$.

Τέλος, θεωρούμε την ακολουθία $A_1 = E_1$ και $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ για $n \geq 2$ και παρόμοια $E_n^- = E \cap (-s_n, 0)$ και $A_n^- = E_n^- \setminus E_{n-1}^-$. Τότε, τα A_n, A_n^- είναι ξένα ανά δύο και $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n^- \cup A_n) = E$.

Επιπλέον, έχουμε $\mathrm{diam}(g(A_k)), \mathrm{diam}(g(A_k^-)) \leq \frac{1}{k}$, άρα κάθε $g(A_k), g(A_k^-)$ περιέχεται σε μια μπάλα B_k, B_k^- αντίστοιχα, ακτίνας $1/k$. Αν συμβολίσουμε με m_2^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$, τότε παίρνουμε:

$$m_2^*(g(E)) \leq \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} m_2^*(g(A_k)) + m_2^*(g(A_k^-)) \leq$$
$$2\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} m_2^*(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi}{k^2} < +\infty\,,$$

κι έχουμε αντίφαση, αφού $m_2^*(g(E)) = m_2^*(\mathbb{R}^2) = \infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει η Φωτεινή Καλδή) Να βρείτε όλα τα σύνολα $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ για τα οποία ισχύει:*

$$(B \triangle C) \cup X = (B \cup X) \triangle (C \cup X)$$

όπου B, C δύο δοθέντα σύνολα (υποσύνολα του Ω).

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=105616

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Αν $x \in X$ τότε

$$x \in (B \triangle C) \cup X$$

και

$$x \notin (B \cup X) \triangle (C \cup X)$$

Επομένως η μόνη πιθανή λύση είναι η

$$X = \emptyset$$

η οποία επαληθεύει.

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Προτείνει η Φωτεινή Καλδή) Να βρείτε όλα τα σύνολα $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ για τα οποία ισχύει:*

$$A - (X - B) = (A - X) - B$$

όπου A, B δύο δοθέντα σύνολα (υποσύνολα του Ω).

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=105616

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Αν $x \in A \cap B$, τότε

$$x \notin (A \setminus X) \setminus B$$

και άρα

$$x \notin A \setminus (X \setminus B)$$

Επειδή όμως $x \in A$, πρέπει επίσης και $x \in X \setminus B$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού επιπλέον $x \in B$. Άρα πρέπει $A \cap B = \emptyset$. Σε αυτήν όμως την περίπτωση, οποιοδήποτε X και να πάρουμε έχουμε

$$A \setminus (X \setminus B) = A \setminus X = (A \setminus X) \setminus B$$

Θεωρία Αριθμών (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Νίκος Κατσίπης

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Γιώργος Κοτζαγιαννίδης) Να δείξετε ότι για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}^*$ *ισχύει* $169 \mid 3^{3n+3} - 26n - 27$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=19640

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Είναι

$$\begin{aligned}3^{3n+3} - 26n - 27 &= 27(27^n - 1) - 26n \\ &= 27(27-1)(27^{n-1} + 27^{n-2} + \\ &\qquad \cdots + 27 + 1) - 26n \\ &= 26(27^n + 27^{n-1} + \cdots + 27 - n).\end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται άμεσα, αφού η παρένθεση είναι διαιρετή με το 26.
Πράγματι,

$$\begin{aligned}&27^n + 27^{n-1} + \cdots + 27 - n \\ &\quad = (27^n - 1) + (27^{n-1} - 1) + \\ &\qquad \cdots + (27 - 1) \equiv 0 \pmod{26}.\end{aligned}$$

Μάλιστα αποδείξαμε, ότι $26^2 \mid 3^{3n+3} - 26n - 27$.

Λύση 2 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}3^{3n+3} - 26n - 27 &= 27(27^n - 1) - 26n \\ &= 2 \cdot 13(27^n - 1) + 27^n - 1 - 26n.\end{aligned}$$

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι ο $27^n - 1 - 26n$ είναι πολλαπλάσιο του 169.
Είναι

$$\begin{aligned}27^n - 1 - 26n &= 26(27^{n-1} + 27^{n-2} + \ldots + 27 + 1 - n) \\ &= 2 \cdot 13 \cdot [(27^{n-1} - 1) + (27^{n-2} - 1) + \\ &\qquad \cdots + (27 - 1)].\end{aligned}$$

Κάθε προσθετέος μέσα στην αγκύλη είναι πολλαπλάσιο του 26, άρα και του 13.

Λύση 3 (Μάγκος Θάνος) θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(x) = (x+1)^{n+1} - (n+1)x - 1 \text{ με}$$

$$f'(x) = (n+1)x^n - (n+1).$$

Είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 0$.
Επομένως, το 0 είναι τουλάχιστον διπλή ρίζα του $f(x)$.
Άρα, υπάρχει πολυώνυμο $g(x)$ ώστε

$$f(x) = x^2 g(x) \tag{3}$$

Όμως, είναι $f(26) = 27^{n+1} - 26(n+1) - 1$ και το ζητούμενο έπεται από την (3).

Λύση 4 (Φωτεινή Καλδή) Με επαγωγή.
Για $n = 1$, $n = 2$ η πρόταση ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για τυχαίο $n \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή

$$3^{3n+3} - 26n - 27 = \text{πολ}169.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον αμέσως επόμενο, δηλαδή

$$3^{3n+6} - 26(n+1) - 27 = \text{πολ}169.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}3^{3n+6} - 26(n+1) - 27 &= 27\ 3^{3n+3} - 26n - 53 \\ &= 27(\text{πολ}169 + 26n + 27) - 26n - 53 \\ &= \text{πολ}169.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο Σωτήρης Χασάπης) Θεωρούμε a και b θετικούς αριθμούς. Η διαίρεση με υπόλοιπο τών $a \cdot b$ με το $a + b$ μάς δίδει 2 μονοσήμαντα ορισμένους αριθμούς q και r με*

$$a \cdot b = q(a+b) + r \text{ με } 0 \le r < a + b.$$

Βρείτε όλα τα ζεύγη (a, b) για τα οποία ισχύει

$$q^2 + r = 2011.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=13925

Λύση 1 (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε

$$q \le \lfloor \sqrt{2011} \rfloor = 44, \tag{4}$$

και $q < q + \dfrac{r}{a+b} = \dfrac{ab}{a+b}$ κι άρα

$$q < a \quad \text{και} \quad q < b. \tag{5}$$

Επίσης,

$$(a-q)(b-q) = ab - q(a+b) + q^2 = r + q^2 = 2011$$

κι άρα από την (5) (όπου είναι $a - q > 0$ και $b - q > 0$), αφού ο 2011 είναι πρώτος, αναγκαστικά θα έχουμε

$$a - q = 1 \text{ και } b - q = 2011 \text{ ή } a - q = 2011 \text{ και } b - q = 1.$$

Λαμβάνοντας υπόψη και την (4), οι τετράδες που (a, b, q, r) παίρνουμε είναι οι

$$(q+1, q+2011, q, 2011 - q^2) \text{ και}$$
$$(q+2011, q+1, q, 2011 - q^2)$$

για $q = 0, 1, \ldots, 44$, δηλαδή οι παρακάτω 90 τον αριθμό

$$(1, 2011, 0, 2011), (2011, 1, 0, 2011)$$
$$(2, 2012, 1, 2010), (2012, 2, 1, 2010)$$
$$(3, 2013, 2, 2007), (2013, 3, 2, 2007)$$
$$\ldots$$
$$(45, 2055, 44, 75), (2055, 45, 44, 75).$$

Επιμελητής: Μιχάλης Λάμπρου

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *για τις οποίες* $f(0)=0$ *και για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *έχουμε* $f(2x)\geq x+f(x)$ *και* $f(3x)\leq 2x+f(x)$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=113239

Λύση (air) Έστω $x\in\mathbb{R}$ τυχαίος. Από τις δοθείσες προκύπτει τότε επαγωγικά ότι:

$f(x)\geq \dfrac{2^n-1}{2^n}x+f(\dfrac{x}{2^n})\forall n\in\mathbb{N}^*$ και ότι

$f(x)\leq \dfrac{3^n-1}{3^n}x+f(\dfrac{x}{3^n})\forall n\in\mathbb{N}^*$. Παίρνοντας όρια για $n\to\infty$ και δεδομένης της συνέχειας της f προκύπτει αντίστοιχα ότι:

$f(x)\geq x+f(0)=x$ και $f(x)\leq x+f(0)=x$ δηλαδή $f(x)=x$. Και αφού $x\in\mathbb{R}$ τυχαίος προκύπτει ότι η ζητούμενη συνάρτηση είναι η ταυτοτική.

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Έστω* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *συνάρτηση τέτοια ώστε* $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$, *για κάθε* x, $y\in[0,1]$. *Να δείξετε ότι*

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx+\frac{1}{12}\geq\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=99634

Λύση (Θάνος Μάγκος) Καταρχάς, απλοποιούμε την προς απόδειξη ανισότητα.

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο «αριστερό» ολοκλήρωμα, έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 xf(x)dx+\frac{1}{12}\geq\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx,$$

δηλαδή, ότι $\displaystyle\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx\leq\frac{1}{12}$.

Τώρα, θέτουμε $f(x)=x+g(x)$. Πλέον, η προς απόδειξη σχέση γράφεται $\displaystyle\int_0^1(2x-1)g(x)\leq 0$ (απλό θέμα πράξεων). Όμως, η αρχική σχέση γίνεται

$|g(x)-g(y)+x-y|\leq|x-y|$ για κάθε $x,y\in[0,1]$ $(\star)$. Από εδώ προκύπτει, ότι η g είναι φθίνουσα στο $[0,1]$.

Πράγματι, έστω $x,y\in[0,1]$ με $x>y$. Αν υποθέσουμε, ότι ισχύει $g(x)>g(y)$, από την $(\star)$ έχουμε $g(x)-g(y)+x-y\leq x-y\Rightarrow g(x)\leq g(y)$, άτοπο. Άρα είναι $g(x)\leq g(y)$ και η g είναι φθίνουσα.

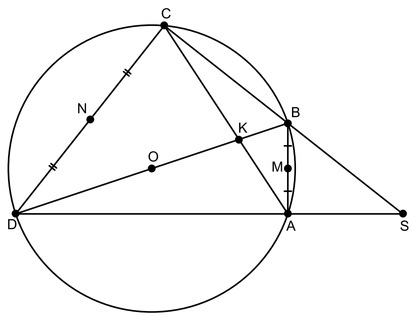
Τώρα, η $2x-1$ είναι αύξουσα και η g είναι φθίνουσα. Άρα από την ανισότητα Chebyshev είναι

$$\begin{aligned}\int_0^1(2x-1)g(x)dx &\leq \int_0^1(2x-1)dx\int_0^1 g(x)dx\\ &= 0\cdot\int_0^1 g(x)dx=0\end{aligned}$$

Επιμελητής: Γιώργος Μπαλόγλου

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτείνει ο KARKAR) Οι διαγώνιοι του εγγεγραμμένου $ABCD$, τέμνονται στο K, ενώ οι προεκτάσεις των CB, DA, στο S.*

Αν M, N τα μέσα των πλευρών AB, CD και είναι: $CD = 2AB$, δείξτε ότι: $MN = \frac{3}{4}SK$.



http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=62&p=99515

Λύση 1 (Κώστας Ρεκούμης)
Ονομάζουμε $CB = a, AD = b, C\hat{S}D = x$.
Είναι (εύκολο):

$$DS = 2BS, BS = \frac{a+2b}{3}, \frac{KB}{KD} = \frac{a}{2b}$$

Ακόμα:

$$2\vec{NM} = \vec{CB} + \vec{DA}$$

$$\Rightarrow 4MN^2 = CB^2 + DA^2 + 2CBDAcosx =$$

$$= a^2 + b^2 + 2abcosx$$

και ακόμα:

$$\frac{KB}{KD} = \frac{a}{2b} \Rightarrow S\vec{K} = \frac{aS\vec{D} + 2bS\vec{B}}{a+2b}$$

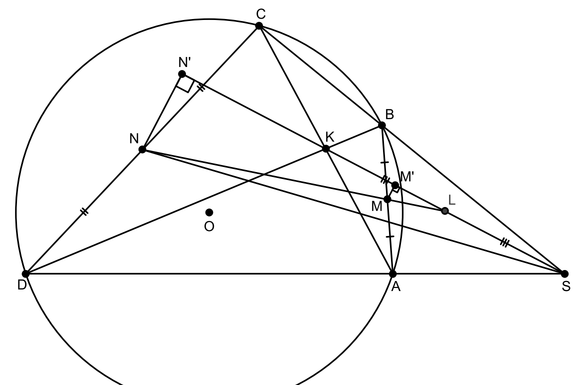
$$\Rightarrow SK^2 = \frac{a^2SD^2 + 4b^2SB^2 + 4abSDSBcosx}{(a+2b)^2}$$

$$\Rightarrow SK^2 = \frac{4a^2SB^2 + 4b^2SB^2 + 8abSB^2cosx}{(a+2b)^2}$$

$$\Rightarrow SK^2 = 4SB^2\frac{a^2+b^2+2abcosx}{(a+2b)^2} =$$

$$= 4\frac{(a+2b)^2}{9}\frac{4MN^2}{(a+2b)^2} = \frac{16}{9}MN^2.$$

Λύση 2 (Στάθης Κούτρας) Κατ αρχήν έχουμε δείξει εδώ: με εμβαδά ότι τα μέσα των διαγωνίων πλήρους τετραπλεύρου είναι σημεία συνευθειακά δηλαδή αν $L \equiv MN \cap KS \Rightarrow L$ το μέσο του KS.



Προφανώς (από την εγγραψιμότητα) του $ABCD$ εμφανίζονται (εύκολα γωνιακά) οι ομάδες των ομοίων τριγώνων:($\triangle SAB - \triangle SDC$), ($\triangle KAB - \triangle KDC$) με λόγο ομοιότητα (των πρώτων προς τα δεύτερα) $\frac{AB}{DC} \overset{DC=2AB}{=} \frac{1}{2}$,

δηλαδή είναι $\triangle SAB \sim \triangle SDC$

$$\Rightarrow \frac{SB}{SD} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{SD = 2SB} : (1) \\ \boxed{SC = 2SA} : (2) \\ \boxed{DC = 2AB} : (3) \end{cases}$$

και με όμοιο τρόπο από το άλλο ζεύγος των ομοίων τριγώνων προκύπτει ότι: $\begin{cases} \boxed{KD = 2KA} : (4) \\ \boxed{KC = 2KB} : (5) \end{cases}$

Από τις ομοιότητες των ζευγών των τριγώνων ($\triangle SAB - \triangle SDC$), ($\triangle KAB - \triangle KDC$) προκύπτει ότι και οι ομόλογες διάμεσοι θα έχουν επίσης λόγο $\frac{1}{2}$, δηλαδή

$$\frac{SM}{SN} \overset{\triangle SAC \sim SDC}{=} \frac{1}{2} \overset{\triangle KAC \sim KDC}{=} \frac{KM}{KN}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{SN = 2SM} : (6) \\ \boxed{KN = 2KM} : (7) \end{cases}$$

Επίσης είναι $\triangle KMB \sim \triangle KNC$ από τα μισά των ανάλογων πλευρών των ομοίων τριγώνων

$\triangle KAB - \triangle KDC$ και τις ομόλογες διαμέσους ή από το

Θεώρημα της Πεταλούδας (που έχει συζητηθεί αρκετές φορές εδώ στο Mathematica οπότε: $\boxed{\widehat{KNC} = \widehat{KMB}}$: (8)

Ομοίως από την ομοιότητα $\triangle SMB \sim \triangle SND$ (για παρόμοιο λόγο) προκύπτει ότι: $\boxed{\widehat{SND} = \widehat{SMB}}$: (9).
Με πρόσθεση των σχέσεων

$$(8),(9) \Rightarrow \widehat{KNC} + \widehat{SND} = \widehat{KMB} + \widehat{SMB} \overset{\widehat{KNC}+\widehat{SND}=180^0-\widehat{SNK},\widehat{KMB}+\widehat{SMB}=\widehat{KMS}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow 180^0 - \widehat{SNK} = \widehat{KMS}$$

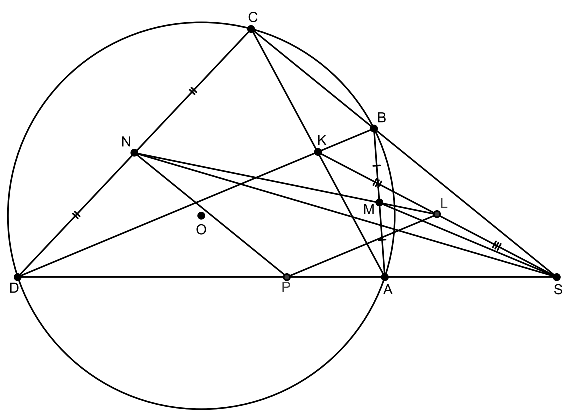
$$\Rightarrow \boxed{\widehat{SNK} + \widehat{SNK} = 180^0}$$

$$\overset{\triangle KMS,KNS}{\Longrightarrow} \frac{(KMS)}{(KNS)} = \frac{(MK)(MS)}{(NK)(NS)}$$

$$\overset{NK=2KM,NS=2MS}{\Longrightarrow} \dots \frac{(KMS)}{(KNS)} = \frac{1}{4} \overset{\text{κοινή βάση } (KS) \to \frac{(KMS)}{(KNS)} = \frac{MM'}{NN'}}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{1}{4} \overset{\triangle LNN' \sim \triangle LMM' \Rightarrow \frac{MM'}{NN'} = \frac{LM}{LN}}{\Longrightarrow} \frac{LM}{LN} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{LN - MN}{LN} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \frac{MN}{LN} = \frac{1}{4} \Rightarrow \dots \boxed{MN = \frac{3}{4}LN} : (10)$$



Έστω P το μέσο του SD τότε:

$$\triangle DSC : \left\{ \begin{matrix} N - \text{μέσο της } DC \\ P - \text{μέσο της } DS \end{matrix} \right\}.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} NP = \dfrac{SC}{2} \overset{SC=2AS}{\Longrightarrow} \boxed{NP = AS} : (11) \\ NP//SC \Rightarrow \boxed{\widehat{NPD} = \widehat{DSB}} : (12) \end{matrix} \right\}$$

Ομοίως: $\triangle\ DSK : \left\{ \begin{matrix} L - \text{μέσο της } DK \\ P - \text{μέσο της } DS \end{matrix} \right\}. \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{matrix} LP = \dfrac{KD}{2} \overset{KD=2KA}{\Longrightarrow} \boxed{LP = KA} : (13) \\ LP//KD \Rightarrow \boxed{\widehat{LPS} = \widehat{KDS}} : (14) \end{matrix} \right\}$$

Στο τρίγωνο $\triangle BDS \overset{\widehat{CBD}(\text{εξωτερική })}{\Longrightarrow} \widehat{CBD} = \widehat{DSB} + \widehat{KDS}$

$$\overset{(12),(14),\widehat{CBD}=\widehat{CAD}(\text{εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο })}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{NPD} + \widehat{LPS} \overset{\widehat{CAD}=180^0-\widehat{KAS},\widehat{NPD}+\widehat{LPS}=180^0-\widehat{NPL}}{\Longrightarrow}$$

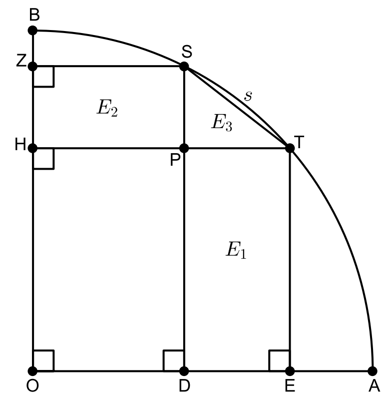
$$\Rightarrow 180^0 - \widehat{KAS} = 180^0 - \widehat{NPL}$$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{KAS} = \widehat{NPL}} : (15)$$

$$\text{Από } (11),(13),(15) \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Longrightarrow} \triangle NPL = \triangle SAK$$

$$\Rightarrow LN = KS \overset{(10):MN=\frac{3}{4}LN}{\Longrightarrow} \boxed{MN = \frac{3}{4}KS}$$

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτείνει ο KARKAR) Τόξο $\overset{\frown}{ST}$ σταθερού μήκους $s, (s < \dfrac{\pi R}{2})$, μετακινείται επί του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, του τεταρτοκυκλικού τομέα OAB. Από τα άκρα του, φέρω τα τμήματα SD, TE, κάθετα προς την OA, και τα SZ, TH, κάθετα προς την OB. Φέροντας και τη χορδή ST, σχηματίζονται δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Δείξτε ότι το: $E_1 + E_2 + 2E_3$, είναι σταθερό. (E_1, E_2, E_3 είναι τα εμβαδά των σχημάτων)*

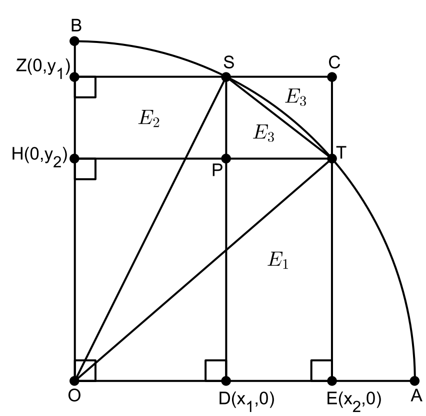


---

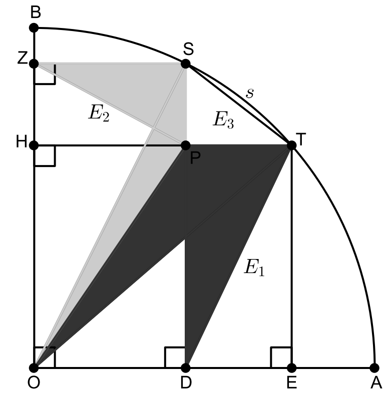
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=19080

Λύση 1 (σύνθεση λύσεων Λάμπρου Ευσταθίου και Γιώργου Ρίζου) Θεωρούμε για λόγους απλότητας $R = 1$. Έστω $D(x_1, 0), E(x_2, 0), Z(0, y_1), H(0, y_2)$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$E_{o\lambda} = (OE)(OZ) - (OD)(OH) =$
$= x_2 y_1 - x_1 y_2 =$
$= \cos(TOA)\sin(SOA) - \cos(SOA)\sin(TOA) =$
$= \sin(SOA - TOA) = \sin(SOT).$



Λύση 2 (Σωτήρης Λουρίδας, Παναγιώτης Γιαννόπουλος)
$ZO \parallel SP \Rightarrow (SZP) = (SOP)$, $OD \parallel PT \Rightarrow (PDT) = (POT) \Rightarrow (SZP) + (PDT) + (SPT) = (SOT) \Rightarrow E_1 + E_2 + 2E_2 = 2\,(SOT)$.



Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

ΑΣΚΗΣΗ 59 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Αν* $z^5 = 1$, *να υπολογίσετε τα αθροίσματα*

$$A = \frac{z}{1+z^2} + \frac{z^2}{1+z^4} + \frac{z^3}{1+z} + \frac{z^4}{1+z^3},$$

$$B = \frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^3}{1-z} + \frac{z^4}{1-z^3}.$$

Για το 2ο άθροισμα, θεωρούμε $z \neq 1$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=10440

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαπάς)

$$A = \frac{z}{1+z^2} + \frac{z^2}{1+z^4} + \frac{z^3}{1+z} + \frac{z^4}{1+z^3} =$$

$$= \frac{z \cdot z^3}{z^3 + z^3 \cdot z^2} + \frac{z \cdot z^2}{1 \cdot z + z^4 \cdot z} + \frac{z^3}{1+z} + \frac{z^4}{1+z^3} =$$

$$= \frac{z^4}{z^3 + z^5} + \frac{z^3}{z + z^5} + \frac{z^3}{1+z} + \frac{z^4}{1+z^3} =$$

$$= \frac{2z^4}{z^3+1} + \frac{2z^3}{z+1} = \frac{2z^4}{(z+1)(z^2-z+1)} + \frac{2z^3}{z+1} =$$

$$= \frac{2z^4}{(z+1)(z^2-z+1)} + \frac{2z^3(z^2-z+1)}{(z+1)(z^2-z+1)} =$$

$$= \frac{2z^4 + 2z^3(z^2-z+1)}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{2z^3(z+z^2-z+1)}{z^3+1} =$$

$$= \frac{2z^3(z^2+1)}{z^3+1} = \frac{2(z^5+z^3)}{z^3+1} = 2$$

$$B = \frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^3}{1-z} + \frac{z^4}{1-z^3} =$$

$$= \frac{z \cdot z^3}{z^3 - z^3 \cdot z^2} + \frac{z \cdot z^2}{1 \cdot z - z^4 \cdot z} + \frac{z^3}{1-z} + \frac{z^4}{1-z^3} =$$

$$= \frac{z^4}{z^3 - z^5} + \frac{z^3}{z - z^5} + \frac{z^3}{1-z} + \frac{z^4}{1-z^3} =$$

$$= \frac{z^4}{z^3 - 1} + \frac{z^3}{z-1} + \frac{z^3}{1-z} + \frac{z^4}{1-z^3} = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 60 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Αν* $x_1, x_2, ..., x_n$ *είναι θετικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση*

$$nx + \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_k - x}$$

έχει ρίζα το 0 και $n-1$ *διαφορετικούς μεταξύ τους θετικούς αριθμούς*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=15151

Λύση 1 (Χρήστος Κυριαζής) Αν $x = 0$ τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

δηλαδή επαληθεύει την εξίσωση. Υποθέτω (χωρίς βλάβη) πως

$$x_1 < x_2 < ..... < x_n$$

Τότε (για $x \neq 0$) έχω:

$$nx + \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i - x} \Leftrightarrow$$

$$nx + \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - x^2 + x^2}{x_i - x} \Leftrightarrow$$

$$nx + \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x)(x_i + x)}{x_i - x} + \frac{x^2}{x_i - x}$$

απ'οπου:

$$nx + \sum_{i=1}^{n} x_i = nx + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{x^2}{x_i - x} \Leftrightarrow$$

$$x^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - x} = 0 \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - x} = 0$$

Ας θεωρήσω τώρα τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{1}{x_1 - x} + \frac{1}{x_2 - x} + ... + \frac{1}{x_n - x},$$
$$x \in (x_i, x_{i+1}),\ i = 1, 2...n-1$$

τότε αυτή είναι συνεχής,ως πράξεις συνεχών, παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x_1 - x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_2 - x}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{x_n - x}\right)^2,$$

$$\forall x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, 2 \ldots n-1$$

δηλαδή η συνάρτηση είναι γν.αύξουσα στο εκάστοτε διάστημα. Τώρα ειναι σε κάθε διάστημα

$$(x_i, x_{i+1}), i = 1, 2 \ldots n-1$$

$$\lim_{x \to x_i} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_{i+1}} f(x) = +\infty$$

και λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας της συνάρτησης αυτή έχει για σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Όμως $0 \in \mathbb{R}$ συνεπώς υπάρχει $\xi_i \in (x_i, x_{i+1}) (i = 1, 2 \ldots n-1)$ και μάλιστα μοναδικό (λόγω μονοτονίας) ώστε να ισχύει: $f(\xi_i) = 0 \ (i = 1, 2 \ldots n-1)$

Λύση 2 (Σπύρος Καπελλίδης) Ας δούμε και έναν διαφορετικό τρόπο για τις ρίζες της εξίσωσης

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - x} = 0 \ \ (1)$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

τότε η (1) γράφεται ισοδύναμα

$$-\frac{g'(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$$

η οποία είναι μία πολυωνυμική εξίσωση $n-1$ βαθμού και έχει μία ρίζα ξ_k σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(x_k, x_{k+1}), k = 1, 2, \ldots, k-1$, (Rolle) άρα k ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 61 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Έστω Ω το χωρίο του επιπέδου, το οποίο αποτελείται από τα σημεία (x, y) για τα οποία ισχύει $|x| - |y| \leq 1$ και $|y| \leq 1$. Να βρεθεί το εμβαδόν του Ω.*

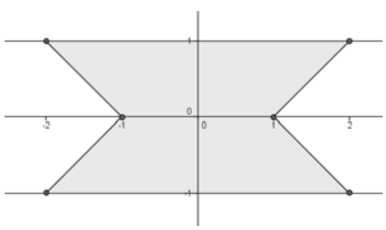
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=21060

Λύση 1 (Σωτήρης Χασάπης) Αυτό είναι το εξής διπλό ολοκλήρωμα :

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1-|y|}^{1+|y|} 1dxdy,$$

που είναι y-απλός τόπος και ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς x και έπειτα ως προς y και κάνει 6.

Λύση 2 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Το χωρίο ορίζεται από τις γραμμές $y = 1$, $y = -1$, $x = |y| + 1$ και $x = -|y| - 1$ όπως φαίνεται στο σχήμα :



Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου αν αφαιρέσουμε δύο τριγωνάκια, δηλαδή

$$E = 4 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ τ.μ.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 62 *(Προτείνει ο Στράτης Αντωνέας) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση*

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 + ax - 2 = 0,\ a \in \mathbb{R},$$

έχει δύο ετερόσημες πραγματικές ρίζες και δύο μιγαδικές ρίζες.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=20681

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Το 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.

Η εξίσωση γράφεται ως $g(x) = a$, όπου

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{2}{x},\ \ x \neq 0.$$

Είναι $g'(x) = 3x^2 - 6x + 5 + \dfrac{2}{x^2} > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, \infty)$ και επειδή είναι

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = +\infty,\ \lim_{x\to0^+} g(x) = -\infty,$$

το σύνολο τιμών της g σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, \infty)$ είναι το $\mathbb{R}$.
Άρα η εξίσωση $g(x) = a$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες στο $\mathbb{R}^*$, οι οποίες είναι ετερόσημες, και επομένως το ίδιο ισχύει και για την εξίσωση

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 + ax - 2 = 0.$$

Λύση 2 (Κώστας Σερίφης) Με Vieta:
Έστω x_i, $i = 1, 2, 3, 4$ οι 4 ρίζες της εξίσωσης.
Θα είναι:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 3 \tag{6}$$

$$\sum_{i\neq j=1}^{4} x_i \cdot x_j = 5 \tag{7}$$

$$\prod_{i=1}^{4} x_i = -2 \tag{8}$$

Η ισότητα (8) αποκλείει να είναι και οι 4 ρίζες μη πραγματικές.
Η ταυτότητα:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} {x_i}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 - 2\sum_{i\neq j=1}^{4} x_i \cdot x_j \\ &\overset{(6)(7)}{=} 9 - 10 \\ &= -1\end{aligned}$$

αποκλείει οι 4 ρίζες να είναι πραγματικές.

Συνεπώς η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και 2 ρίζες συζυγείς μιγαδικές και μάλιστα, από την (8) θα πρέπει οι πραγματικές να είναι ετερόσημες.

Διευκρίνηση: Ανά δύο οι μη πραγματικές ρίζες είναι συζυγείς.

Λύση 3 (Μιχάλης Λάμπρου) Αφού η άσκηση έχει τοποθετηθεί στον φάκελο του ΑΣΕΠ, ίσως μία λύση με τον κανόνα των προσήμων του Descartes, είναι επιτρεπτή. Ο κανόνας αυτός, είναι στάνταρ ύλη σε μαθήματα Άλγεβρας, στην Θεωρία Πολυωνύμων, και η απόδειξή του είναι απλή. Προσθέτω ότι ο κανόνας είναι «κομμένος ραμμένος» για ασκήσεις σαν την παρούσα, και η ερμηνεία του «τι τρέχει» γίνεται διαφανής.

(i) Αφού υπάρχουν τρεις αλλαγές προσήμων στους συντελεστές του $p(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + ax - 2$ (σε κάθε μία από τις περιπτώσεις $a > 0$ ή $a < 0$ ή $a = 0$) έχουμε 3 ή 1 θετικές ρίζες.

(ii) Αφού υπάρχει μία αλλαγή προσήμων στο $p(-x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 - ax - 2$ (σε κάθε μία από τις περιπτώσεις $a > 0$ ή $a < 0$ ή $a = 0$) έχουμε 1 αρνητική ρίζα.

Άρα έχουμε είτε (1 θετική και 1 αρνητική ρίζα) ή (3 θετικές και 1 αρνητική). Όμως η δεύτερη εκδοχή δεν είναι δυνατή γιατί τότε θα είχαμε 4 πραγματικές ρίζες, ενώ $\sum_{k=1}^{4} \rho_k^2 = \ldots = -1$. Μένει η πρώτη.